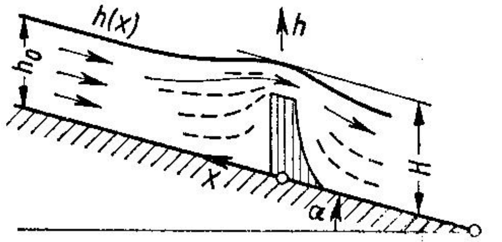
Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK
SS08

Abgabe: 9.5.2008

Aufgabe 5.1
Die Oberflächenform im Längsschnitt einer gestauten Wasserströmung in einem seichten Bett von parabolischem Querschnitt genügt der Differentialgleichung

$$h' = - \text{Alpha}\left(1 - (h_0/h)^4\right), \quad h(0) = H.$$

Alpha ist das als klein angenommene Gefälle, $h(x)$ die jeweilige Höhe im Abstand x vom Wehr, h_0 die Höhe in großer Entfernung vom Wehr, $H = h(0)$ die Höhe am Wehr.
(L. Collatz - Differentialgleichungen)



Oberflächenform im Längsschnitt einer gestauten Wasserströmung

Man integriere die Differentialgleichung für x = 0 bis 60 mit $h_0 = 1$, H = 1.1 und Alpha = 0.1 mit dem üblichen ode45. Plotten Sie das Bild (!).
Natürlich ist es sehr unwahrscheinlich, dass die numerische Integration die exakte Lösung liefert. Wahrscheinlich ist, dass sich die numerische Lösung zeitweise unterhalb und oberhalb der Lösung befindet.
Bei gleicher Anfangsbedingung liefert (Differentialungleichung)

$$h' = - \text{Alpha}\left(1 - ((h_0 \pm a)/h)^4\right), \quad 1 > a > 0, \quad h(0) = H > 0.$$

eine obere bzw. untere Schranke der ursprünglichen Aufgabe.
Integrieren Sie diese Aufgaben mit ode45 und a = 0.01. Die Behauptung ist nun, dass diese numerischen Lösungen (zumindest unter numerischen Aspekten) eine obere bzw. untere Schranke für die Lösung der ursprünglichen Aufgabe liefern.
Tipp:
Die numerischen Lösungen y_{num} sind an diskreten Punkten aus [0,60] bekannt. Lineare Interpolation von benachbarten Punkten liefert eine Funktion auf ganz [0,60]. Diese interpolierenden Funktionen y^i haben eine rechtzeitige Ableitung und für diese muss dann

$$D^+y^i(x) + \text{Alpha}\left(1 - (h_0/h(x))^4\right) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \leq 0,$$

nachgeprüft werden.

Aufgabe 5.2
Wir betrachten erneut die Differentialgleichung aus Aufgabe 5.1

$$h' = f(h) = -\,\text{Alpha}(\,1 - (h_0/h)^4), \quad h(0) = H.$$

Die Funktion hat für alle positiven u,v die Eigenschaft $(f(u) - f(v))(u - v) \le 0$. Deshalb nimmt auch die Differenz von Lösungen mit zunehmendem $x > 0$ nicht zu.
Da es sich hier um ein relativ harmloses Problem handelt, kann man dieses mit den üblichen Integratoren von MATLAB auch schnell verifizieren. Führen Sie dieses ($h_0 = 1$, Alpha = 0.1) mit ode45 und den Anfangsbedingungen h(0) = 1 und 1.1 durch.
Es sei u(.) die Lösung der Differentialgleichung mit u(0) = 1.1 und v(.) die Lösung mit v(0) = 1.
Dann gilt

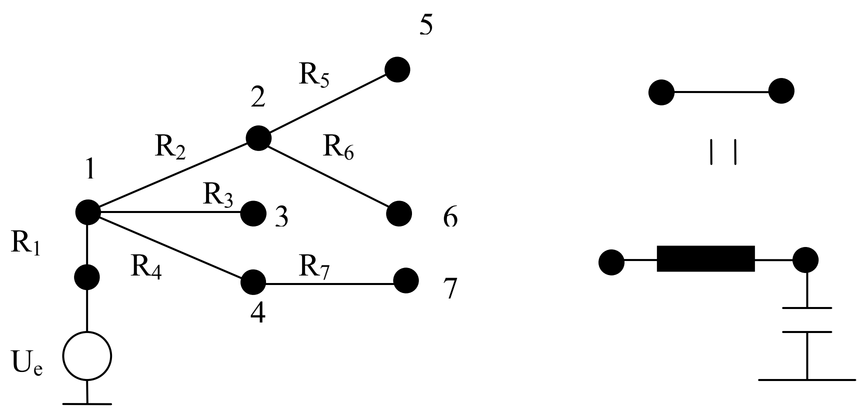
$$\frac{d}{dx}(0.5(u-v)^2) \le -3\,(u-v)^2 \qquad \text{mit} \qquad |\,u(0) - v(0)| = 0.1$$

und mithin

$$|\,u(x) - v(x)\,| \le 0.1\,\exp(-3x).$$

Wird nun die Differenz der mit MATLAB ermittelten Näherungslösungen mit (1/0.1)exp(3x) Multipliziert, dann müssten Werte kleiner als 1 auftreten. Dieses ist nicht der Fall (!). Was schließen Sie daraus?

Aufgabe 5.3
Es soll das Laufzeitverhalten für den RC-Baum



mit der vorgestellten Methode Eigenwertmethode behandelt werden.
Die Werte der einzelnen Widerstände (kΩ) betragen dabei

$$R_1 = 5,\; R_2 = 1,\; R_3 = 2,\; R_4 = 3,\; R_5 = 2,\; R_6 = 0.5,\; R_7 = 2$$

und die Kapazitäten (pF) haben alle den Wert 1 bis auf $C_2 = 2$.

Zum Zeitpunkt t = 0 wird die Spannungsquelle $U_e(t)$ von 0V auf 1V eingeschaltet. Die Anfangspotentiale an allen Knoten seien zum Zeitpunkt t = 0 allesamt gleich Null.

Bestimmen Sie eine „gute" obere und untere Schranke für das Potential an den Knoten 1 und 7. Die Knotenpotentiale p_1, ... , p_7 werden durch eine Differentialgleichung der Form

$$C\,p' + Gp = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.
Ausgedruckt werden soll der Bereich zwischen t gleich Null und 250 ns.
Fügen Sie noch einen Widerstand R_8 = 2 zwischen den Knoten 5 und 6 ein. Ergeben sich wesentliche Änderungen?