Lévy-Prozesse

Wintersemester 2016/17

Mathias Trabs*
Universität Hamburg

1. März 2017

Inhaltsverzeichnis

Literaturemfehlung

- Applebaum, D. (2009). Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press, Cambridge.
- Cont, R. und Tankov, P (2004). Financial Modelling With Jump Processes. Chapman& Hall/CRC, London.
- Sato, K.-I. (1999). *Lévy Processes and Infinitely* Divisible Distributions. de Gruyter.
- Kallenberg, O. (2001). *Foundations of Modern Probability.* Springer, Berlin/ Heidelberg.

*Email: mathias.trabs@uni-hamburg.de

1 Definition und Beispiele

Definition 1.1. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t, t \geqslant 0)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *Lévy-Prozess*, falls

(i) $X_0 = 0$;

(ii) X unabhängige Zuwächse hat, d.h. für $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ sind $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})_{i=1,\dots,n}$ unabhängig;

(iii) X stationäre Zuwächse hat, d.h. für $0 < s < t$ gilt $B_t - B_s \overset{d}{=} B_{t-s}$;

(iv) X stochastisch stetig ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ und $s > 0$ gilt

$$\lim_{t \to s} \mathbb{P}\big(|X_t - X_s| > \varepsilon\big) = 0;$$

(v) die Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ rechtsstetig sind mit linken Grenzwerten (càdlàg).

Auf die Eigenschaft (v) kann auch verzichtet werden. Man kann zeigen, dass für jeden Prozess, der (i)-(iv) erfüllt, eine càdlàg-Modifikation existiert [Sato, Theorem 11.5]. Zwei wichtige Beispiele von Lévy-Prozessen sind bereits aus der Vorlesung "stochastische Prozesse" gut bekannt:

Beispiel 1.2. Folgende Prozesse sind Lévy-Prozesse (Definition/ stochastische Prozesse/ Übung ☑):

(i) Die *standard Brownsche Bewegung* $B = (B_t, t \geqslant 0)$ (in $\mathbb{R}$) ist definiert als stochastischer Prozess mit den Eigenschaften

  (a) $B_0 = 0$;
  (b) B hat unabhängig und stationäre Zuwächse;
  (c) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ für alle $t > 0$;
  (d) B hat f.s. stetige Pfade.

  Sind $(B_k)_{k=1,\dots,d}$ unabhängige standard Brownsche Bewegungen, so ist der $\mathbb{R}^d$-wertige Prozess $\overline{B} := (B_1, \dots, B_d)^\top$ eine d-dimensionale standard Brownsche Bewegung und es gilt $B_t \sim \mathcal{N}(0, tE_d)$ für die Einheitsmatrix $E_d \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Für $\lambda > 0$ seien $(S_k)_{k \geqslant 1}$ unabhängig $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann heißt $N = (N_t, t \geqslant 0)$ mit $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n S_k \leqslant t\}$ *Poisson-Prozess mit Intensität* λ. Insbesondere besitzt N unabhängige und stationäre Zuwächse und $N_t \sim Poiss(\lambda t)$, d.h.

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

  Der Prozess

$$\widetilde{N} = (\widetilde{N}_t, t \geqslant 0) \quad \text{mit} \quad \widetilde{N}_t := N_t - \lambda t$$

  heißt *kompensierter Poisson-Prozess* und ist ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leqslant t)$ von N:

$$\mathbb{E}[\widetilde{N}_t - \widetilde{N}_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_t - N_s | N_s] - \lambda(t-s) = \mathbb{E}[N_t - N_s] - \lambda(t-s) = 0.$$

(iii) Für einen Poisson-Prozess $N = (N_t, t \geqslant 0)$ und eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (u.i.v.) Zufallsvariablen $(Z_k)_{k \geqslant 1}$ in $\mathbb{R}^d$, die unabhängig von N sind, heißt

$$Y_t := \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geqslant 0$$

  zusammengesetzter Poisson-Prozess.

(iv) Setzen wir die beiden Prozesse aus (i) und (iii) zusammen und addieren noch einen linearen Drift erhalten wir sogenannte *Sprungdiffusionsprozesse*:

$$X_t = \gamma t + \Sigma^{1/2} B_t + Y_t, \quad t \geqslant 0,$$

mit einem Driftparameter $\gamma \in \mathbb{R}^d$, einer symmetrischen, positiv-semidefiniten Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und einem zusammengesetzen Poisson-Prozess Y in $\mathbb{R}^d$.

Ist X ein Lévy-Prozess, so können wir ihn für jedes $n \in \mathbb{N}$ in

$$X_t = Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$$

zerlegen mit den u.i.v. Zufallsvariablen

$$Y_k^{(n)} := X_{tk/n} - X_{t(k-1)/n}.$$

Die Randverteilungen eines Lévy-Prozesses erfüllen also folgende Eigenschaft:

Definition 1.3. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ heißt *unendlich teilbar*, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu^{(n)}$ existiert, sodass

$$\mu = \underbrace{\nu * \cdots * \nu}_{n\text{-mal}} =: \nu^{*n}$$

gilt. Eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}^d$ heißt *unendlich teilbar*, falls ihre Verteilung μ_X unendlich teilbar ist.

Wie wir bereits verwendet haben, ist eine Zufallsvariable X genau dann unendlich teilbar, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ u.i.v. Zufallsvariablen $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ existieren, sodass $X \stackrel{d}{=} Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$. Man kann umgekehrt zeigen, dass für jede unendlich teilbare Verteilung μ ein Lévy-Prozess X existiert mit $X_1 \sim \mu$. Wir haben also eine Bijektion zwischen der Menge der Lévy-Prozesse und der Menge der unendlich teilbaren Verteilungen [Sato, Korollar 11.6].

Lemma 1.4. *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit charakteristischer Funktion φ. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) μ ist unendlich teilbar.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt φ eine n-te Wurzel $\varphi^{1/n}$, die selbst wieder eine charakteristische Funktion ist.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition sowie $\mathcal{F}[\nu^{*n}] = (\mathcal{F}\nu)^n$ für die Fouriertransformation $\mathcal{F}\nu(u) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} \nu(\mathrm{d}x)$ eines endlichen Maßes ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d})$. $\square$

Übung 1.5. Beweisen Sie: Die Summe zweier unabhängiger unendlich teilbarer Zufallsvariablen ist wieder unendlich teilbar. Der schwache Grenzwert einer Folge unendlich teilbarer Verteilungen ist ebenfalls unendlich teilbar.

Das vorherige Lemma weist bereits darauf hin, dass die charakteristische Funktion ein hilfreiches Werkzeug für das Studium von unendlich teilbaren Verteilungen und damit auch von Lévy-Prozessen ist. Die charakteristische Funktionen der Randverteilungen von Lévy-Prozessen haben eine sehr einfache Struktur.

Bemerkung 1.6. Wir wiederholen aus der komplexen Analysis, dass für jede stetige Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(u) \neq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ existiert, sodass $\varphi(u) = e^{f(u)}, u \in \mathbb{R}^d$ (Stichwort distinguished logarthim, vgl. [Sato, Lemma 7.6]).

Satz 1.7. *Sei $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein Lévy-Prozess in $\mathbb{R}^d$. Dann existiert eine stetige Funktion $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, sodass*

$$\varphi_{X_t}(u) := \mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t\rangle}] = e^{t\psi(u)},$$

für alle $u \in \mathbb{R}^d$ und alle $t \geqslant 0$ gilt. ψ heißt charakteristischer Exponent.

Beweis. Wie im obigen Lemma gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_{X_1} = \varphi^n_{X_{1/n}}$ also $\varphi_{X_{1/n}} = \varphi_{X_1}^{1/n}$. Daher

$$\varphi_{X_{m/n}} = \varphi_{X_1}^{m/n} \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq 0.$$

Die stochastische Stetigkeit von $t \mapsto X_t$ impliziert die Konvergenz $X_s \to X_t$ in Verteilung für $s \to t$ und diese wiederum die punktweise Konvergenz $\varphi_{X_s}(u) \to \varphi_{X_t}(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^d$ und $s \to t$. Folglich ist die Abbildung $t \mapsto \varphi_{X_t}(u)$ stetig.

Sei nun $u \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Da $\varphi_{X_0}(u) = 1$ muss es aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto \varphi_{X_t}(u)$ ein kleines $t_0 \in \mathbb{Q}_+$ geben mit $0 \neq \varphi_{X_{t_0}}(u) = \varphi_{X_1}(u)^{t_0}$. Folglich ist $\varphi_{X_1}(u) \neq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^d$. Da charakteristische Funktionen immer stetig sind (dominierte Konvergenz), existiert nach Bemerkung 1.6 eine stetige Funktion $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_{X_1}(u) = e^{\psi(u)}$. Dann gilt $\varphi_{X_t}(u) = \varphi_{X_1}(u)^t$ für $t \in \mathbb{Q}_+$. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, folgt aus der Stetigkeit in t die Behauptung für alle $t \geqslant 0$. □

Beispiel 1.8.

(i) Betrachten wir den Diffusionsprozess $X = (X_t, t \geqslant 0)$ mit $X_t = \gamma t + \Sigma^{1/2} B_t$ für eine d-dimensionale Brownsche Bewegung $B = (B_t, t \geqslant 0)$, einen linearen Drift $\gamma \in \mathbb{R}^d$ und eine positiv-semidefinite, symmetrische (Kovarianz-)Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Dann ist $X_t \sim \mathcal{N}(t\cdot\gamma, t\cdot A)$ ein d-dimensionaler Gaußscher Zufallsvektor mit der charakteristischen Funktion

$$\begin{aligned}\varphi_{X_t}(u) := \mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t\rangle}] &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle u, tAu\rangle + i\langle t\gamma, u\rangle\Big)\\ &= \exp\Big(t\Big(-\frac{1}{2}\langle u, Au\rangle + i\langle \gamma, u\rangle\Big)\Big), \quad u \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

(ii) Die charakteristische Funktion von $N_t \sim Poiss(t\lambda)$ ist gegeben durch

$$\varphi_N(u) = \exp\big(t\lambda(e^{iu} - 1)\big), \quad u \in \mathbb{R}.$$

(iii) Sei $X_t := \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, t \geqslant 0$, ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, wobei $(Z_k)_{k\geqslant 1}$ u.i.v. Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^d$ mit Verteilung ρ und N ein unabhängiger Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ ist. Es gilt

$$\varphi_{X_t}(u) = \exp\Big(t\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\langle u, y\rangle} - 1)\lambda\rho(\mathrm{d}y)\Big), \qquad u \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Beweis. Wir schreiben die charakteristische Funktion von $Z_i \sim \rho$ als φ_Z. Durch Bedingen auf N_t erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi_{X_t}(u) = \mathbb{E}\big[e^{i\langle X_t, u\rangle}\big] &= \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{N_t}\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, Z_k\rangle}\big|N_t\big]\Big]\\ &= \mathbb{E}[\varphi_Z(u)^{N_t}] = e^{-\lambda t}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(t\lambda)^k}{k!}\varphi_Z(u)^k\\ &= e^{\lambda t(\varphi_Z(u)-1)} = \exp\Big(\lambda t\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\langle u, y\rangle} - 1)\rho(\mathrm{d}y)\Big).\end{aligned}$$ □

Das endliche Maß $\nu = \lambda\rho$ beschreibt die Sprungverteilung und -häufigkeit und wird *Lévy-Maß* genannt. Gleichung (1) ist ein Spezialfall der Lévy-Khintchine-Formel (siehe Kapitel 2.3).

Übung 1.9. Folgern Sie aus Satz 1.7, dass für jede unendlich teilbare Verteilung μ ein stochastischer Prozess $X = (X_t, t \geqslant 0)$ mit $X_1 \overset{d}{=} \mu$ existiert, der die Eigenschaften (i)-(iv) eines Lévy-Prozesses erfüllt.

Unter allen Lévy-Prozessen ist die Brownsche Bewegung mit Drift (und einer beliebige Kovarianzmatrix) der einzige stetige Prozess.

Satz 1.10. *Ist $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein stetiger Lévy-Prozess in $\mathbb{R}^d$, dann existiert ein eindeutiger Vektor $\gamma \in \mathbb{R}^d$ und eine eindeutige symmetrische, positiv-semidefinite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$, sodass für eine standard Brownsche Bewegung $B = (B_t, t \geqslant 0)$ gilt:*

$$X_t = \gamma t + \Sigma^{1/2} B_t \quad \textit{für alle } t \geqslant 0.$$

Beweis. Wir fixieren $0 \leqslant s < t$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $t_{n,k} := s + \frac{k}{n}(t-s), k = 0, \dots, n$, und zerlegen

$$\langle y, X_t - X_s\rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k} \quad \text{mit u.i.v.} \quad \xi_{n,k} := \langle y, X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}\rangle.$$

Wir wollen ein zentrales Grenzwertargument verwenden, um zu zeigen, dass $\langle y, X_t - X_s\rangle$ normal verteilt ist. Allerdings wissen wir a priori nicht, dass $\xi_{n,k}$ überhaupt endliche Momente besitzt.

Schritt 1: Da $t \mapsto X_t$ stetig ist, konvergiert $\max_{k=1,\dots,n} |\xi_{n,k}| \to 0$ f.s. für $n \to \infty$. Für $\overline{\xi}_{n,k} = \xi_{n,k}\mathbb{1}_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant 1\}}$ gilt dann die Äquivalenz

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k} \xrightarrow{d} \xi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi}_{n,k} \xrightarrow{d} \xi$$

für eine grenzverteilte Zufallsvariable $\xi = \langle y, X_t - X_s\rangle$. Außerdem folgt aus der fast sicheren Konvergenz auch $\max_{k=1,\dots,n} |\xi_{n,k}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ und damit für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\max_{k=1,\dots,n} |\xi_{n,k}| > \varepsilon\big) &= 1 - \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \mathbb{P}(|\xi_{n,k}| > \varepsilon)\big) \\
&= 1 - \big(1 - \mathbb{P}(|\xi_{n,1}| > \varepsilon)\big)^n \\
&= 1 - \exp\big(n \log(1 - \mathbb{P}(|\xi_{n,1}| > \varepsilon))\big) \\
&\geqslant 1 - \exp(-n\mathbb{P}(|\xi_{n,1}| > \varepsilon)).
\end{aligned}$$

Da die linke Seite gegen 0 konvergiert, muss auch $n\mathbb{P}(|\xi_{n,1}| > \varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|\xi_{n,k}| > \varepsilon) \to 0$ gelten.

Schritt 2: Wir folgern als nächstes, dass $c_n := \operatorname{Var}(\sum_{k=1}^{n} \overline{\xi}_{n,k})$ beschränkt ist. Gäbe es eine Teilfolge (c_{n_m}) mit $c_{n_m} \to \infty$ für $m \to \infty$, dann würde mit unabhängigen Kopien $\overline{\xi}'_{n,k}$ von $\overline{\xi}_{n,k}$

$$c_{n_m}^{-1/2} \sum_{k=1}^{n_m} (\overline{\xi}_{n_m,k} - \overline{\xi}'_{n_m,k}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,2) \tag{2}$$

nach dem zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller gelten, da die Lindeberg-Bedingung erfüllt ist (verwende Schritt 1):

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0: \quad & \lim_{m\to\infty} c_{n_m}^{-1} \sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{E}\big[(\overline{\xi}_{n_m,k} - \overline{\xi}'_{n_m,k})^2 \mathbb{1}_{\{|\overline{\xi}_{n_m,k} - \overline{\xi}'_{n_m,k}| > \varepsilon c_{n_m}^{1/2}\}}\big] \\
& \leqslant \lim_{m\to\infty} 4 c_{n_m}^{-1} \sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{P}(|\overline{\xi}_{n_m,k} - \overline{\xi}'_{n_m,k}| > \varepsilon c_{n_m}^{1/2}) = 0.
\end{aligned}$$

Da aber $\sum_{k=1}^{n_m} (\overline{\xi}_{n_m,k} - \overline{\xi}'_{n_m,k}) \xrightarrow{d} \xi + \xi'$ für eine unabhängige Kopie ξ' von ξ, muss $c_{n_m}^{-1/2} \sum_{k=1}^{n_m} (\overline{\xi}_{n_m,k} - \overline{\xi}_{n_m,k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ gelten, was (2) widerspricht.

Schritt 3: Da (c_n) beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(c_{n_m})_m$ mit Grenzwert $c \geqslant 0$. Für diese Teilfolge gilt durch erneutes Anwenden des zentralen Grenzwertsatzes unter der Lindeberg-Bedingung, dass

$$\sum_{k=1}^{n_m} \left(\overline{\xi}_{n_m,k} - \mathbb{E}[\overline{\xi}_{n_m,k}]\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,c).$$

In Kombination mit $\sum_{k=1}^{n_m} \overline{\xi}_{n_m,k} \xrightarrow{d} \xi$ ergibt sich aus dieser schwachen Konvergenz, dass auch $\sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{E}[\overline{\xi}_{n_m,k}]$ gegen ein $b \in \mathbb{R}$ konvergiert, woraus schließlich

$$\langle y, X_t - X_s \rangle = \xi \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(b,c)$$

folgt. Da $y \in \mathbb{R}^d$ beliebig war, impliziert der Cramér-Wold device, dass $X_t - X_s$ normalverteilt ist. Aus Satz 1.7 folgt, dass Drift und Kovarianz linear in t sind. Da X ein Lévy-Prozess mit stetigen Pfaden ist, muss also X eine Brownsche Bewegung mit Drift sein. □

Bemerkung 1.11. Auch die Klasse der zusammengesetzten Poisson-Prozesse hat ein Alleinstellungsmerkmal unter der Gesamtheit der Lévy-Prozesse. X ist nämlich genau dann ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, wenn X ein Lévy-Prozess mit stückweise stetigen Pfaden ist. Wir werden dies später aus der Lévy-Itô-Zerlegung folgern.

2 Charakterisierungen

Das Hauptziel dieses Kapitels werden zwei Charakterisierungen von Lévy-Prozessen sein. Einerseits liefert die *Lévy-Itô-Zerlegung* eine Darstellung jedes Lévy-Prozesses als Brownsche Bewegung plus Drift und Sprunganteil und andererseits gibt die *Lévy-Khinchine-Darstellung* eine explizite Formel für die charakteristische Funktion der Randverteilungen an. Bevor wir aber soweit kommen, müssen wir einen Rahmen entwickeln, der uns eine genauer Analyse des Sprungverhaltens von Lévy-Prozessen erlaubt.

2.1 Poisson-Zufallsmaße

Definition 2.1. Ein *Zufallsmaß* auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ ist eine Abbildung $M\colon \Omega \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$, sodass

(i) für jedes $A \in \mathcal{S}$ die Abbildung $M(A) : \omega \mapsto M(\omega, A)$ messbar ist und

(ii) für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $A \mapsto M(\omega, A)$ ein (signiertes) Maß ist.

Wir werden nun Zufallsmaße nutzen um die Sprünge eines Poisson-Prozesses N_t zu beschreiben. Sei also

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} S_k \leqslant t\}$$

für unabhängige $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen $(S_k)_{k \geqslant 1}$, wobei $\lambda > 0$ die Intensität das Poisson-Prozesses ist. Die Sprungzeiten/-stellen von N sind also $T_n := \sum_{k=1}^{n} S_k$ und wir können N_t auch via

$$N_t = \#\{n \geqslant 1 : T_n \in [0,t]\}$$

beschreiben. N_t zählt also die Sprünge im Intervall $[0,t]$. Dieses Zählverfahren liefert uns ein Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$:

Definition 2.2. Ist N ein Poisson-Prozess mit Sprungzeiten $(T_n)_{n \geqslant 1}$, so heißt

$$M(\omega, A) := \#\{n \geqslant 1 : T_n(\omega) \in A\}, \quad \text{für alle } \omega \in \Omega, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},$$

das *zu N assoziierte Sprungzufallsmaß*.

Lemma 2.3. *Ist N ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, so ist das zu N assoziierte Sprungzufallsmaß M tatsächlich ein Zufallsmaß auf $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$und es gilt $\mathbb{E}[M(A)] = \lambda|A|$, wobei $|A|$ das Lebesgue-Maß von A bezeichnet.*

Beweis. Aus der Darstellung $M(\omega, A) = \sum_{n \geqslant 1} \delta_{T_n(\omega)}(A)$ folgt, dass $M(\omega, \cdot)$ für jedes $\omega \in \Omega$ ein Maß ist. Anderseits ist für jedes feste $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ die Verknüfung $\mathbb{1}_A \circ T_n$ messbar, da T_n messbar ist, und somit auch $M(\cdot, A) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{1}_A \circ T_n$. Damit ist M als Zufallsmaß erkannt.

Es bleibt die Gleichheit $\mathbb{E}[M(A)] = \lambda|A|$ zu zeigen, wobei

$$\mathbb{E}[M(A)] = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(T_n \in A) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}^{T_n}(A)$$

ebenfalls ein Maß ist. Für alle Intervalle $(s, t]$ mit $0 \leqslant s < t$ gilt aufgrund der Eigenschaften des Poisson-Prozesses N

$$\mathbb{E}\big[M((s,t])\big] = \mathbb{E}\big[N_t - N_s\big] = \mathbb{E}[N_{t-s}] = \lambda(t-s) = \lambda|(s,t]|.$$

Somit gilt $\mathbb{E}[M(A)] = \lambda|A|$ auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$. Da die Folge $((0,n])_{n \geqslant 1}$ zusammen mit $\{0\}$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}_+$ ist mit $|(0,n]| = n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt die Gleichheit auf ganz $\mathbb{R}_+$. $\square$

Übung 2.4. Zeigen Sie, dass sich folgende Eigenschaften des Poisson-Prozesses auf M übertragen:

(i) Für jedes beschränkte $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ ist $M(A)$ eine $Poiss(\lambda|A|)$-verteilte Zufallsvariable.

(ii) Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ sind $M(A_1), \dots, M(A_n)$ unabhängig.

Der Poisson-Prozess kann wiederum über sein assoziertes Sprungzufallsmaß beschrieben werden:

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0,t]) = \int_{[0,t]} M(\omega, \mathrm{d}s).$$

Das Zufallsmaß $M(\omega, \mathrm{d}t)$ kann also als Ableitung von $t \mapsto N_t(\omega)$ verstanden werden. Da N eine wachsende Treppenfunktion ist, ist seine Ableitung (im schwachen Sinn) die Summe der Dirac-Maße in den Sprungstellen:

$$M = \sum_{n \geqslant 1} \delta_{T_n}.$$

Analog führen noch das zum kompensierten Poisson-Prozess $\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t, t \geqslant 0$ assoziierte Zufallsmaß

$$\widetilde{M}(\omega, A) := M(\omega, A) - \lambda|A|$$

ein. Für $\widetilde{M}$ gilt $\mathbb{E}[\widetilde{M}(A)] = 0$ und $\mathrm{Var}(\widetilde{M}(A)) = \lambda|A|$. Man beachte, dass $\widetilde{M}$ auch negative Werte annehmen kann, es sich also um ein signiertes Maß handelt. $\widetilde{M}$ ist ein *kompensiertes Zufallsmaß*, die zur Zentrierung nötige Funktion $A \mapsto \lambda|A|$ heißt *Kompensator*.

Bisher haben wir uns ein Zufallszählmaß auf $\mathbb{R}_+$ angesehen. Diese Konstruktion kann auf allgemeinere Räume erweitert werden:

Definition 2.5. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ und μ ein Radon-Maß auf $(E, \mathscr{B}_E)$ (d.h. $\mu(A) < \infty$ für alle beschränkten $A \in \mathscr{B}_E$). Ein $\mathbb{N}_0$-wertiges Zufallsmaß auf E

$$M \colon \Omega \times \mathscr{B}_E \to \mathbb{N}_0, \quad (\omega, A) \mapsto M(\omega, A)$$

heißt *Poisson-Zufallsmaß mit Intensität μ*, falls gilt:

(i) Für $\mathbb{P}$-f.a. $\omega \in \Omega$ ist $M(\omega, \cdot)$ ein $\mathbb{N}_0$-wertiges Radon-Maß.

(ii) Für alle beschränkten $A \in \mathscr{B}_E$ ist $M(\cdot, A) = M(A)$ eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\mu(A)$.

(iii) Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}_E$ sind $M(A_1), \dots, M(A_n)$ unabhängig.

Bemerkung 2.6. Poisson-Zufallsmaße $M \colon \Omega \to \mathcal{M}_E$ können als Zufallsvariablen auf dem Raum $\mathcal{M}_E$ der Radon-Maße auf $E \subseteq \mathbb{R}^d$ verstanden werden, welchen wir mir der σ-Algebra $\sigma(\pi_A : A \in \mathscr{B}_E$ beschränkt) versehen, wobei $\pi_A \colon \mathcal{M}_E \to \mathbb{R}_+, \mu \mapsto \mu(A)$. Entsprechend garantiert (i), dass M in den richtigen Raum abbildet und (ii), dass M messbar ist. Die Verteilung von M wird damit durch die endlichdimensionalen Verteilungen $(M(A_1), \dots, M(A_n)), n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}_E$, eindeutig beschrieben (Kolmogorovs Erweiterungssatz). Aufgrund der Additivität von Maßen, genügt es dabei paarweise disjunkte $(A_i)_{i=1,\dots,n}, n \in \mathbb{N}$, zu betrachten. Eigenschaften (ii) und (iii) legen somit die Verteilung der Zufallsvariable $M \colon \Omega \to \mathcal{M}_E$ eindeutig fest.

Lemma 2.7. *Für $n \geqslant 1$ seien M_n unabhängige Poisson-Zufallsmaße auf $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mit Intensität μ_n. Ist $\mu = \sum_{n \geqslant 1} \mu_n$ ein Radon-Maß, dann ist $M := \sum_n M_n$ ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität μ.*

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften nach:
(ii) Sei $A \in \mathscr{B}_E$ beschränkt, dann ist $M(A) = \sum_n M_n(A)$ die Summe unabhängiger $Poiss(\mu_n(A))$-verteilter Zufallsvariablen und damit $Poiss(\sum_n \mu_n(A))$ verteilt.
(iii) Für paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}_E$ sind $(M_n(A_i))_{n,i}$ unabhängig und damit auch $M(A_i) = \sum_n M_n(A_i), i \geqslant 1$.
(i) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $M(\omega, \cdot) := \sum_n M_n(\omega, \cdot)$ ein Maß und wegen (ii) gilt für jedes beschränkte $A \in \mathscr{B}_E$, dass $M(\cdot, A) \sim Poiss(\mu(A))$ also ist $M(\cdot, A)$ f.s. endlich. Hieraus folgt bereits, dass $M(\omega, \cdot)$ für f.a. ω ein Radon-Maß ist (Übung ☑). □

Satz 2.8. *Für jedes Radon-Maß μ auf einem messbaren Raum $(E, \mathscr{B}_E)$ mit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ existiert ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität μ.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $\mu(E) < \infty$ und konstruieren M explizit: Seien $(X_n)_{n \geqslant 1}$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$. Für eine $Poiss(\mu(E))$-verteilte Zufallsvariable $M(E)$, die unabhängig von $(X_n)_{n \geqslant 1}$ ist, definieren wir

$$M(A) = \sum_{n=1}^{M(E)} \mathbb{1}_A(X_n) = \sum_{n=1}^{M(E)} \delta_{X_n}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathscr{B}_E.$$

Man prüft nun leicht nach, dass M ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität μ ist.

Im Fall $\mu(E) = \infty$ existiert eine Ausschöpfung $E = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$ mit paarweise disjunkten $(E_i)_{i \geqslant 1}$ und $\mu(E_i) < \infty$ (da μ ein Radon-Maß ist). Dann können wir unabhängige $(M_i)_{i \geqslant 1}$ konstruieren, sodass für jedes M_i ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität $\mu(\cdot \cap E_i)$ ist. Nach Lemma 2.7 ist $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ ein Poisson-Zufallsmaß auf E mit Intensität $\mu = \sum_n \mu(\cdot \cap E_i)$. □

Wie wir aus diesem konstruktiven Beweis sehen, kann jedes Poisson-Zufallsmaß als Zählmaß für eine Folge von Punkten dargestellt werden: Es existieren Zufallsvariablen $(X_n)_{n \geqslant 1}$ und ein unabhängiges $M(E) \sim Poiss(\mu(E))$, sodass

$$M(A) = \sum_{n=1}^{M(E)} \mathbb{1}_A(X_n) = \sum_{n=1}^{M(E)} \delta_{X_n}(A).$$

Aus diesem Grund heißen Poisson-Zufallsmaße auch *Poisson-Punktprozesse* (wobei das Wort "Prozess" dabei etwas irreführend ist, da hier keine Zeitvariable auftaucht). Gilt $\mu(E) < \infty$, dann können die $(X_n)_{n \geqslant 1}$ als unabhängige $\frac{\mu}{\mu(E)}$-verteilte Zufallsvariablen gewählt werden.

Satz 2.9 (Exponentialformel für Poisson-Zufallsmaße). *Ist M ein Poisson-Zufallsmaß auf $(E, \mathscr{B}_E)$ mit Intensität μ und sei $A \in \mathscr{B}_E$ mit $\mu(A) < \infty$, dann gilt für jede messbare Funktion $f \colon A \to \mathbb{C}$ mit $\int_A |e^{f(x)}| \mathrm{d}\mu(x) < \infty$:*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\int_A f(x) M(\mathrm{d}x)\Big)\Big] = \exp\Big(\int_A (e^{f(x)} - 1)\mu(\mathrm{d}x)\Big).$$

Beweis. Für jedes $A \in \mathscr{B}_E$ ist das Zufallsmaß $M|_A$ (definiert durch $M|_A(B) := M(A \cap B)$ für alle $B \in \mathscr{B}_E$) wieder ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität $\mu|_A$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass $A = E$ und $\mu(E) < \infty$. Sei f zunächst reell, sodass $\exp\Big(\int_A f(x)M(\mathrm{d}x)\Big)$ eine nichtnegative Zufallsvariable ist und obiger Erwartungswert wohldefiniert. Mit der Darstellung $M = \sum_{n\geqslant 1}\delta_{X_n}$ für unabhängige $\frac{\mu}{\mu(E)}$-verteilte Zufallsvariablen gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\int_E f(x)M(\mathrm{d}x)\Big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sum_{n=1}^{M(E)} f(X_n)\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\prod_{n=1}^{M(E)} \mathbb{E}\big[e^{f(X_n)}|M(E)\big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[e^{f(X_1)}\big]^{M(E)}\Big] \\
&= e^{-\mu(E)}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\mu(E)^k}{k!}\Big(\int_E e^{f(x)}\frac{\mu(\mathrm{d}x)}{\mu(E)}\Big)^k \\
&= \exp\Big(\int_E \big(e^{f(x)}-1\big)\mu(\mathrm{d}x)\Big).
\end{aligned}$$

Da für $\mathbb{C}$-wertige f $|\exp\Big(\int_E f(x)M(\mathrm{d}x)\Big)| = \exp\Big(\int_E \operatorname{Re} f(x)M(\mathrm{d}x)\Big)$ gilt, folgt die Behauptung mit der selben Rechnung. □

Übung 2.10. Sei M ein Poisson-Zufallsmaß auf $(E, \mathscr{B}_E)$ mit endlichem Intensitätsmaß μ. Folgern Sie aus Satz 2.9, dass für jedes $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ gilt:

$$\mathbb{E}\Big[\int_E f\mathrm{d}M\Big] = \int_E f\mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \operatorname{Var}\Big(\int_E f\mathrm{d}M\Big) = \int_E f^2\mathrm{d}\mu.$$

Definition 2.11. Für jedes Poisson-Zufallsmaß M mit Intensität μ auf $(E, \mathscr{B}_E)$ mit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das *kompensierte Poisson-Zufallsmaß* $\widetilde{M}$ definiert via

$$\widetilde{M}(\omega, A) = M(\omega, A) - \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathscr{B}_E, \omega \in \Omega.$$

Aus der Definition folgt direkt, dass für disjunkte, beschränkte Menge $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}_E$ die Zufallsvariablen $\widetilde{M}(A_1), \dots, \widetilde{M}(A_n)$ unabhängig sind und

$$\mathbb{E}[\widetilde{M}(A_i)] = 0, \quad \operatorname{Var}(\widetilde{M}(A_i)) = \mu(A_i)$$

gilt.

Wir werden nun aus einem Poisson-Zufallsmaß M auf $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit Intensität μ einen Sprungprozess konstruieren. Wie wir gesehen haben ist M ein Zählprozess mit

$$M = \sum_{n\geqslant 1}\delta_{(T_n, Y_n)}$$

für Zufallsvariablen $(T_n, Y_n)_{n\geqslant 1}$. Intuitiv beschreibt (T_n, Y_n) einen Sprung der Höhe (oder allgemeiner eine Beobachtung) Y_n zur Zeit T_n. Da wir die erste Koordinate als Zeit interpretieren wollen, versehen wir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

Definition 2.12. Ein Poisson-Zufallsmaß M auf $E = [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit der Darstellung $M = \sum_{n\geqslant 1}\delta_{(T_n, Y_n)}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ heißt *adaptiert*, falls

(i) $(T_n)_{n\geqslant 1}$ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sind, d.h. $\{T_n \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in [0, T]$ und $n \geqslant 1$,

(ii) Y_n ist $\mathcal{F}_{T_n}$-messbar.

Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $M(\omega, \cdot)$ ein Maß auf E, sodass wir pfadweise (ω-weise) für jede Funktion $f \in L^1(\mu)$ ein Integral konstruieren können.

Lemma 2.13. *Sei M ein Poisson-Zufallsmaß auf $E = [0,T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit Intensität μ. Dann ist für jedes $f \in L^1(E, \mathscr{B}_E, \mu)$*

$$M(f)\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}M(\omega, \cdot)$$

eine wohldefinierte Zufallsvariable mit

$$\mathbb{E}[M(f)] = \int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Maßtheoretische Induktion. □

Für $f \in L^1(\mu)$ erhalten wir nun einen Prozess durch Integration bis zum Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned} X_t &:= M(f \mathbb{1}_{[0,t]\times\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}M = \sum_{n\geqslant 1: T_n \leqslant t} f(T_n, Y_n). \end{aligned}$$

Dieser Prozess $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ist adaptiert (Übung ☑) und aus der letzten Darstellung sehen wir, dass X ein stückweise konstanter Sprungprozess ist. Wir können analog für das kompensierte Poisson-Zufallsmaß vorgehen. Der resultierende Prozess heißt *kompensiertes Integral* und ist ein Martingal:

Satz 2.14. *Es sei M ein adaptiertes Poisson-Zufallsmaß auf $E = [0,T] \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit Intensität μ und $\widetilde{M} = M - \mu$ das zugehörige kompensierte Poisson-Maß. Dann ist für jedes $f \in L^1(E, \mathscr{B}_E, \mu)$ der Prozess $Y = (Y_t, t \geqslant 0)$ mit*

$$Y_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}\widetilde{M} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}M - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}\mu, \quad t \geqslant 0,$$

ein Martingal.

Übung 2.15. Beweisen Sie Satz 2.14.

2.2 Lévy-Itô-Zerlegung

Ist $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$-adaptierter càdlàg-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$, dann ist für jedes $t > 0$ der Grenzwert $X_{t-} = \lim_{h\downarrow 0} X_{t-h}$ wohldefiniert. X hat eine Unstetigkeit bei t, falls

$$\Delta X_t := X_t - X_{t-} \neq 0.$$

Man beachte, dass X höchstens abzählbar viele Sprünge besitzt, d.h. $\{t \geqslant 0, \Delta X_t \neq 0\}$ ist abzählbar.

Übung 2.16. Ist $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ eine càdlàg-Funktion, dann besitzt sie höchstens abzählbar viele Sprünge. Für jedes $\varepsilon > 0$ besitzt f nur endlich viele Sprünge (mit Betrag) größer als ε.

Wir bezeichnen die geordneten Elemente der Menge $\{t \geqslant 0, \Delta X_t \neq 0\}$ mit $(T_n)_{n\geqslant 1}$, also genau die Sprungzeiten von X. Insbesondere sind T_n Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Die "Sprunghöhen" sind dann durch $Y_n := X_{T_n} - X_{T_n-} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gegeben und $\mathcal{F}_{T_n}$-messbar. Die Folge $(T_n, Y_n)_{n\geqslant 1}$ beschreibt also die Sprünge von X vollständig.

Definition 2.17. Ist $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein càdlàg-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$, Unstetigkeitsstellen $(T_n)_{n\geqslant 1}$ und $Y_n := X_{T_n} - X_{T_n-} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, n \geqslant 1$. Dann heißt das Zufallsmaß J_X auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ mit

$$\begin{aligned} J_X(\omega, A) &= \sum_{n\geqslant 1} \delta_{(T_n(\omega), Y_n(\omega))}(A) \\ &= \#\big\{(t, \Delta X_t(\omega)) \in A\big\}, \quad \omega \in \Omega, A \in \mathscr{B}_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d}, \end{aligned}$$

das *Sprungmaß von X*. Ist X adaptiert bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, dann ist auch J_X adaptiert.

Für jedes $t \geqslant 0$ und $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ gibt also $J_X([0,t] \times A)$ intuitiv die Anzahl der Sprünge von X zwischen 0 und t, deren Amplitude in A liegt, an.

Satz 2.18. *Ist $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ und Sprungverteilung ρ, so ist das Sprungmaß J_X von X ein Poisson-Zufallsmaß auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\mu(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x) = \mathrm{d}t\nu(\mathrm{d}x)$ für das (Lévy-)Maß $\nu = \lambda\rho$.*

Beweis. X besitzt die Darstellung $X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$ für einen Poisson-Prozess N mit Intensität λ und davon unabhängigen Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \geqslant 1} \overset{u.i.v.}{\sim} \rho$. Wir weisen die Eigenschaften eines Poisson-Zufallsmaßes nach:

(i) Nach Definition ist $J_X(\omega, \cdot)$ ein $\mathbb{N}_0$-wertiges Maß. Ist $A \in \mathscr{B}_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d}$ eine beschränkte Menge, dann gibt es ein $T > 0$, sodass $A \subseteq [0,T] \times \mathbb{R}^d$. Da $N_T(\omega) < \infty$, $X_t(\omega)$ also nur endlich oft in $[0,T]$ springt, ist $J_X(\omega, A) < \infty$ und $J_X(\omega, \cdot)$ ein Radon-Maß.

(ii) Wir weisen nun $J_X(A) \sim \mathit{Poiss}(\mu(A))$ für $A \in \mathscr{B}_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^d}$ nach. Hierfür genügt es $A = (s,t] \times B$ mit $0 \leqslant s < t$ und $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ zu betrachten (vgl. Übung 2.4). Dann gilt

$$J_X((s,t] \times B) = \sum_{n=N_s+1}^{N_t} \mathbb{1}_B(Y_n).$$

Nun gilt $\mathbb{1}_A(Y_n) \overset{u.i.v.}{\sim} \mathit{Bernoulli}(\rho(A))$ und damit für $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[e^{iuJ_X((s,t]\times B)}\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[e^{iuJ_X((s,t]\times B)}\big|N\big]\big] \\
&= \mathbb{E}\big[(e^{iu}\rho(A) + 1 - \rho(A))^{N_t - N_s}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[((e^{iu} - 1)\rho(A) + 1)^{N_{t-s}}\big] = \exp\big(\lambda(t-s)(e^{iu} - 1)\rho(A)\big).
\end{aligned}$$

Folglich ist $J_X((s,t] \times B)$ $\mathit{Poiss}(\lambda(t-s)\rho(A))$ verteilt.

(iii) Es bleibt die Unabhängigkeit für disjunkte Mengen zu zeigen. Wir betrachten wieder Rechteckmengen $A_k := I_k \times B_k$ mit $I_k = (s_k, t_k], 0 \leqslant s_k < t_k$, und $B_k \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ für $k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Für $k \neq l$ sind A_k und A_l sind genau dann disjunkt, wenn I_k und I_l oder B_k und B_l disjunkt sind. Durch eventuelle weitere Zerlegung können wir annehmen, dass je zwei Zeitintervalle I_k und I_l für $k \neq l$ entweder gleich oder disjunkt sind. Sind sie disjunkt folgt die Unabhängigkeit sofort aus der Unabhängigkeit der Inkremente von X. Damit bleibt die Unabhängigkeit von $J_X((s,t] \times B_k), k = 1, \ldots, n$, für paarweise disjunkte $(B_k)_{k=1,\ldots,n}$ und $0 \leqslant s < t$ zu zeigen.

Wir betrachten wieder die charakteristische Funktion des Vektors $(J_X((s,t] \times B_k))_{k=1,\ldots,n}$. Für $u \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\big\langle u, \big(J_X((s,t] \times B_k)\big)_{k=1,\ldots,n}\big\rangle = \sum_{l=N_s+1}^{N_t} \xi_l \quad \text{mit} \quad \xi_l = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbb{1}_{B_k}(Y_l).$$

Die Zufallsvariablen ξ_l sind u.i.v. und nehmen den Wert u_k mit Wahrscheinlichkeit $\rho(B_k)$ an, $k = 1, \ldots, n$, sowie den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - \sum_{k=1}^{n} \rho(B_k)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\exp\big(i\langle u, (J_X((s,t] \times B_k))_{k=1,\ldots,n}\rangle\big)\big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} \rho(B_k)(e^{iu_k} - 1)\Big)^{N_t - N_s}\Big] \\
&= \exp\Big(\lambda(t-s)\sum_{k=1}^{n} \rho(B_k)(e^{iu_k} - 1)\Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[e^{iu_k J_X((s,t]\times B_k)}\big],
\end{aligned}$$

womit die Unabhängigkeit gezeigt ist. □

Übung 2.19. Zeigen Sie, dass für jedes endliche Lévy-Maß ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d})$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess existiert. Verwenden Sie die Konstruktion

$$X_t := \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} x J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

mit Poisson-Zufallsmaß J_X auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $\mu(\mathrm{d}t \times \mathrm{d}x) = \mathrm{d}t\nu(\mathrm{d}x)$. Wenden Sie Satz 2.9 an.

Das Lévy-Maß ν kennen wir bereits von zusammengesetzten Poisson-Prozessen (Beispiel 1.8(iii)) und ist gegeben durch die Sprungverteilung gewichtet mit der Sprungintensität. Satz 2.18 erlaubt eine andere und allgemeinere Interpretation von ν als die erwartete Anzahl der Sprünge in einer Zeiteinheit. Diese Interpretation überträgt sich direkt auf alle Lévy-Prozesse.

Definition 2.20. Ist $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Lévy-Prozess, dann heißt das Maß ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d})$ gegeben durch $\nu(\{0\}) = 0$ und

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \mathbb{E}[J_X([0,1] \times A)] \\ &= \mathbb{E}\big[\#\big\{t \in [0,1] : \Delta X_t(\omega) \neq 0, \Delta X_t \in A\big\}\big], \quad A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d},\end{aligned}$$

Lévy-Maß von X.

Bemerkung 2.21. Ist ν das Lévy-Maß eines Lévy-Prozesses X, so ist $\nu(A)$ endlich für jede kompakte Menge A mit $0 \notin A$. Würde das nicht gelten, gäbe es auf $[0,T]$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$ eine unendliche Anzahl von Sprüngen größer als ε, was der càdlàg-Eigenschaft widerspricht. ν ist also tatsächlich ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, aber nicht notwendig endlich, da es in 0 eine Singularität haben kann: X kann unendlich viele kleine Sprünge auf $[0,T]$ haben. In diesem Fall sprechen wir von einem Lévy-Prozess mit *unendlicher Sprungintensität*.

Mit Satz 2.18 finden wir für einen zusammengesetzten Poisson-Prozess $X^0 = (X_t^0, t \geqslant 0)$ die Darstellung

$$X_t^0 = \sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s^0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x\, J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \quad t \geqslant 0,$$

(beachte, dass $\Delta X_s^0 = 0$ bis auf endlich viele s, so dass obige Summe wohldefiniert ist). Ist $(\gamma t + \Sigma^{1/2} W_t)_{t\geqslant 0}$ eine Brownsche Bewegung mit (deterministischem) Drift und unabhängig von X^0, so definiert $X_t = X_t^0 + \gamma t + \Sigma^{1/2} W_t$ wieder einen Lévy-Prozess, der Form

$$X_t = \Sigma^{1/2} W_t + \gamma t + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} x\, J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \quad t \geqslant 0.$$

Wir haben damit bereits einen Spezialfall der Lévy-Itô-Darstellung für Sprungdiffusionen gefunden. Wir werden nun die Frage beantworten, ob wir für jeden Lévy-Prozess X eine solche Darstellung finden. Hat X unendliche Sprungintensität, so wird die Summe über die Sprünge $\sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s^0$ eine unendliche Reihe. Deren Konvergenz impliziert eine Bedingung an das Lévy-Maß.

Satz 2.22 (Lévy-Itô-Zerlegung)**.** *Es sei $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein Lévy-Prozess im $\mathbb{R}^d$ und ν sein Lévy-Maß. Dann gilt*

(i) ν ist ein Radon-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{3}$$

(ii) Das Sprungmaß J_X von X ist ein Poisson-Zufallsmaß auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit Intensität $\mathrm{d}t\nu(\mathrm{d}x)$.

(iii) *Es existiert ein Vektor $\gamma \in \mathbb{R}^d$ und eine positiv-semidefinite Matrix $\Sigma > 0$, so dass für eine standard Brownsche Bewegung $B = (B_t, t \geqslant 0)$ folgende Zerlegung gilt*

$$X_t = \gamma t + \Sigma^{1/2} B_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \widetilde{X}_t^\varepsilon, \quad \textit{wobei} \tag{4}$$

$$X_t^l = \int_0^t \int_{|x|>1} x J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

$$\widetilde{X}_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} x \widetilde{J}_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \int_0^t \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} x\big(J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) - \mathrm{d}s\nu(\mathrm{d}x)\big).$$

Die Summanden in (4) sind unabhängig und die Konvergenz im letzter Term ist f.s. und gleichmäßig in $t \in [0, T]$.

(iv) *Das Tripel (Σ, γ, ν) ist eindeutig durch X bestimmt.*

Diese eindeutige Beschreibung von Lévy-Prozessen führt auf folgende Definition:

Definition 2.23. Ist X ein Lévy-Prozess mit der Darstellung (4) für eine symmetrische, positiv-semidefinite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$, einen Vektor $\gamma \in \mathbb{R}^d$ und ein Lévy-Maß ν auf $\mathbb{R}^d$, dann heißt (Σ, γ, ν) charakteristisches Tripel.

Bemerkung 2.24.

(i) Eine äquivalente und häufig verwendete Integrierbarkeitsbedingung an das Lévy-Maß ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|y|^2}{|y|^2+1} \nu(\mathrm{d}y) < \infty.$$

(ii) Aus der Lévy-Itô-Zerlegung sehen wir nochmal, dass jeder stetige Lévy-Prozess von der Form $X_t^c := \gamma t + \Sigma^{1/2} B_t$.

(iii) Die beiden hinteren Terme in (4) beschreiben das Sprungverhalten von X. Nur die großen Sprünge enthaltend, ist X^l ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit f.s. endlich vielen Sprüngen. Die Schwelle $|x| \geqslant 1$ dabei beliebig, da auch

$$X_t^\varepsilon = \int_0^t \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} x\big(J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \sum_{s:\varepsilon<|\Delta X_s|\leqslant 1} \Delta X_s$$

ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Insbesondere die Integrierbarkeitsbedingung (3) zeigt, dass X unendlich viele kleine Sprünge enthalten kann, sodass wir nicht einfach den Grenzwert von X^ε für $\varepsilon \downarrow 0$ betrachten können. Stattdessen betrachten wir die kompensierten zusammengesetzten Poisson-Prozesse und verwenden ein Martingalargument.

(iv) Die Lévy-Itô-Zerlegung zeigt, dass jeder Lévy-Prozess die Kombination einer Brownschen Bewegung mit Drift mit einer möglicherweise unendliche Summe von unabhängigen Poisson-Prozessen ($X^{\varepsilon_{n+1}} - X^{\varepsilon_n}$ für eine Folge $(\varepsilon_n) \downarrow 0$) ist. Dies erlaubt die (beliebig genaue) Approximation von Lévy-Prozessen durch Sprungdiffusionen.

Bevor wir die Lévy-Itô-Zerlegung beweisen können, benötigen wir noch folgendes Hilfsresultat:

Lemma 2.25. *Es sei $(X, Y) = ((X_t, Y_t), t \geqslant 0)$ ein Lévy-Prozess. Wenn Y ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist und X und Y nie zusammen springen, dann sind X und Y unabhängig.*

Beweis. Beachte, dass X und Y ebenfalls Lévy-Prozesse sind. Weiterhin können wir anehmen, dass Y nur Sprünge beschränkter Größe hat (anderfalls betrachte (X, Y') mit $Y' := \tan^{-1}(Y)$). Die Unabhängigkeit von X und Y folgt aus der Unabhängigkeit von $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ und $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ für eine beliebige Folge von Zeitpunkten $0 \leqslant t_1 < \dots < t_n$. Aufgrund der unabhängigen Inkrement genügt es, die Unabhängigkeit von $(X_t - X_s)$ und $(Y_t - Y_s)$ für Zeitpunkte $0 \leqslant s < t$ nachzuweisen. O.B.d.A setzen wir $s = 0$ und $t = 1$.

Für fixierte $u, v \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir die Martingale

$$M_t = \frac{e^{i\langle u, X_t\rangle}}{\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t\rangle}]}, \quad N_t = \frac{e^{i\langle u, Y_t\rangle}}{\mathbb{E}[e^{i\langle u, Y_t\rangle}]}.$$

Tatsächlich gilt mit dem charakteristischen Exponenten ψ aus Satz 1.7

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &= e^{-t\psi(u)}\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s\rangle + i\langle u, X_s\rangle}|\mathcal{F}_s] \\ &= e^{-t\psi(u)}\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s\rangle}]e^{i\langle u, X_s\rangle} \\ &= e^{-t}\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_{t-s}\rangle}]e^{i\langle u, X_s\rangle} = M_s, \quad 0 \leqslant s < t,\end{aligned}$$

und analog für N_t. Da Y ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit beschränktem Lévy-Maß ist, ist die charakteristische Funktion $t \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle u, Y_t\rangle}]$ aus Beispiel 1.8 bekannt und in t differenzierbar. Damit ist $t \mapsto N_t$ schwach differenzierbar und wir können für alle $0 \leqslant s < t \leqslant 1$

$$N_s - N_t = \int_s^t \mathrm{d}N_r$$

schreiben für ein auf $[0, 1]$ endliches Zufallsmaß $\mathrm{d}N_r$. Aufgrund der Martingaleigenschaft erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_1 N_1] - 1 &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}(M_{k/n} - M_{(k-1)/n})(N_{k/n} - N_{(k-1)/n})\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^1 \big(M_{\lfloor sn+1\rfloor/n} - M_{\lfloor sn\rfloor/n}\big)\mathrm{d}N_s\Big].\end{aligned}$$

Da $|M_t(\omega)| \leqslant |\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, M_t\rangle}\big]|^{-1}$ für alle $\omega \in \Omega, t \in [0, 1]$ und weil die charakteristische Funktion von M_t für festes u und alle $t \in [0, 1]$ gleichmäßig nach unten beschränkt ist (Satz 1.7) ist M auf $[0, 1]$ gleichmäßig beschränkt und dominierte Konvergenz liefert

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^1 \big(M_{\lfloor sn+1\rfloor/n} - M_{\lfloor sn\rfloor/n}\big)\mathrm{d}N_r\Big] \to \mathbb{E}\Big[\int_0^1 \Delta M_s \mathrm{d}N_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big] = 0.$$

Damit gilt $\mathbb{E}[M_1 N_1] = 1$ und

$$\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_1\rangle + i\langle v, Y_1\rangle}\big] = \mathbb{E}[e^{i\langle u, X_1\rangle}]\mathbb{E}[e^{i\langle v, y_1\rangle}]$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$. □

Damit können wir nun unser Hauptresultat beweisen.

Beweis von Satz 2.22.

(i) In Bemerkung 2.21 haben wir bereits gesehen, dass aus der càdlàg-Eigenschaft von X bereits $\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \nu(\mathrm{d}x) < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$ folgt. Es bleibt

$$\int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \nu(\mathrm{d}x) < \infty \tag{5}$$

zu zeigen. Wir zerlegen den Prozess X in den zusammengesetzten Poisson-Prozess

$$Y_t^\varepsilon = \sum_{s:|\Delta X_s|\geqslant\varepsilon} \Delta X_s = \int_0^t \int_{\varepsilon\leqslant|x|} x J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

und den Rest $R_t^\varepsilon = X_t - Y_t^\varepsilon$. Dann ist auch $(Y^\varepsilon, R^\varepsilon)$ ein Lévy-Prozess, wobei Y^ε das Lévy-Maß $\nu|_{B_\varepsilon^c}$ mit $B_\varepsilon^c := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \geqslant \varepsilon\}$ hat. Nach Lemma 2.25 sind Y^ε und R^ε unabhängig. Es folgt

$$\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_t\rangle}\big] = \mathbb{E}\big[e^{i\langle u, Y_t^\varepsilon\rangle}\big]\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, R_t^\varepsilon\rangle}\big], \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

Da $|\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_t\rangle}\big]| > C$ für eine Konstante $C > 0$ und alle $u \in \mathbb{R}^d$ mit $|u| \leqslant 1$ nach Satz 1.7, folgt aus Exponentialformel (Satz 2.9):

$$\begin{aligned} C \leqslant \big|\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, Y_t^\varepsilon\rangle}\big]\big| &= \Big|\exp\Big(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}x)\Big)\Big| \\ &= \exp\Big(\operatorname{Re}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}x)\Big) \\ &= \exp\Big(\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \big(\cos(\langle u,x\rangle) - 1\big)\nu(\mathrm{d}x)\Big). \end{aligned}$$

Da C unabhängig von ε ist erhalten wir für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_{|x|\leqslant 1} \langle u,x\rangle^2 \nu(\mathrm{d}x) \leqslant C' \int_{\mathbb{R}^d} \big(1 - \cos(\langle u,x\rangle)\big)\nu(\mathrm{d}x) \leqslant C' \log C^{-1} < \infty.$$

Da $u \in \mathbb{R}^d$ beliebig war, folgt (5).

(ii) Wir konstruieren das Sprungmaß J_X auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Für eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \downarrow 0$ mit $\varepsilon_1 = 1$ definieren wir

$$\begin{aligned} J_X^n(\omega, \cdot) &:= \sum_{s:|\Delta X_s(\omega)|\in(\varepsilon_{n+1},\varepsilon_n]} \delta_{\{s,\Delta X_s(\omega)\}}, n \geqslant 1, \\ J_X^0(\omega, \cdot) &:= \sum_{s:|\Delta X_s(\omega)|>1} \delta_{\{s,\Delta X_s(\omega)\}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Da $t \mapsto X_t$ càdlàg ist, ist für jedes $n > 0$ die Menge $\{t : |\Delta X_t| > \varepsilon_{n+1}\}$ endlich und J_X^n ist nach Satz 2.18 ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität $\mathrm{d}s\nu^n(\mathrm{d}x)$, wobei

$$\nu^0(A) = \nu\big(A \cap \{x \in \mathbb{R}^d : |x| > 1\}\big) \quad \text{und} \quad \nu^n(A) = \nu(A \cap \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in (\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n]\})$$

für $n \geqslant 1$, $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$. Nach Konstruktion und σ-Addititivät gilt $\nu = \sum_{n\geqslant 0} \nu^n$. Folglich ist

$$J_X(\omega, \cdot) := \sum_{n\geqslant 0} J_X^n(\omega, \cdot) = \sum_s \delta_{\{s,\Delta X_s\}}$$

ein Poisson-Zufallsmaß mit Intensität $\mathrm{d}s\nu(\mathrm{d}x)$ nach Lemma 2.7.

(iii) Wir untersuchen die Konvergenz von $\widetilde{X}^\varepsilon$. Für eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \downarrow 0$ mit $\varepsilon_1 = 1$ definieren wir die kompensierten zusammengesetzt Poisson-verteilten Zufallsvariablen

$$Z_n = \widetilde{X}_t^{\varepsilon_{n+1}} - \widetilde{X}_t^{\varepsilon_n} = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} x\widetilde{J}_X^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

mit Intensität $t\nu^n$. Diese sind zentriert und es gilt

$$\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Var}(Z_n) = t \sum_{n\geqslant 1} \int_{|x|\in(\varepsilon_{n+1},\varepsilon_n]} |x|^2 \nu(\mathrm{d}x) = t \int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \nu(\mathrm{d}x) < \infty \tag{7}$$

dank (5). Zudem sind (Z_n) unabhängig, da $J_X|_{[0,t]\times\{|x|\geqslant\varepsilon\}}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein Poisson-Zufallsmaß ist und die Intervalle $[\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n)$ disjunkt sind. Es folgt, dass für jedes $t \in [0,1]$ die Reihe $\widetilde{X}_t^{\varepsilon_{N+1}} = \sum_{n=1}^N Z_n$ in L^2 und f.s. gegen ein $\widetilde{X}_t^0$ konvergiert. Da $(\widetilde{X}^{\varepsilon_{N+1}})_N$ Martingale (bzgl.

der vervollständigten natürlichen Filtration von X) sind (Satz (2.14)), ist auch $\widetilde{X}^0$ ein Martingal und wir erhalten aus Doobs L^p-Ungleichung (siehe Satz A.4) für alle $t \in \mathbb{Q}_+$:

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} |\widetilde{X}_s^{\varepsilon_{N+1}} - \widetilde{X}_s^0|^2\Big] \leqslant 4\mathbb{E}\big[|\widetilde{X}_t^{\varepsilon_{N+1}} - \widetilde{X}_t^0|^2\big] \to 0 \quad \text{for } N \to \infty.$$

Da $\widetilde{X}_s^{\varepsilon_{N+1}} - \widetilde{X}_s^0$ cádlág ist, folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz in t.

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz besitzt $\widetilde{X}^0 + X^l$ f.s. die gleichen Sprünge wie X, so dass

$$X^c := X - \widetilde{X}^0 - X^l$$

f.s. stetig ist und ein Lévy-Prozess ist. Satz 1.10 zeigt, dass X^c eine Brownsche Bewegung mit Drift ist. Nach Lemma 2.25 ist X^c unabhängig von $\widetilde{X}^\varepsilon + X^l$ für alle $\varepsilon > 0$ und somit auch unabhängig vom Grenzwert $\widetilde{X}^0 + X^l$.

(iv) Für jeden Lévy-Prozess ist das Sprungmaß J_X durch (6) eindeutig definiert und bestimmt eindeutig das Lévy-Maß. Die Darstellung des stetigen Anteils ist eindeutig nach Satz 1.10. □

2.3 Lévy-Khinchine-Formel

In Satz 1.7 hatten wir bereits gesehen dass die charakteristische Funktion φ_{X_T} eines Lévy-Prozesses stets von der Form $\varphi_{X_t}(u) = \exp(t\psi(u))$ für den so genannten charakteristischen Exponenten $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist. Aus der Lévy-Itô-Zerlegung folgern wir nun leicht eine konkrete Darstellung von ψ mit Hilfe des charakteristischen Tripels, die Lévy-Khinchine-Formel. Es handelt sich hierbei um das zweite zentrale Resultat in der Theorie der Lévy-Prozess. Man kann auch alternativ die Lévy-Itô-Zerlegung aus der Lévy-Khinchine-Formel folgern.

Satz 2.26 (Lévy-Khinchine-Formel)**.** *Ist X ein Lévy-Prozess im $\mathbb{R}^d$ mit charakteristischen Tripel (Σ, γ, ν), dann gilt für alle $t \geqslant 0$ und $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_t\rangle}\big] &= \exp(t\psi(u)) \quad \textit{mit} \\ \psi(u) &= -\frac{1}{2}\langle u, \Sigma u\rangle + i\langle \gamma, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \big(e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle \mathbb{1}_{\{|x|\leqslant 1\}}\big)\nu(\mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{8}$$

Andererseits ist jede Abbildung der Form (8) der charakteristische Exponent einer unendlich teilbaren Verteilung.

Beweis. Die Lévy-Itô-Zerlegung impliziert, dass für jedes t die Zufallsvariable

$$X_t^c + X_t^l + \widetilde{X}_t^\varepsilon$$

f.s. für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen X_t konvergiert. Dies impliziert schwache Konvergenz und folglich konvergiert die charakteristische Funktion von $X_t^c + X_t^l + \widetilde{X}_t^\varepsilon$ punktweise gegen die charakteristische Funktion von X_t. Aufgrund der Unabhängigkeit X_t^c, X_t^l und $\widetilde{X}_t^\varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[e^{i\langle u, X_t^c + X_t^l + \widetilde{X}_t^\varepsilon\rangle}\big] &= \exp\Big(-\frac{t}{2}\langle u, \Sigma u\rangle + it\langle\gamma, u\rangle\Big) \\ &\quad\times \exp\Big(t\int_{|x|>1} \big(e^{i\langle u,x\rangle} - 1\big)\nu(\mathrm{d}x)\Big) \\ &\quad\times \exp\Big(t\int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} \big(e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle\big)\nu(\mathrm{d}x)\Big).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen (8). □

Bemerkung 2.27.

(i) Die Abschneidefunktion $x \mapsto \mathbb{1}_{\{|x|\leqslant 1\}}$ ist nötig, um die Integrierbarkeit bzgl. des Lévy-Maßes zu gewährleisten, kann aber verschieden gewählt werden. Für jede Funktion $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1 + o(|x|)$ für $x \to 0$ und $g(x) = \mathcal{O}(1/|x|)$ für $|x| \to \infty$, kann man

$$\psi(u) = -\frac{1}{2}\langle u, \Sigma u\rangle + i\langle \gamma^g, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \big(e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle g(x)\big)\nu(\mathrm{d}x)$$

mit

$$\gamma^g := \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x(g(x) - \mathbb{1}_{\{|x|\leqslant 1\}})\nu(\mathrm{d}x)$$

schreiben. Eine solche Funktion g heißt *Abschneidefunktion* und (γ^g, Σ, ν) heißt charakteristisches Tripel bzgl. g. Man beachte, dass nur γ von g abhängt, während Σ und ν davon unabhängig sind.

(ii) Falls das Lévy-Maß die zusätzliche Bedingung $\int_{|x|>1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ erfüllt, müssen wir die großen Sprünge nicht „abschneiden“ und erhalten die einfachere Form

$$\psi(u) = -\frac{1}{2}\langle u, \Sigma u\rangle + i\langle \gamma_c, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \big(e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle\big)\nu(\mathrm{d}x)$$

mit $\gamma_c := \gamma + \int_{|x|>1} x\nu(\mathrm{d}x)$. In diesem Fall gilt $\mathbb{E}[X_t] = \gamma_c t$ und weshalb γ_c tatsächlich den Drift des Prozesses angibt.

(iii) Da jede unendlich teilbare Verteilung die Verteilung zum Zeitpunkt $t = 1$ eines Lévy-Prozesses ist, kann ihre charakteristische Funktion als $e^{\psi(u)}$ mit ψ gegen durch (8) für eine Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$, einen Vektor $\gamma \in \mathbb{R}^d$ und ein Radon-Maß ν auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}$mit $\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}x)$ dargestellt werden.

Übung 2.28. Zeigen Sie, dass im Fall unendlicher Sprungaktivität $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ die Menge der Sprungzeiten abzählbar und dicht in $\mathbb{R}^+$ ist. Nehmen Sie vereinfachend an, dass ν absolutstetig bzgl. des Lebesguemaßes ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Betrachten Sie ein beliebiges Intervall $[a, b]$ und weisen Sie nach, dass $Y_n := \int_{[a,b]\times\{\varepsilon_n\leqslant|x|\leqslant\varepsilon_{n-1}\}} J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ mit $\varepsilon_n := \sup\{r : \int_{|x|\geqslant r} \nu(\mathrm{d}x) \geqslant n\}, n \geqslant 1$, u.i.v. sind.

(ii) Folgern Sie, dass die Anzahl aller Sprünge in $[a, b]$ f.s. unendlich ist.

Insbesondere haben Sie so gezeigt, dass ein Lévy-Prozess genau dann stückweise stetig ist, wenn es ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist.

Mithilfe der Lévy-Khinchine-Formel, lässt ich leicht folgern, dass die Lineartransformation eines Lévy-Prozesses wieder ein Lévy-Prozess ist.

Korollar 2.29. *Es sei $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein Lévy-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit charakteristischem Tripel (Σ, γ, ν) und $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ eine Matrix. Dann ist $Y = (Y_t, t \geqslant 0)$ mit $Y_t = AX_t$ ein Lévy-Prozess in $\mathbb{R}^n$ mit charakteristischem Tripel $(\Sigma_A, \gamma_A, \nu_A)$, wobei*

$$\begin{aligned}
\Sigma_A &= A\Sigma A^\top,\\
\nu_A(B) &= \nu\big(\{x \in \mathbb{R}^d : Ax \in B\}\big), \qquad \forall B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n},\\
\gamma_A &= A\gamma + \int_{\mathbb{R}^d} Ax\big(\mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leqslant 1\}}(Ax) - \mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}^d:|y|\leqslant 1\}}(x)\big)\nu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Beweis. Man wende Satz 2.26 auf $\mathbb{E}[e^{i\langle u,Y_t\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle A^\top u,X_t\rangle}]$ an und beachte dabei, dass ν_A das Bildmaß der Abbildung $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$ bzgl. ν ist. Es bleibt nachzuweisen, dass ν_A tatsächlich ein Lévy-Maß und γ_A wohldefiniert ist (Hausaufgabe ☑). □

Beispiel 2.30. Sind X_1 und X_2 zwei unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Lévy-Prozesse mit charakteristischen Tripeln $(\sigma_i, \gamma_i, \nu_i), i = 1, 2$, dann folgt direkt aus der Definition, dass $Y = (X_1, X_2)^\top$ ein Lévy-Prozess in $\mathbb{R}^2$ ist. Mit Hilfe der Lévy-Khinchine-Formel rechnen wir leicht nach, dass Y durch das charakteristische Tripel (Σ, γ, ν) mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nu = \nu_1 \otimes \delta_0 + \delta_0 \otimes \nu_2$$

beschrieben wird. Die Struktur von ν zeigt, dass die beiden unabhängigen Prozesse X_1 und X_2 f.s. nie zeitgleich springen (vgl. Lemma 2.25). Aus Korollar 2.29 folgt, dass auch $X_1 + X_2$ ein Lévy-Prozess ist mit charakteristischem Tripel $(\overline{\sigma}, \overline{\gamma}, \overline{\nu})$, wobei

$$\overline{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad \overline{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \overline{\nu} = \nu_1 + \nu_2.$$

Letzteres kann man auch einfach direkt über die charakteristische Funktion von $(X_1 + X_2)_t$ für $t > 0$ nachrechnen.

3 Eigenschaften

3.1 Pfadeigenschaften

Mithilfe der Lévy-Itô-Zerlegung können wir nun die Eigenschaften der (typischen) Trajektorien eines Lévy-Prozesses aus analytischen Eigenschaften seines charakteristischen Tripels herleiten. Im Folgenden sei $X = (X_t, t \geqslant 0)$ stets ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel (Σ, γ, ν). Zunächst erhalten wir leicht ein Kriterium für die Stetigkeit, vgl. Satz 1.10.

Korollar 3.1. *Die Trajektorien von X sind genau dann f.s. stetig, wenn $\nu = 0$.*

Beweis. Aus Satz 2.22 folgt, dass die erwartete Anzahl von Sprungstellen $s \in (0, t]$ mit $\Delta X_s > \varepsilon$ durch $t \int_{|x|>\varepsilon} \nu(\mathrm{d}x)$ gegeben ist. Folglich ist die Anzahl der Sprünge genau dann f.s. 0, wenn $\nu = 0$. □

Wie wir aus der Lévy-Itô-Zerlegung bereits gesehen haben, sind die Pfade eines Lévy-Prozesses X genau dann stückweise stetig, wenn X ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Wir erhalten damit:

Korollar 3.2. *Für einen Lévy-Prozess X sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) Für f.a. $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto X_t(\omega)$ stückweise konstant.

(ii) Es gilt $\Sigma = 0$, $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$ und $\gamma = \int_{|x|\leqslant 1} x\nu(\mathrm{d}x)$.

(iii) Der charakteristische Exponent ist von der Form $\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1)\nu(\mathrm{d}x)$ mit $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$.

Übung 3.3. Beweisen Sie Korollar 3.2.

Als nächstes charakterisieren wir Lévy-Prozesse mit endlicher Variation.

Definition 3.4. Für eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, ist die *Totalvariationsnorm* definiert als

$$TV_{[a,b]}(f) := \sup_{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Obiges Supremum wird also über alle Partitionen des Intervalls $[a, b]$ bestimmt. f ist von *endlicher Variation* auf $[a, b]$, falls $TV_{[a,b]}(f) < \infty$. Ein Lévy-Prozess ist von *endlicher Variation*, falls seine Trajektorien für alle $t > 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 von endlicher Variation auf $[0, t]$ sind.

Beispiel 3.5.

(i) Jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist von endlicher Variation mit $TV_{[a,b]}(f) = |f(b) - f(a)|$. Anderseits kann jede $\mathbb{R}$-wertige Funktion mit endlicher Variation als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen dargestellt werden.

(ii) Ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x J_x(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), t \geqslant 0$, mit Sprungmaß J_X ist f.s. von endlicher Variation, da $t \mapsto X_t$ auf jedem endlichen Intervall f.s. nur endlich viele Sprünge besitzt und sonst konstant ist. Insbesondere gilt

$$TV_{[0,t]}(X) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |x|\, J_x(\mathrm{d}x) = \sum_{s \in [0,t]} |\Delta X_s|.$$

(iii) Die Trajektorien der Brownschen Bewegung haben mit Wahrscheinlichkeit 0 endliche Variation.

Satz 3.6. *Ein Lévy-Prozess X mit charakteristischem Tripel (Σ, γ, ν) ist genau dann von endlicher Variation, wenn*

$$\Sigma = 0 \quad \textit{und} \quad \int_{|x| \leqslant 1} |x| \nu(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Beweis. „$\Leftarrow$“: Wegen $\Sigma = 0$ und $\int_{|x|\leqslant 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} X_t &= bt + \int_0^t \int_{|x|>1} x\, J_x(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_t^\varepsilon \quad \text{mit} \\ X_t^\varepsilon &= \int_0^t \int_{\varepsilon < |x| \leqslant 1} x J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \end{aligned}$$

(ohne Kompensation für die kleinen Sprünge!) für ein $b \in \mathbb{R}^d$. Aus obigem Beispiel folgt, dass die ersten beiden Term von endlicher Variation sind. Es bleibt also nur $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} X^\varepsilon$ zu betrachten. Mit monotoner Konvergenz und dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\mathbb{E}\Big[\lim_\varepsilon TV_{[0,t]}(X^\varepsilon)\Big] = \mathbb{E}\Big[\lim_\varepsilon \sum_{s \leqslant t: \varepsilon < |\Delta X_s| \leqslant 1} |\Delta X_s|\Big] = t \int_{0<|x|\leqslant 1} |x| \nu(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Insbesondere gilt $\sum_{s\leqslant t: 0<|\Delta X_s|\leqslant 1} |\Delta X_s| < \infty$ f.s. und wegen dieser absoluten Konvergenz ist auch $\lim_\varepsilon X^\varepsilon = \sum_{s \leqslant t: 0 < |\Delta X_s| \leqslant 1} \Delta X_s$ f.s. endlich. Aus der pfadweisen Abschätzung (tatsächlich gilt hier Gleichheit)

$$TV_{[0,t]}\Big(\sum_{s\leqslant t: 0<|\Delta X_s|\leqslant 1} \Delta X_s \Big) \leqslant \sum_{s \leqslant t: 0<|\Delta X_s| \leqslant 1} |\Delta X_s| = \lim_\varepsilon TV_{[0,t]}(X^\varepsilon)$$

folgt, dass auch $TV_{[0,t]}\big(\lim_\varepsilon X^\varepsilon\big)$ f.s. endlich ist.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $\int_{|x|\leqslant 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) = \infty$. Aufgrund der Lévy-Itô-Zerlegung gilt

$$TV_{[0,t]}(X) \geqslant \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} |x| J_X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) =: U_t^\varepsilon.$$

Für den zusammengesetzten Poisson-Prozess gilt nach der Exponentialformel, $u > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[e^{-uU_t^\varepsilon}\big] &= \exp\Big(t \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} (e^{-u|x|} - 1)\nu(\mathrm{d}x)\Big) \\ &= \exp\Big(\underbrace{t \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} (e^{-u|x|} - 1 + u|x|)\nu(\mathrm{d}x)}_{\leqslant \int_{|x|\leqslant 1} u^2|x|^2\nu(\mathrm{d}x) < \infty} - tu \int_{\varepsilon < |x| \leqslant 1} |x|\nu(\mathrm{d}x)\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\int_{|x|\leqslant 1}|x|\nu(\mathrm{d}x) = \infty$, konvergiert für alle $u,t>0$ und $\varepsilon \downarrow 0$ die rechte Seite gegen 0. Dominierte Konvergenz ergibt

$$0 = \lim_{\varepsilon} \mathbb{E}\big[e^{-uU_t^\varepsilon}\big] = \mathbb{E}\big[\exp\big(-u\lim_{\varepsilon} U_t^\varepsilon\big)\big] \quad \forall u>0$$

und damit $\lim_\varepsilon U_t^\varepsilon = \infty$ f.s..

Gilt andererseits $\Sigma \neq 0$ und $\int_{|x|\leqslant 1}|x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$, dann folgt aus der Lévy-Itô-Zerlegung, dass X die Summe einer Brownschen Bewegung und eines Prozesses mit endlicher Variation ist. Folglich muss X ebenfalls von unendlicher Variation sein. □

Beispiel 3.7 (Gamma-Prozess)**.** Ein Lévy-Prozess X mit $X_t \sim \Gamma(tc,\lambda), t\geqslant 0$, heißt *Gamma-Prozess* mit Parametern $c,\lambda>0$. Die Randverteilung von X_t ist also durch die Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} p_t(x) &= \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)} x^{ct-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad \text{bzw.} \\ \varphi_t(u) &= \frac{1}{(1-iu/\lambda)^{-ct}} \stackrel{!}{=} \exp\Big(t\int_0^\infty (e^{iux}-1)\frac{ce^{-\lambda x}}{x}\mathrm{d}x\Big), \quad u\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{E}[X_t] = \frac{tc}{\lambda}$ und $\mathrm{Var}(X_t) = \frac{tc}{\lambda^2}$.

Übung 3.8 (Lévy-Itô-Zerlegung und Lévy-Khinchine-Formel bei endlicher Variation)**.** Ist $X = (X_t, t\geqslant 0)$ ein Lévy-Prozess von endlicher Variation mit charakteristischem Tripel $(0,\gamma,\nu)$, dann gilt

$$X_t = \gamma_0 t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x J_X(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \gamma_0 t + \sum_{s\in[0,t]:\Delta X_s\neq 0} \Delta X_s, \qquad t\geqslant 0,$$

mit $\gamma_0 = \gamma - \int_{|x|\leqslant 1} x\nu(\mathrm{d}x)$. Die charakteristische Funktion erfüllt die Darstellung

$$\mathbb{E}\big[e^{i\langle u,X_t\rangle}\big] = \exp\Big(t\langle\gamma_0,u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\langle u,x\rangle}-1)\nu(\mathrm{d}x)\Big).$$

Als nächstes wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Lévy-Prozess monoton wachsende Pfade besitzt.

Definition 3.9. Ein Lévy-Prozess heißt *wachsend*, falls die Trajektorien von X f.s. nichtfallend sind, d.h. für alle $0<s<t$ gilt $X_s \leqslant X_t$ f.s. Ein wachsender Lévy-Prozess heißt auch *Subordinator*.

Satz 3.10. *Für einen reellwertigen Lévy-Prozess X sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) $X_t \geqslant 0$ *f.s. für ein* $t>0$.

(ii) $X_t \geqslant 0$ *f.s. für alle* $t>0$.

(iii) X *ist wachsend.*

(iv) Es gilt $\Sigma = 0$, $\nu((-\infty,0]) = 0$, $\int_0^\infty (x\wedge 1)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ *und* $\gamma_0 = \gamma - \int_{|x|\leqslant 1} x\nu(\mathrm{d}x) \geqslant 0$.

Beweis. (i)⇒(iii): Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist X_t die Summe aus n u.i.v. Zufallsvariablen $X_{tk/n} - X_{t(k-1)/n}, k=1,\ldots,n$. Da $X_t\geqslant 0$ f.s., muss auch $X_{tk/n} - X_{t(k-1)/n} \geqslant 0$ f.s. für alle k gelten. Damit erhalten wir für alle $p,q\in\mathbb{Q}$ mit $0<p<q$, dass $X_{qt} - X_{pt} \geqslant 0$ f.s. Da die Pfade cádlág sind, folgt hieraus (iii).

(iii)⇒(ii)⇒(i): Trivial.

(iii)⇒(iv) Da X monoton ist, ist es von endlicher Variation. Damit gilt $\Sigma=0$ und $\int_{-\infty}^\infty (|x|\wedge 1)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$. Zudem kann X f.s. keine negativen Sprüngen haben, d.h.

$$\nu((-\infty,0]) = \mathbb{E}\big[J_X\big([0,t]\times(-\infty,0)\big)\big] = 0. \tag{9}$$

Aus der Darstellung $X_t = \gamma_0 t + \sum_{s\in[0,t]:\Delta X_s\neq 0} \Delta X_s$ folgt, dass auch $\gamma_0 \geqslant 0$ gelten muss.

(iv)⇒(iii): Unter den gegeben Annahmen, ist X von endlicher Variation. Somit kann jeder Pfad als Summe einer wachsenden linearen Funktion und den Sprüngen $\sum_{s\in[0,t]:\Delta X_s\neq 0} \Delta X_s$ dargestellt werden. Wegen (9) treten aber negative Sprünge mit Wahrscheinlichkeit 0 auf, sodass X f.s. nichtfallend ist. □

Bemerkung 3.11. Es gibt Lévy-Prozesse ohne Diffusionskompente, negative Sprünge und mit $\int_0^1 x\nu(\mathrm{d}x) = \infty$. Satz 3.10 besagt, dass solche Prozesse keine monoton wachsenden Pfade haben unabhängig vom Driftkoeffizienten. Die Erklärung diese „Phänomens" ist, dass in diesem Fall der Prozess nicht mehr die Summe seiner Sprünge ist, sondern diese kompensiert werden müssen. Dieser Kompensator addiert sich zu einem „unendlich starken" Drift, der nicht durch ein beliebig großes γ ausgeglichen werden kann.

Übung 3.12. Sei X ein Subordinator. Dann ist für alle $u, t > 0$ die Laplacetransformierte von X_t gegeben durch

$$\mathbb{E}\big[e^{-uX_t}\big] = \exp\Big(t\int_{(0,\infty)} (e^{-ux} - 1)\nu(\mathrm{d}x) - t\gamma_0 u\Big), \qquad u > 0.$$

Beispiel 3.13 (Varianz-Gamma-Prozess)**.** Es seien $X = (X_t, t \geqslant 0)$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponenten ψ sowie $S = (S_t, t \geqslant 0)$ ein von X unabhängiger Subordinator mit Laplacetransformation $e^{tl(u)} := \mathbb{E}[e^{uS_t}], u < 0$. Dann ist

$$Y = (Y_t, t \geqslant 0) \quad \text{mit} \quad Y_t = X_{S_t}, t \geqslant 0,$$

ebenfalls ein Lévy-Prozess mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E}[e^{iuY_t}] = \exp\big(tl \circ \psi(u)\big), \quad u \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$$

(Hausaufgabe ☑). Der Prozess S modelliert einen zufälligen Zeitwechsel bzw. eine zufällige Zeitskala. Im Finanzkontext kann diese als „business time" interpretiert werden und modelliert bspw. den Informationszufluss oder die Nervosität am Markt.

Betrachten wir nun den Spezialfall $X_t = \mu t + \sigma B_t, t \geqslant 0$, also eine (eindimensionale) Brownsche Bewegung mit Volatilität $\sigma^2 > 0$ und Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und wählen S als Gamma-Prozess mit Parametern $c, \lambda > 0$. Dann ist $l(u) = -c\log(1 - u/\lambda)$. Für die Normierung $\mathbb{E}[S_t] = t$, wählen wir $c = \lambda = 1/\kappa$ für ein $\kappa > 0$ welches die Standabweichung von S_1 bestimmt. Der resultierende Prozess $Y = X_S$ heißt *Varianz-Gamma-Prozess* und wird durch die drei Parameter (c, λ, κ) beschrieben. Die charakteristische Funktion dieses reinen Sprungprozesses ist geben durch

$$\mathbb{E}[e^{iuY_t}] = \big(1 + iu\mu\kappa - \frac{\sigma^2\kappa}{2}u^2\big)^{-t/\kappa}, \quad u \in \mathbb{R},$$

und das Lévy-Maß von Y ist gegeben durch

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{\sigma^2}{\mu|x|}\exp\Big(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}|x|\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere hat Y unendliche Sprungaktivität, aber Pfade endlicher Variation.

3.2 Verteilungseigenschaften

Wir wissen bereits, dass für jeden Lévy-Prozess X die Verteilung $\mathbb{P}^{X_t}$ von X_t für jedes $t \geqslant 0$ unendlich teilbar ist und die charakteristische Funktion von X_t durch die Lévy-Khinchine-Formel gegeben ist. Im Fall von zusammengesetzten Poisson-Prozessen lässt sich $\mathbb{P}^{X_t}$ explizit über das Lévy-Maß ausdrücken.

Lemma 3.14. *Ist X ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Lévy-Maß ν, dann ist die Randverteilung durch das Faltungsexponential*

$$\mathbb{P}^{X_t} = e^{-t\nu(\mathbb{R}^d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \nu^{*k}, \qquad t \geqslant 0,$$

gegeben. Dabei ist $\nu^{*0} := \delta_0$ und für $k \geqslant 1$ bezeichnet ν^{*k} die k-fache Faltung von ν mit sich selbst.

Beweis. Wir setzen $\lambda := \nu(\mathbb{R}^d)$ und $\rho = \frac{\nu}{\lambda}$. Dann gilt $X_t \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$ mit einem Poisson-Prozess N mit Intensität λ und unabhängigen $(Y_n)_{n\geqslant 1} \stackrel{u.i.v.}{\sim} \rho$. Somit gilt für jedes $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t \in A) =& \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k \in A \big| N_t = n\Big) \frac{e^{-t\lambda}(t\lambda)^n}{n!}\\ =& e^{-t\lambda}\delta_0(A) + e^{-t\lambda} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \rho^{*n}(A) = e^{-t\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \nu^{*n}(A).\end{aligned}$$

□

Vorangegangenes Lemma zeigt insbesondere, dass zusammengesetzte Poisson-Prozesse ein Atom/ eine Punktmasse in 0 haben. Eine Lebesguedichte besitzen die Randverteilungen im Allgemeinen also nicht. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Dichten liefert folgender Satz:

Satz 3.15. *Für einen Lévy-Prozess X mit charakteristischem Tripel (Σ, γ, ν) besitzt $\mathbb{P}^{X_t}$ eine Lebesguedichte für jedes $t > 0$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) Σ hat vollen Rang oder

(ii) ν besitzt eine Lebesguedichte auf $\mathbb{R}^d$ und es gilt $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$.

Beweis. O.B.d.A. sei $t = 1$. Wir zeigen zunächst, dass die Faltung $\mu_1 * \mu_2$ für zwei Maße μ_1, μ_2 absolut stetig ist, falls μ_1 oder μ_2 absolutstetig bzgl. des Lebesguemaßes ist: Sei also μ_1 absolutstetig. Für jedes $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ mit $|B| = 0$ (Lebesguenullmenge), gilt dann auch $|\{x - y : x \in B\}| = 0$ für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ und somit

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_1(B - y)\mu_2(\mathrm{d}y) = 0.$$

(i) Es gilt $\mathbb{P}^{X_1} = \mathbb{P}^{Y_1} * \mathbb{P}^{Z_1}$ für $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ und eine unendlich teilbare Zufallsvariable Z_1 mit charakteristischem Tripel $(0, \gamma, \nu)$. Da Σ vollen Rang hat, besitzt Y_1 eine Lebesguedichte auf $\mathbb{R}^d$ und somit ist auch $\mathbb{P}^{X_1}$ absolutstetig.

(ii) Betrachte $\nu_n := \nu|_{\{|x|\geqslant 1/n\}}$ und $c_n := \nu_n(\mathbb{R}^d) \uparrow \infty$. Es sei Y ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Lévy-Maß ν_n. Wir setzen $\mu = \mathbb{P}^{X_1}$ und $\mu_n := \mathbb{P}^{Y_1}$. Dann gilt

$$\mu_n = e^{-c_n}\delta_0 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{\nu_n^{*k}}{k!},$$

wobei der zweite Term absolutstetig ist, da mit ν auch ν_n absolutstetig ist. Es seien $\mu = \mu_s + \mu_c$ und $\mu_n = \mu_{n,s} + \mu_{n,c}$ die Lebesguezerlegungen von μ bzw. μ_n in singulären und absolutstetigen Teil bzgl. des Lebesguemaßes. Dann gilt

$$\mu_{n,s}(\mathbb{R}^d) = e^{-c_n}\delta_0(\mathbb{R}^d) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Da $\mu = \mu_n * \rho$ für eine weitere unendlich teilbare Verteilung ρ, folgt

$$\mu_s(\mathbb{R}^d) = \big((\mu_{n,s} + \mu_{n,c}) * \rho\big)_s(\mathbb{R}^d) \leqslant \mu_{n,s} * \rho(\mathbb{R}^d) = \mu_{n,s}(\mathbb{R}^d)$$

für alle $n \geqslant 0$, sodass $\mu_s(\mathbb{R}^d) = 0$ folgt. □

Wir untersuchen jetzt unter welchen Bedingungen die Momente der Randverteilungen eines Lévy-Prozesses (oder äquivalent einer unendlich teilbaren Verteilung) endlich sind. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Satz 3.16. *Ist der Träger des Lévy-Maßes ν eines Lévy-Prozesses X beschränkt, so besitzt X_t für jedes t endliche exponentielle Momente: Für alle $c > 0$ und $t \geqslant 0$ gilt $\mathbb{E}[e^{c|X_t|}] < \infty$.*

Beweis. O.B.d.A. sei $t = 1$. Wir betrachten zunächst den Fall $d = 1$. Es existiert ein $a > 0$, sodass $\operatorname{supp} \nu \subseteq [-a, a]$.

Aufgrund des beschränkten Trägers gilt

$$\varphi(z) = \mathbb{E}\big[e^{izX_1}\big] = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma z^2 + i\gamma' z + \int_{-a}^{a} (e^{izx} - 1 - iux)\nu(\mathrm{d}x)\Big), \qquad z \in \mathbb{R},$$

für geeignete $\sigma > 0, \gamma' \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite ist auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert und endlich. Diese Funktion bezeichnen wir mit Ψ. Dann ist Ψ eine ganze Funktion (analytisch auf ganz $\mathbb{C}$), da wir Ableiten und Integrieren vertauschen können. Es gilt insbesondere für jedes $n \geqslant 0$

$$\frac{\mathrm{d}^n \Psi(0)}{\mathrm{d}z^n} = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n \mathbb{P}^{X_1}(\mathrm{d}x) =: i^n \alpha_n$$

für endliche α_n und die Potenzreihe

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \alpha_n}{n!} z^n$$

besitzt unendlich großen Konvergenzradius. Für

$$\beta_n := \int_{\mathbb{R}} |x|^n \mathbb{P}^{X_1}(\mathrm{d}x)$$

gilt $\beta_{2m} = \alpha_{2m}$ und $\beta_{2m+1} \leqslant \alpha_{2m} + \alpha_{2m+2}$ für jedes $m \geqslant 0$. Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}\big[e^{c|X_1|}\big] = \int_{\mathbb{R}} e^{c|x|} \mathbb{P}^{X_1}(\mathrm{d}x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{c^n \beta_n}{n!} \leqslant 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \alpha_n}{n!} (-ic)^n < \infty.$$

Damit ist die Behauptung für $\mathbb{R}$-wertige Lévy-Prozesse gezeigt.

Es sei nun $d \geqslant 2$ und $X_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ ein Lévy-Prozess mit $\operatorname{supp} \nu \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant a\}$ für ein $a > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\big[e^{c|X_1|}\big] \leqslant \mathbb{E}\Big[\exp\Big(c \sum_{k=1}^{d} |X_1^{(k)}|\Big)\Big] \leqslant \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{d} \big(e^{cX_1^{(k)}} + e^{-cX_1^{(k)}}\big)\Big].$$

Durch Ausmultiplizieren des Produktes ergibt sich eine Summe aus endlich vielen Termen der Form $\mathbb{E}[e^{X_t^{\#}}]$, wobei $X_t^{\#}$ eine Linearkombination aus $X_1^{(1)}$ bis $X_1^{(d)}$ ist. Aus Korollar 2.29 folgt, dass $X_t^{\#}$ ebenfalls ein Lévy-Prozess ist dessen Lévy-Maß beschränkten Träger hat. Dadurch folgt die Behauptung aus dem eindimensionalen Fall. □

Damit können wir nun folgendes sehr allgemeine Resultat beweisen:

Satz 3.17. *Es sei $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ eine lokal beschränkte (d.h. beschränkt auf jedem Kompaktum) Funktion mit der Eigenschaft*

$$g(x + y) \leqslant a g(x) g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $a > 0$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathbb{E}[g(X_t)] < \infty$ *für ein* $t > 0$.

(ii) $\mathbb{E}[g(X_t)] < \infty$ *für alle* $t > 0$.

(iii) $\int_{|x|>1} g(x)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$.

Beweis. Wir definieren $\nu_0 := \nu|_{\{|x|\leqslant 1\}}$ und $\nu_1 := \nu|_{\{|x|>1\}}$ und zerlegen $X \overset{d}{=} Y + Z$ für zwei unabhänigige Lévy-Prozesse in $\mathbb{R}^d$, wobei Y ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Lévy-Maß ν_1 ist und Z das Lévy-Maß ν_0 besitzt. Aufgrund der Submultiplikativität von g gilt für $b = \frac{2}{a} \vee \sup_{|x|\leqslant 1} g(x)$ und jedes $x \in \mathbb{R}^d$ mit $n := \lceil |x| \rceil$:

$$g(x) \leqslant ag\big(\frac{x}{n}\big)g\big(\frac{n-1}{n}x\big) \leqslant a^{n-1}g\big(\frac{x}{n}\big)^n \leqslant a^{n-1}b^n \leqslant be^{|x|\log(ab)} =: be^{c|x|}. \tag{10}$$

Mit dieser Vorbereitung zeigen nun die Äquivalenz:

(i)⇒(iii) Nach Annahme gilt für ein $t > 0$

$$\mathbb{E}[g(X_t)] = \int\int g(x+y)\mathbb{P}^{Y_t}(\mathrm{d}x)\mathbb{P}^{Z_t}(\mathrm{d}y) < \infty.$$

Also existiert ein $y \in \mathbb{R}^d$, sodass $\int g(x+y)\mathbb{P}^{Y_t}(\mathrm{d}x) < \infty$. Nach Lemma 3.14 gilt

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}\int g(x+y)\nu_1^{*n}(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Aus (10) ergibt sich $g(x) \leqslant ag(-y)g(x+y) \leqslant abe^{c|y|}g(x+y)$ und damit

$$\int g(x)\nu_1(\mathrm{d}x) \leqslant \frac{1}{t}\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\int g(x)\nu_1^{*n}(\mathrm{d}x) < \infty.$$

(iii)⇒(ii) Aufgrund der Submultiplikativität folgt

$$\begin{aligned}\int g(y)\nu_1^{*n}(\mathrm{d}y) &= \int\cdots\int g(y_1+\cdots+y_n)\nu_1(\mathrm{d}y_1)\cdots\nu_1(\mathrm{d}y_n)\\ &\leqslant a^{n-1}\Big(\int g(y)\nu_1(\mathrm{d}y)\Big)^n\end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[g(Y_t)] = e^{-t\nu_1(\mathbb{R}^d)}\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\int g(y)\nu_1^{*n}(\mathrm{d}x) < \infty \qquad \forall t > 0.$$

Anderseits folgt aus Satz 3.16 und (10), dass $\mathbb{E}[g(Z_t)] < \infty$ für jedes $t > 0$ gilt. Zusammen mit der Unabhängigkeit von Y und Z ergibt sich

$$\mathbb{E}[g(X_t)] \leqslant a\mathbb{E}[g(Y_t)]\mathbb{E}[g(Z_t)] < \infty.$$

(ii)⇒(i) ist trivial. □

Übung 3.18. Zeigen Sie, dass $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ die Bedingung (10) erfüllt, wenn $g(x), x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, gegeben ist durch

a) $|x|^p \vee 1$ für $p > 0$, b) $|x_j|^p \vee 1$ für $p > 0, j = 1,\dots,d$,

c) $\log(|x| \vee e)$, d) $\exp(|x|^\beta)$ für ein $\beta \in (0,1]$.

3.3 Selbstähnlichkeit und stabile Verteilungen

Von der Brownschen Bewegung B kennen wir bereits die Selbstähnlichkeit

$$\forall r > 0 : \quad \left(\frac{B_{rt}}{\sqrt{r}}\right)_{t\geqslant 0} \stackrel{d}{=} (B_t)_{t\geqslant 0}.$$

Es liegt also nahe, die Frage zu stellen ob es auch andere Lévy-Prozesse gibt, die eine solche Selbstähnlichkeit erfüllen.

Definition 3.19. Ein Lévy-Prozess X heißt *selbstähnlich*, falls

$$\forall r > 0, \exists b_r > 0 \ : \quad \left(\frac{X_{rt}}{b_r}\right)_{t\geqslant 0} \stackrel{d}{=} (X_t)_{t\geqslant 0}.$$

Wir erhalten insbesondere $b_{rs}X_1 \stackrel{d}{=} X_{rs} \stackrel{d}{=} b_r X_s \stackrel{d}{=} b_r b_s X_1$. Es muss also $b_{rs} = b_r b_s$ für alle $r, s > 0$ gelten. Aufgrund der Rechtsstetigkeit von X, muss $r \mapsto b_r$ stetig sein. Beides zusammen impliziert bereits, dass $b_r = r^H$ für ein $H \in \mathbb{R}$ gelten muss. Insbesondere gilt $X_t \stackrel{d}{=} t^H X_1$. Damit schließt sich $H = 0$ aus. Wäre $H < 0$, dann würde X_t für $t \to \infty$ schwach gegen 0 konvergieren, was ebenfalls nicht sein kann. Wir erhalten also $b_r = r^H$ für ein $H > 0$.

Da die charakteristische Funktion von X_t durch $\varphi_t = e^{t\psi}$ für den charakteristischen Exponenten ψ gegeben ist, ist die Selbstähnlichkeit von X äquivalent zu

$$\forall r > 0 : \quad \varphi_t(u)^r = \varphi_t(ur^H) \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

Wollen wir auch einen Driftterm zulassen, müssen wir die rechte Seite mit einem Faktor $e^{i\langle c,u\rangle}$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}^d$ versehen, da z.B. für $\widetilde{B}_t = B_t + \gamma t$ gilt:

$$\forall r > 0 : \quad \left(\frac{\widetilde{B}_{rt}}{\sqrt{r}}\right)_{t\geqslant 0} \stackrel{d}{=} (\widetilde{B}_t + (\sqrt{r} - 1)\gamma t)_{t\geqslant 0}.$$

Dies führt auf folgende Definition:

Definition 3.20. Eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}^d$ besitzt eine *stabile Verteilung*, falls für jedes $r > 0$ ein $b_r > 0$ und ein $c_r \in \mathbb{R}^d$ existiert, sodass für die charakteristische Funktion φ von X gilt:

$$\forall u \in \mathbb{R}^d \ : \quad \varphi(u)^r = \varphi(ub_r)e^{i\langle c_r,u\rangle}.$$

Die Verteilung heißt *strikt stabil*, falls $c_r = 0$ für alle $r > 0$ erfüllt ist.

Die Bezeichnung stabil begründet sich in der Stabilität der Verteilung unter Addition: Ist die Verteilung einer Zufallsvariable X stabil und sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Kopien von X, dann gilt

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} b_n X + c_n.$$

Bemerkung 3.21. Die Klasse der stabilen Verteilungen charakterisiert die Menge aller möglichen Grenzverteilungen normierter Summen von u.i.v. Zufallsvariablen: Für $(X_k)_{k\geqslant 1}$ u.i.v., betrachten wir für $n \geqslant 0$

$$S_n := \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - c_n, \quad b_n > 0, c_n \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt: S_n konvergiert genau dann in Verteilung gegen ein X, wenn X eine stabile Verteilung besitzt, cf. [Breiman: „Probability“, 1992, Kapitel 8].

Aus den Definitionen wird direkt klar, dass ein Lévy-Prozess genau dann selbstähnlich ist, wenn seine Randverteilungen strikt stabil sind. Umgekehrt ist jede stabile Verteilung unendlich teilbar ($\varphi(u) = (\varphi(u/b_n)e^{-i\langle c_n/(nb_n),u\rangle})^n$) und wir finden einen zugehörigen Lévy-Prozess. Wir erhalten also wie oben $b_r = r^H$ für ein $H > 0$.

Definition 3.22. Ein Lévy-Prozess heißt *α-stabil* für ein $\alpha > 0$, falls für alle $r > 0$ ein c_r existiert, sodass

$$X_{rt} \overset{d}{=} r^{1/\alpha} X_t + c_r t, \qquad \forall t > 0.$$

Man kann ganz allgemein zeigen, dass α stets kleiner als 2 sein muss. Wir konzentrieren uns hier auf den eindimensionalen Fall:

Satz 3.23. *Ein $\mathbb{R}$-wertiger Lévy-Prozess $X \neq 0$ mit charakteristischem Tripel (σ, γ, ν) ist genau dann α-stabil, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $\alpha = 2$ *und* $\nu = 0$.

(ii) $\alpha \in (0, 2), \sigma = 0$ *und* $\nu(\mathrm{d}x) = c_\pm |x|^{-1-\alpha}\mathrm{d}x$ *für* $x \in \mathbb{R}_\pm \setminus \{0\}$ *und zwei Konstanten* $c_+, c_- \geqslant 0$.

Beweis. Für jedes $r > 0$, folgt aus Korollar 2.29, dass die Prozesse $(X_{r^\alpha t})_{t \geqslant 0}$ und $(rX_t)_{t \geqslant 0}$ die charakteristischen Tripel $(r^\alpha \sigma, r^\alpha \gamma, r^\alpha \nu)$ bzw. $(r^2 \sigma, r\gamma, \nu(\cdot/r))$ haben. Damit ist X genau dann α-stabil, wenn $r^\alpha \sigma = r^2 \sigma$ und $r^\alpha \nu = \nu(\cdot/r)$ für alle $r > 0$ gilt. Insbesondere ist $\sigma = 0$, falls $\alpha \neq 2$.

Schreiben wir nun $F_+(x) = \nu([x, \infty))$ und $F_-(x) := \nu((-\infty, x])$ erhalten wir

$$\forall r > 0 : \, r^\alpha \nu = \nu(\cdot/r) \quad \iff \quad \forall r, x > 0 : \, r^\alpha F_\pm(rx) = F_\pm(x).$$

In diesem Fall gilt somit $F_\pm(x) = x^{-\alpha} F_\pm(1), x > 0$. $F_\pm$ ist also differenzierbar auf $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$ und $F'_\pm$ gibt die Lebesguedichte von ν auf $\mathbb{R}_\pm \setminus \{0\}$ an. Schließlich impliziert die Bedingung $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$, dass $\alpha < 2$ im Fall $\nu \neq 0$ gelten muss. $\square$

Übung 3.24. Die charakteristische Funktion eines $\mathbb{R}$-wertigen α-stabilen Lévy-Prozesses X ist von der Form, $u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{X_t}(u) = \exp\Big(- t\rho^\alpha |u|^\alpha \big(1 - i\beta \operatorname{sgn} u \tan \frac{\pi\alpha}{2}\big) + it\mu u\Big), \quad \alpha \neq 1,$$
$$\varphi_{X_t}(u) = \exp\Big(- t\rho |u| \big(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} u \frac{\pi\alpha}{2} \log|u|\big) + it\mu u\Big), \quad \alpha = 1,$$

für den Stabilitätsindex $\alpha \in (0, 2]$, einen Skalierungsparameter $\rho \geqslant 0$, einen Lokationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und einen Schiefeparameter $\beta \in [-1, 1]$. Im symmetrischen Fall $\beta = \mu = 0$ ergibt sich $\varphi_{X_t}(u) = \exp(-t\rho^\alpha |u|^\alpha)$.

Während die Form der charakteristischen Funktion einer stabilen Verteilung, beschrieben durch die vier Parameter $\alpha, \beta, \sigma, \mu$, explizit vorliegt, findet man nur für Ausnahmefälle eine geschlossene Form für die Randdichten.

Beispiel 3.25.

(i) Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \rho^2)$ ergibt sich mit $\alpha = 2, \beta = 0$.

(ii) Die Cauchy-Verteilung ergibt sich mit $\alpha = 1, \beta = 0$. Die durch ρ, μ parametrisierte Dichte ist gegeben durch

$$\frac{\rho}{\pi((x - \mu)^2 + \rho^2)}.$$

(iii) Die Lévy-Verteilung erhält man mit $\alpha = 1/2, \beta = 1$ und wird beschrieben durch die Dichte

$$\Big(\frac{\rho}{2\pi}\Big)^{1/2} \frac{1}{(x - \mu)^{3/2}} \exp\big(- \frac{\rho}{2(x - \mu)}\big) \mathbb{1}_{\{x > \mu\}}.$$

Aus der expliziten Form des Lévy-Maßes eines α-stabilen Lévy-Prozesses X mit $\alpha \in (0, 2)$ folgt mit Satz 3.17, dass für jedes $p \geqslant 0$ und jedes $t > 0$

$$\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty \qquad \iff \quad p < \alpha$$

gilt. Die Randverteilungen sind also *heavy-tailed*. In vielen Anwendungen ist diese Eigenschaft eher unerwünscht, woraufhin folgende Klasse eingeführt wurde:

Beispiel 3.26. Ein $\mathbb{R}$-wertiger Lévy-Prozess $X = (X_t, t \geqslant 0)$ mit charakteristischem Tripel $(0, \gamma, \nu)$ (keine Diffusionskomponente) für einen Driftparameter $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein Lévy-Maß von der Form

$$\nu(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha}} e^{-\lambda_- |x|} \mathbb{1}_{\{x<0\}} + \frac{c_+}{|x|^{1+\alpha}} e^{-\lambda_+ x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

mit Parametern $c_\pm > 0, \lambda_\pm > 0$ und $\alpha \in (0, 2)$ heißt *gemäßigt stabiler Lévy-Prozess* (tempered stable). Durch die zusätzlichen exponentiellen Faktoren werden die großen Sprung stark abgeschwächt, während die kleinen Sprünge ihr stabiles Verhalten behalten. Solche Prozesse werden z.B. um Optionspreise zu modellieren.

A Appendix: Resultate aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Satz A.1 (Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $k_n \in \mathbb{N}$ und $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ reelle, zentrierte und unabhängige Zufallsvariablen. Es gelte $\sum_{l=1}^{k_n} \mathrm{Var}(X_{n,l}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $S_n := \sum_{l=1}^{k_n} X_{n,l} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ für $n \to \infty$ und es gilt $\max_{l=1,\dots,k_n} \mathbb{P}(|X_{n,k}| > \varepsilon) \to 0$ für $n \to \infty$ und für jedes $\varepsilon > 0$.

(ii) Es gilt die Lindeberg-Bedingung*:*

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E}\big[X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,l}|^2 > \varepsilon^2 \mathrm{Var}(S_n)\}}\big] \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. [Klenke, 2008, Satz 15.43]. □

Bemerkung A.2. Die Lindeberg-Bedingung wird von der ggf. leichter zu prüfenden *Lyapunov-Bedingung*

$$\forall \delta > 0: \quad \frac{1}{\mathrm{Var}(S_n)^{1+\delta/2}} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E}\big[|X_{n,l}|^{2+\delta}\big] \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

impliziert.

Da für $\mu \in \mathbb{R}^d$ und einer symmetrischen, positiv-semidefiniten Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Äquivalenz

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d : \langle \lambda, X \rangle \sim \mathcal{N}\big(\langle \lambda, \mu \rangle, \langle \lambda, \Sigma\lambda \rangle\big)$$

gilt [Klenke, 2008, Satz 15.53], ist folgender Satz sehr nützlich, um mehrdimensionale zentrale Grenzwertsätze zu beweisen.

Satz A.3 (Cramér-Wold Device)**.** *Es seien $X_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,d})^\top \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$, Zufallsvektoren. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt einen Zufallsvektor X mit $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$.

(ii) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ gibt es eine Zufallsvariable X^λ mit $\langle \lambda, X_n \rangle = \sum_{k=1}^d \lambda_k X_{n,k} \xrightarrow{d} X^\lambda$.

Gelten (i) und (ii), so ist $X^\lambda \overset{d}{=} \langle \lambda, X \rangle$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Beweis. [Klenke, 2008, Satz 15.55]. □

Satz A.4 (Doobs L^p-Martingalungleichung)**.** *Sei $M = (M_k, k \in \mathbb{N}_0)$ ein Martingal mit $M_k \in L^p(\mathbb{P})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $p > 1$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\big[\sup_{k \leqslant n} |M|^p\big] \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}[|M_n|^p].$$

Beweis. Vorlesung „Stochastische Prozesse“ oder [Kallenberg, Proposition 6.16]. $\square$

Bemerkung A.5. Ist $M = (M_t, t \in \mathbb{Q}_+)$, so folgt mit dominierter Konvergenz für $T \in \mathbb{Q}_+$

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t \in \mathbb{Q}_+ : t \leqslant T} |M_t|^p\big] \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}[|M_T|^p].$$