Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK
SS08

Abgabe: 30.5.2008

Aufgabe 7.1
Ein einfaches Modell für eine isotherme chemische Reaktion führt auf die Randwertaufgabe

$$- y'' + \lambda y = \lambda, \qquad \lambda > 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Der Operator $L : V \to R$ mit $Ly = - y'' + \lambda y$ auf $V = \{ y \,/\, y \in C_0^2 [0,1] \}$ ist von Monotoner Art und für die eindeutigen Lösungen der Randwertaufgaben gilt

1. $0 \le y_\lambda \le 1$
2. $y_\lambda(t) = y_\lambda(1-t)$
3. $0 \le y_\lambda(t) \le y_\mu(t) \le 1, \quad \lambda \le \mu$.

Zeige numerisch:
Die kanonische Diskretisierung

$$-\frac{(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{h^2} + \lambda y_i = \lambda$$

führt auf eine Aufgabe von Monotoner Art und die diskreten Lösungen haben die oben angegebenen Eigenschaften der kontinuierlichen Lösungen.
Wähle die Schrittweite h = 0.1 und λ = 10, 20, 30, 300, 10000. Vergleiche die Näherungslösungen mit der exakten Lösung.

Aufgabe 7.2
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$- y'' = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0 \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \int_0^x \exp(-s^2/2)ds .$$

Finden Sie mit den Mitteln der Vorlesung eine obere und eine untere Schranke für die Lösung der Randwertaufgabe an der Stelle x = 0.5.

Aufgabe 7.3
Der einfachste Fall einer Advektions-Diffusionsgleichung (Bürgers) ist

$$- \varepsilon\, y'' + v(x)\, y' = v(x) \qquad \text{mit} \quad \varepsilon > 0 .$$
$$y(0) = y(1) = 0.$$

Diese Aufgaben sind (unabhängig von ε) von Monotoner Art.
Die Aufgabe soll für v = 1 mit der Schrittweite h = 0.1 und verschiedenen ε = 1/10, 1/ 20, 1/30, 1/300, 1/10000 mit drei verschiedenen Verfahren integriert werden:

1. $-\varepsilon\frac{(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})}{h^2}+v(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h})=v$ (Klassisch)

2. $-\varepsilon\frac{(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})}{h^2}+v(\frac{y_i-y_{i-1}}{h})=v$ (Upwind)

3. $-(\frac{h}{2}v\coth(\frac{h}{2\varepsilon}v))\frac{(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})}{h^2}+v(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h})=v$ (Iljin)

Welche Verfahren führen auf Matrizen von Monotoner Art? Vergleichen Sie die Näherungslösungen. Was für ein Vorzug hat das dritte Verfahren?