

Seminar Stochastische Prozesse: Punktprozesse

Sommersemester 2017

Mathias Trabs*
Universität Hamburg

12. April 2017

Allgemeine Informationen

- Dieses Seminar beruht auf dem Buch:
Alan F. Karr: *Point processes and their statistical inference*. Second edition. Probability: Pure and Applied, 7. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
- Das Bestehen dieses Moduls erfordert:
 - die Anwesenheit im Seminar (2 Fehltermine sind möglich)
 - das Halten eines fachlich richtigen und das vergebene Thema geeignet wiedergebenden Vortrages
 - das Schreiben einer sauberen und richtigen Ausarbeitung
- Hinweise für die Erarbeitung der Themen:
 - Führen Sie die Beweise detailliert aus.
 - Arbeiten Sie die Beispiele aus.
 - Wir setzen stets $E = \mathbb{R}^d$ (statt eines allgemeinen lokal kompakten Hausdorffraumes mit abzählbarer topologischer Basis, (LCCB)).
 - Ihr Vortrag sollte etwa 80min dauern, damit wir anschließend Zeit für Fragen haben.
 - Geben Sie nach dem Vortrag eine etwa 10-15 seitige Ausarbeitung ab, die nach einer Korrektur im Stine hochgeladen wird.

Themenübersicht

TOP 1: Einführung zu Zufallsmaßen und Punktprozessen (04.04.17)

- **Quelle:** Abschnitte 1.1 und 1.2 (Seiten 4 - 12 ggf. mit Ergänzungen aus Anhang A).
- **Ziele:**
 - Definitionen von Zufallsmaßen, Punktprozessen sowie den Spezialfällen Poisson-Zufallsmaße, Cox-Prozesse, Erneuerungsprozesse und (gemischte) empirische Prozesse
 - Beschreibung der Verteilung von Punktprozessen mittels Laplace-Transformation, Nullwahrscheinlichkeitsfunktional und Maßen der Momente
 - *Eindeutigkeitssatz 1.12* und die Charakterisierung von Unabhängigkeit aus *Satz 1.18*

*Email: mathias.trabs@uni-hamburg.de

TOP 2: Verteilungskonvergenz (11.04.17)

- **Quelle:** Abschnitt 1.3 (Seiten 12 - 16) sowie ergänzende Literatur (z.B. Klenke (2008): Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer)
- **Ziele:**
 - Definitionen von vager Konvergenz (mit Vergleich zur schwachen Konvergenz) von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Konvergenz in Verteilung von Punktprozessen
 - *Satz 1.21* zur Charakterisierung von Verteilungskonvergenz von Punktprozessen und dessen Konsequenzen insbesondere für Poisson-Prozesse und Erneuerungsprozesse (Beispiele 1.24 und 1.25)
 - Vergleich zur schwachen Konvergenz von stochastischen Prozessen

TOP 3: Markierte Punktprozesse und Cluster-Prozesse (18.04.17)

- **Quelle:** Abschnitt 1.4 (Seiten 16 - 21)
- **Ziele:**
 - Definitionen von Markierten Punktprozessen, Cluster-Prozessen und unendlich teilbaren Prozessen
 - *Satz 1.32* zur Äquivalenz von unendlich teilbaren Prozessen und Poisson-Cluster-Prozessen
 - Zerlegung von Prozessen mit unabhängigen Inkrementen (*Satz 1.34*)

TOP 4: Transformation von Punktprozessen (25.04.17)

- **Quelle:** Abschnitt 1.5 (Seiten 21 - 26)
- **Ziele:**
 - Definitionen von zusammengesetzten Punktprozessen, thinning (Ausdünnen), superposition (Überlagerung)
 - Zusammenhang von Cox-Prozessen und thinning (*Sätze 1.40 und 1.41*)
 - Zentraler Grenzwertsatz für Punktprozesse (*Satz 1.43*)

TOP 5: Approximation von Punktprozessen (27.06.17)

- **Quelle:** Abschnitt 1.6 (Seiten 26 - 31)
- **Ziele:**
 - Approximation von Bernoulli-Punktprozessen mit Poisson-Prozessen in Totalvariation (*Satz 1.44*)
 - Optimalität (*Satz 1.46*)

TOP 6: Palm-Verteilungen (02.05.17)

- **Quelle:** Abschnitt 1.7 (Seiten 31 - 35)
- **Ziele:**
 - Definitionen und heuristische Interpretation von reduzierten und nicht-reduzierten Palm-Verteilungen eines einfachen Punktprozesses
 - *Satz 1.52* zur Verifizierung der Heuristik
 - Anwendungen auf Poisson- und Cox-Prozesse

TOP 7: Stationäre Verteilungen (09.05.17)

- **Quelle:** Abschnitt 1.8 (Seiten 35 - 44)
- **Ziele:**
 - Definition von stationären Prozessen und deren Intensität
 - Palm-Maß eines stationären Prozesses mit Charakterisierung aus *Satz 1.64* und Interpretation aus *Satz 1.66*
 - Ergodensätze (Satz 1.71 und Satz 1.72)

TOP 8: Markierte Punktprozesse: Filtration und stochastische Integration (16.05.17)

- **Quelle:** Abschnitte 2.1 und 2.2 (Seiten 54 - 59) und ggf. Zusatzliteratur zur Integrationstheorie (z.B. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, 2007)
- **Ziele:**
 - Definitionen der Filtration eines markierten Punktprozesses sowie von adaptierten, progressiven und vorhersagbaren Prozessen
 - Eigenschaften der Filtration (Sätze 2.1 bis 2.7)
 - Stochastisches Stieltjes-Integral und die partielle Integration (*Satz 2.8*)
 - Martingaleigenschaft (*Satz 2.9*)

TOP 9: Kompensatoren für Punktprozesse auf \mathbb{R}_+ (23.05.17)

- **Quelle:** Abschnitt 2.3 bis einschließlich Beispiel 2.10 (Seiten 59 - 64, ggf. mit Ergänzungen aus Anhang B)
- **Ziele:**
 - Definition des Kompensators von Punktprozessen (Doob-Meyer-Zerlegung), insbesondere die Spezialfälle von Poisson-Prozessen und Cox-Prozessen
 - Charakterisierung des Kompensators (*Satz 2.14*)
 - Beschreibung des Kompensators (*Sätze 2.17* und *2.18*) sowie der Eindeigkeitssatz (*Satz 2.19*)

TOP 10: Kompensatoren für markierte Punktprozesse (30.05.17)

- **Quelle:** Fortführung von TOP 9: Abschnitt 2.3 nach Beispiel 2.10 (Seiten 64 - 69, ggf. mit Ergänzungen aus Anhang B)
- **Ziele:**
 - Zusammenhang zwischen Kompensatoren für markierte Punktprozesse und Punktprozesse auf \mathbb{R}_+ (*Satz 2.22*)
 - Quadratische (Ko-)Variation von Punktprozessen und die Darstellung mittels Kompensatoren (*Sätze 2.21* und *2.23*)
 - Schwache Konvergenz und Konvergenz der Kompensatoren (Satz 2.25)
 - Abschätzung des Totalvariationsabstandes mittels Kompensatoren (Satz 2.26)

TOP 11: Stochastische Intensitäten (06.06.17)

- **Quelle:** Abschnitte 2.4 und 2.5 (Seiten 69 - 76)
- **Ziele:**
 - Definition der stochastischen Intensität und die Darstellungen aus *Satz 2.30*
 - Darstellung der Radon-Nikodym-Dichte mittels stochastischer Intensität (*Satz 2.31*)
 - Martingaleigenschaften (*Satz 2.32*)
 - Darstellung von Punktprozessmartingalen (*Satz 2.34*)

TOP 12: Intensitätstheorie für Punktprozesse in allgemeinen Räumen (04.07.17)

- **Quelle:** Abschnitt 2.5 (Seiten 76 - 84)
- **Mögliche Ziele:** (treffen Sie hier eine Auswahl)
 - Idee und Definition von „Exvisibility“
 - Eigenschaften der exvisiblen Projektion (*Sätze 2.37* und *2.38*)
 - Darstellung der exvisiblen Projektion (*Satz 2.40*)
 - Zusammenhang zur bedingten Intensität (*Satz 2.41*)
 - „Räumliche“ Filtrationen in Analogie zu den üblichen „zeitlichen“ Filtrationen (*Satz 2.35*)
 - Definition des Gibbs-Kerns und des Gibbs-Maßes und *Satz 2.44*
 - Anwendung auf Poisson-Prozesse und Zusammenhang zwischen Gibbs-Kern und exvisibler Projektion

TOP 13: Intensitätsschätzung mit Martingalen (13.06.17)

- **Quelle:** Abschnitt 5.1 (Seiten 166 - 174)
- **Ziele:**
 - Definition des stochastischen Intensitätsmodells
 - Darstellung der Likelihoodfunktion (*Satz 5.2*)
 - Idee und Schätzfehler der Martingalmethode (*Sätze 5.4* und *5.5*)
 - Anwendung im multiplikativen Intensitätsmodell, insbesondere auf u.i.v. Beobachtungen sowie unabhängige Markovprozesse

TOP 14: Hawkes Prozesse (11.07.17)

- **Quelle:** Daley und Vere-Jones (2003): „An Introduction to the Theory of Point processes“, Springer. Beispiele 6.3(c), 7.2(b) sowie 6.4(c), 7.3(b)
- **Ziele:**
 - Definition von Hawkes Prozessen
 - Existenz eines (eindeutigen) stationären Hawkes-Prozesses
 - Darstellung der bedingten Intensitätsfunktion
 - Markierte Hawkes Prozesse