Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK
SS08

Abgabe: 13.6.2008

Aufgabe 9.1
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-u'' = f \quad \text{auf} \quad (0,1)$$
$$u(0) = u'(1) = 0$$

mit f gleich

```
f = (x<=0.5).*(2*x) + (x>0.5).*(2-2*x)
f = 100*(x-1/3).^2.*(x-2/3).^2
f = -100*(x.*(x-1).*(x-1/3).*(x-2/3))+1
f = sin(2*pi*x)
```

Die Aufgabe besitzt eine Lösung im Raum

$$V = \{ v \,/\, v \in H^1[0,1] \ \text{mit}\ v(0) = 0 \}.$$

Zur Approximation der Lösung wählen wir die Räume

$$V_h = \text{span}\ \{ (1/i)x^i \}_{i=1}^{N}$$

Obwohl die zugehörigen Gleichungssysteme eine schlechte Kondition (Hilbert-Matrizen) haben, liefern diese für die angegebenen f dennoch gute Approximationen.
Untersuchen Sie:

- Die Besetzung der Matrizen
- Die Kondition der Matrizen
- Die Verteilung der gesuchten Koeffizienten
- Ab welchem N wird die zweite Randbedingung gut erfüllt?

und geben Sie eine Näherungslösung an.

Aufgabe 9.2
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-u'' = f \quad \text{auf} \quad (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit f gleich

```
f = (x<=0.5).*(2*x) + (x>0.5).*(2-2*x)
f = 100*(x-1/3).^2.*(x-2/3).^2
f = -100*(x.*(x-1).*(x-1/3).*(x-2/3))+1
f = sin(2*pi*x)
```

Die Aufgabe besitzt eine Lösung im Raum

$$V = \{ v \,/\, v \in H^1_0[0,1] \ \text{mit}\ v(0) = v(1) = 0 \}.$$

Zur Approximation der Lösung wählen wir die Räume

$$V_h = \text{span}\ \{\ \sin(i\,\pi\,x)\ \}_{i=1}^{N}$$

Untersuchen Sie:

- Die Besetzung der Matrizen
- Die Kondition der Matrizen
- Der Abfall der gesuchten Koeffizienten

und geben Sie eine Näherungslösung an.

Aufgabe 9.3
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-u'' = f \qquad \text{auf} \qquad (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit f gleich

```
f = (x<=0.5).*(2*x) + (x>0.5).*(2-2*x)
f = 100*(x-1/3).^2.*(x-2/3).^2
f = -100*(x.*(x-1).*(x-1/3).*(x-2/3))+1
f = sin(2*pi*x)
```

Die Aufgabe besitzt eine Lösung im Raum $V = \{\ v\ /\ v \in H_0^1[0,1]\ \}$.
Zur Approximation der Lösung wählen wir die Räume

$$V_h = \text{span}\ \{\ \varphi_i\ \}_{i=1}^{N}$$

mit den stückweise affinen linearen Funktionen

$$\varphi_j(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h} & , \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j] \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h} & , \text{falls } x \in (x_j, x_{j+1}) \qquad j = 1,\dots, N \\ 0 \quad \text{sonst} & \end{cases}$$

Dabei sei $x_j = jh$ mit $h = 1/N$

Untersuchen Sie:

- Die Besetzung der Matrizen
- Die Kondition der Matrizen
- Die gesuchten Koeffizienten

und geben Sie eine Näherungslösung an.