

# Theorie und Numerik von Differentialgleichungen mit MATLAB und SIMULINK

K. Taubert  
Universität Hamburg  
SS08

## Stabilität und Simulink II

### 4 STABILITÄTSANALYSEN FÜR LINEARE ÜBERTRAGUNGSGLIEDER. ANALYSE TOOLS FÜR SIMULINK

Übertragungsglieder führen im Frequenzraum auf elegante Methoden zur Bestimmung des Stabilitätsverhaltens insbesondere bei linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten oder den entsprechenden Regelungssystemen. Die Bestimmung periodischer Lösungen bei periodischer Anregung wird erleichtert und hat eine einfache Interpretation.

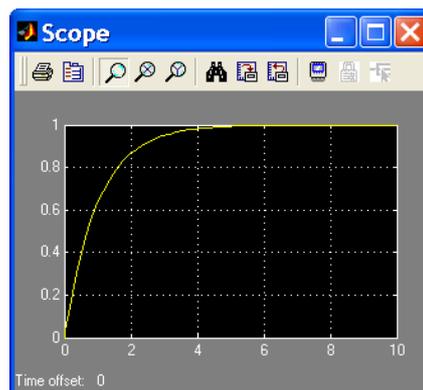
SIMULINK-Modelle können von der MATLAB-Oberfläche aus analysiert und verändert werden. Von MATLAB aus können z.B. die Parameter der SIMULINK-Modelle überschrieben werden (simset) oder eine Simulation gestartet werden (sim). Auch stationäre Zustände können ermittelt werden (trim) oder die Systeme an vorgegebenen Stellen linearisiert werden (linmod). Nützlich sind diese Tools u.a. für die qualitative Analyse von Differentialgleichungen.

#### § 4.1 Eigenschaften eines PT<sub>1</sub>-Gliedes

Ein PT<sub>1</sub>-Glied führt auf die Differentialgleichung

$$Ty' + y = u, \quad T > 0.$$

Mit der Funktion oder „Störung“  $u(t) = kH(t)$ ,  $k > 0$ , und der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$  hat die zugehörige Anfangswertaufgabe die Lösung (Sprungantwort)  $y(t) = k(1 - e^{-(t/T)})$ .



D.h.  $u(t) = H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$  wird in sein  $k$ -faches überführt, jedoch mit einer gewissen Verzögerung. Aus dieser Funktionalität ergibt sich, dass  $PT_1$ -Glieder auch als

„Proportionalglieder mit Verzögerung erster Ordnung“

bezeichnet werden.

Gegeben sei nun die Differentialgleichung

$$Ty' + y = A \cos \omega t, \quad T > 0, \quad A \neq 0, \quad \omega > 0.$$

Die  $\omega$ -periodische Lösung dieser Differentialgleichung kann mit Hilfe des Ansatzes

$$\hat{y}(t) = \hat{B} e^{i\omega t}, \quad \hat{B} \in \mathbb{C}$$

und der Darstellung  $A \cos \omega t = \operatorname{Re}(A e^{i\omega t})$  ermittelt werden:

Aus

$$i\omega T \hat{B} e^{i\omega t} + \hat{B} e^{i\omega t} = A e^{i\omega t}$$

folgt

$$i\omega T \hat{B} + \hat{B} = A \quad \text{oder} \quad \hat{B} = \frac{A}{T i \omega + 1} = .AB.$$

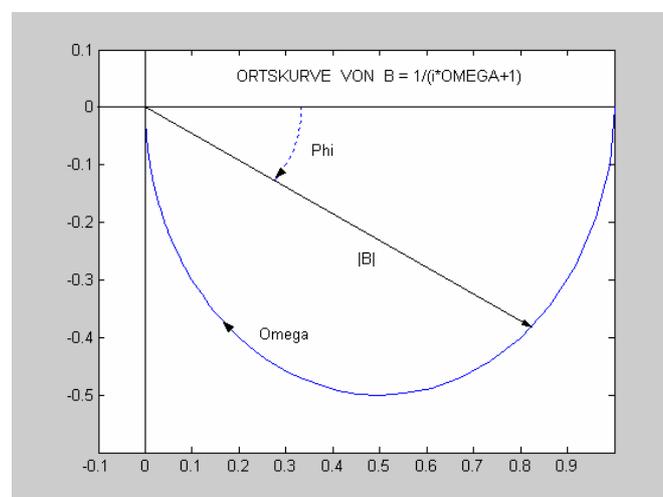
Die Darstellung  $B = |B| e^{-i\varphi}$  liefert dann die reelle periodische Lösung

$$y(t) = |B| A \cos(\omega t - \varphi).$$

Die gesuchte periodische Lösung ergibt sich mithin aus der „Anregung“  $A \cos(\omega t)$  durch eine Amplitudenverstärkung ( $A \rightarrow |B| A$ ) und eine Phasenverschiebung ( $\omega t \rightarrow \omega t - \varphi$ ). Die Verstärkung und die Amplitudenverschiebung ergeben sich unmittelbar aus  $B$ .

Die Funktion

$$\omega \rightarrow \frac{1}{T i \omega + 1}, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$



wird häufig auch als „Ortskurve“ bezeichnet.

D.h. mit zunehmender Frequenz  $\omega$  strebt die Amplitudenverstärkung  $|B(\omega)|$  gegen Null. Aus dieser Funktionalität ergibt sich, dass PT<sub>1</sub>-Glieder auch als

„Tiefpässe erster Ordnung“

bezeichnet werden.

**Beachte:**

Eine Anwendung der Laplace-Transformation auf die Gleichung

$$Ty' + y = A \cos \omega t, \quad T > 0, \quad A \neq 0, \quad \omega > 0$$

liefert

$$L(y) = \frac{A}{Ts + 1} L(\cos(\omega t))$$

und die „Ortskurve“ entsteht dadurch, dass in der Übertragungsfunktion  $s$  durch  $i\omega$  ersetzt wird.

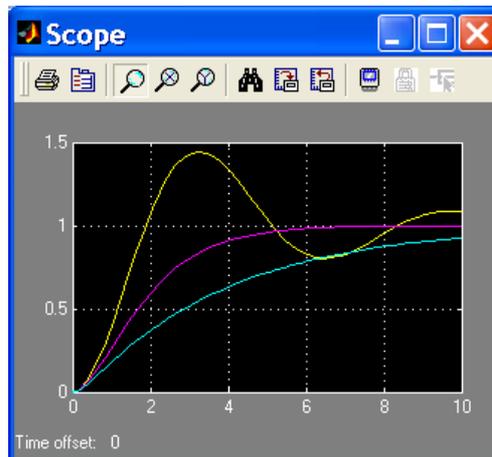
### § 4.2 Eigenschaften eines PT<sub>2</sub>-Gliedes

Ein PT<sub>2</sub>-Glied führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\omega_0^2} y'' + \frac{2D}{\omega_0} y' + y = u, \quad 0 < D < \infty, \quad \omega_0 > 0.$$

Wir betrachten diese Differentialgleichung jetzt mit der „Störung“  $u(t) = kH(t)$ ,  $k > 0$ , und den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

Für die Fälle  $0 < D < 1$ ,  $D = 1$  und  $D > 1$  kann die qualitative Form der Lösungen (Sprungantworten) aus den folgenden Bild entnommen werden:



D.h.  $u(t) = H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$  wird wieder in sein  $k$ -faches überführt, aber auch hier mit einer gewissen Verzögerung. Aus dieser Funktionalität ergibt sich, dass PT<sub>2</sub>-Glieder auch als

„Proportionalglieder mit Verzögerung zweiter Ordnung“

bezeichnet werden. Im Gegensatz zum PT<sub>1</sub>-Glied ist der Start hier jedoch nicht so „ruckhaft“.

Gegeben sei nun die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\omega_0^2} y'' + \frac{2D}{\omega_0} y' + y = A \cos(\omega t), \quad 0 < D < \infty, \quad \omega_0 > 0, \quad \omega > 0.$$

Ähnlich wie beim PT<sub>1</sub>-Glied kann die  $\omega$ -periodische Lösung dieser Differentialgleichung auch mit Hilfe des Ansatzes

$$\hat{y}(t) = \hat{B} e^{i\omega t}, \quad \hat{B} \in \mathbb{C}$$

und der Darstellung  $A \cos \omega t = \operatorname{Re}(A e^{i\omega t})$  ermittelt werden:

Aus

$$\frac{(i\omega)^2}{\omega_0^2} \hat{B} e^{i\omega t} + \frac{i\omega 2D}{\omega_0} \hat{B} e^{i\omega t} + \hat{B} e^{i\omega t} = A e^{i\omega t}$$

folgt

$$\frac{(i\omega)^2}{\omega_0^2} \hat{B} + \frac{i\omega 2D}{\omega_0} \hat{B} + \hat{B} = A \quad \text{oder} \quad \hat{B} = \frac{A}{\frac{(i\omega)^2}{\omega_0^2} + i\omega \frac{2D}{\omega_0} + 1} =: AB.$$

Die Darstellung  $B = |B| e^{-i\varphi}$  liefert dann die gesuchte reelle periodische Lösung

$$y(t) = |B| A \cos(\omega t - \varphi)$$

D.h. die gesuchte periodische Lösung ergibt sich auch hier durch eine Amplitudenverstärkung ( $A \rightarrow |B| A$ ) und eine Phasenverschiebung ( $\omega t \rightarrow \omega t - \varphi$ ) und die gesuchten Größen können wieder aus der „Ortskurve“

$$\omega \rightarrow \frac{1}{\frac{(i\omega)^2}{\omega_0^2} + i\omega \frac{2D}{\omega_0} + 1},$$

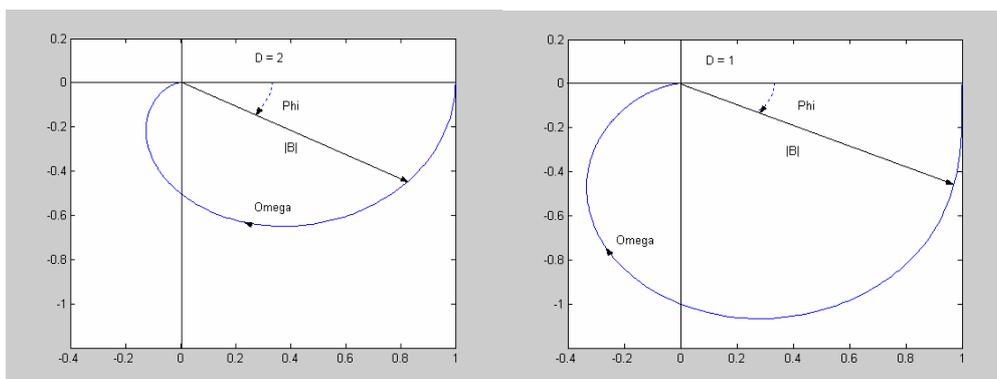
entnommen werden.

Mit zunehmender Frequenz  $\omega$  strebt die Amplitudenverstärkung  $|B(\omega)|$  gegen Null, d.h. hohe Frequenzen werden gedämpft. Aus dieser Funktionalität ergibt sich, dass PT<sub>2</sub>-Glieder auch als

„Tiefpässe zweiter Ordnung“

ezeichnet werden.

Es können allerdings zwei Fälle unterschieden werden:



Für  $0 < D < 1/\sqrt{2}$  liegt, für niedrige Frequenzen, eine echte Verstärkung der Amplitude vor!

### § 4.3 Stabilitäts- und Frequenzverhalten von $PT_n$ -Gliedern

Die lineare homogene Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0, \quad a_n \neq 0$$

heißt asymptotisch stabil, wenn für alle Lösungen gilt

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Die Forderung nach der asymptotischen Stabilität ist gleichbedeutend damit, dass die Nullstellen der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0,$$

ausschließlich Nullstellen mit negativen Realteilen besitzt.

Eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u, \quad a_n \neq 0 \quad (*)$$

deren homogener Anteil asymptotisch stabil ist, wird auch als  $PT_n$ -Glieder bezeichnet.

#### Aufgabe 4.1:

Gegeben sei ein  $PT_n$ -Glieder und es sei  $u(t) = kH(t)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Zeige: Für alle Lösungen der Differentialgleichung gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k.$$

#### Aufgabe 4.2:

Gegeben sei ein  $PT_n$ -Glieder und es sei  $u(t) = A \cos(\omega t)$  und  $\omega, A > 0$ . Zeige: Eine periodische Lösung hat dann die Gestalt

$$y(t) = |B| A \cos(\omega t - \varphi).$$

Dabei ergibt sich  $B$  und  $\varphi$  aus der „Ortskurve“  $1/F(i\omega)$ .

#### Definition

Ein Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

heißt stabil, wenn alle seine Wurzeln einen negativen Realteil haben.

#### Satz

Notwendig für die Stabilität eines Polynoms

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

ist, dass alle Koeffizienten ungleich Null und von einheitlichen Vorzeichen sind.

### Bemerkung

Für  $n=1,2$  ist die Bedingung auch hinreichend. Für  $n \geq 3$  ist die Bedingung nicht mehr hinreichend. Dieses zeigt das einfache Beispiel

$$z^3 + z^2 + 4z + 30 = (z+3)(z-1+3i)(z-1-3i).$$

### Beweis:

Die Koeffizienten seien alle positiv, dann gilt

$$p(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n), \quad a_n > 0.$$

Sind alle Wurzeln reell und negativ, dann ist die Behauptung richtig. Gibt es ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln, dann ergibt sich die Behauptung aus

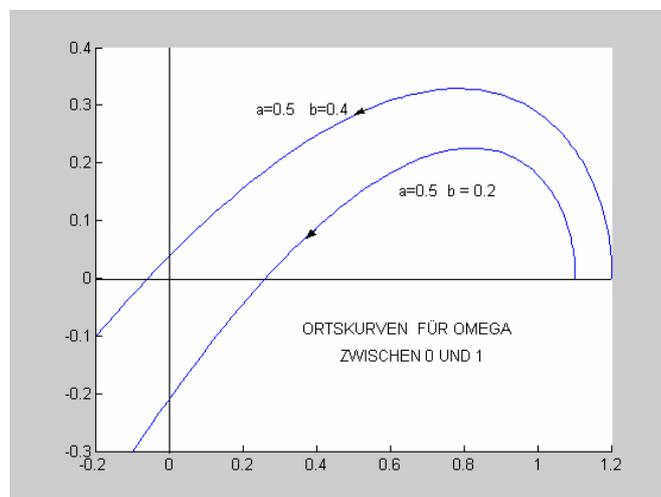
$$(z-a+ib)(z-a-ib) = z^2 - 2az + b^2 + a^2$$

### Satz (Ortskurvenkriterium)

Notwendig und hinreichend für die Stabilität eines Polynoms  $p(z)$   $n$ -ten Grades ist: Die Abbildung  $p(i\omega)$  verläuft für  $0 \leq \omega < \infty$  nicht durch den Ursprung und führt mit zunehmendem  $\omega$  eine Phasendrehung von  $n\pi/2$ , im mathematisch positiven Sinne, durch.

### Beispiele

Betrachte das Polynom  $p(z) = z^3 + (b+1)z^2 + (b+a)z + ab+1$ . Das folgende Bild zeigt, für die Paare  $(a,b) = (0.5, 0.2)$  und  $(0.5, 0.4)$ , die Ortskurven im Bereich  $0 \leq \omega \leq 1$ . Für  $b = 0.4$  liegt eine Phasendrehung von  $(3/2)\pi$  vor. Für  $b = 0.2$  liegt eine Phasendrehung von  $-(1/2)\pi$  vor. Für ein  $b$  zwischen  $0.2$  und  $0.4$  liegt offenbar auch ein Nulldurchgang vor.



### Beweis des Satzes:

(Stabil  $\Rightarrow$  Phasendrehung von  $n\pi/2$ )

Alle Wurzeln seien zunächst reell und negativ. In diesem Fall gilt

$$p(z) = a_n(z-x_1)(z-x_2) \dots (z-x_n) \quad \text{mit } x_i < 0$$

oder

$$p(z) = a_n |(z-x_1)| e^{i\varphi(z-x_1)} |(z-x_2)| e^{i\varphi(z-x_2)} \dots |(z-x_n)| e^{i\varphi(z-x_n)}$$

Für  $z = i\omega$ ,  $0 \leq \omega < \infty$  durchläuft  $\varphi(z - x_i)$  einen Winkel von  $\pi/2$  und somit  $p(i\omega)$  insgesamt einen Winkel von  $n\pi/2$ .

Gibt es ein Paar  $(z_j, \bar{z}_j)$  konjugiert komplexer Wurzeln mit einem negativen Realteil, dann durchläuft  $\varphi(z - z_j)$ , für  $z = i\omega$  und  $0 \leq \omega < \infty$ , einen Winkel von  $\pi/2 + \psi$  und  $\varphi(z - \bar{z}_j)$  einen Winkel von  $\pi/2 - \psi$ . Jedes Paar von konjugiert komplexen Wurzeln liefert mithin eine Phasendrehung um  $2\pi/2$ . Damit ist der Beweis erbracht.

(Phasendrehung von  $n\pi/2 \Rightarrow$  Stabil)

Liegt eine Wurzel mit einem positiven Realteil vor, dann kann die Phasendrehung insgesamt nicht  $n\pi/2$  ergeben. Liegen Wurzeln auf der imaginären Achse vor, dann durchläuft  $p(i\omega)$  den Nullpunkt.

### Bemerkungen

Die Laplace – Transformierte der Lösung einer allgemeinen Differentialgleichung

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u, \quad a_n \neq 0 \quad (*)$$

mit homogenen Anfangsbedingungen ist gegeben durch

$$L(y) = \frac{1}{F(s)} L(u),$$

mit der Übertragungsfunktion  $1/F$ .

Die Übertragungsfunktion liefert also nicht nur eine kompakte Beschreibung der Differentialgleichung sondern u.a. auch Informationen über die Stabilität der Differentialgleichung und Eigenschaften seiner periodischen Lösungen

## § 4.4 Einige Analyse Tools

Mit dem MATLAB-Kommando

$$[sizes, x0, states] = model([], [], [], 0)$$

kann ein Überblick über die verschiedenen Variablen und Werte eines SIMULINK-Modells (hier: model) gewonnen werden.

Der sizes-Vektor hat 7 Komponenten. Wichtig für uns ist zunächst die erste Komponente  $sizes(1)$ . Diese gibt die Anzahl der (kontinuierlichen) Zustandsvariablen des Systems an.

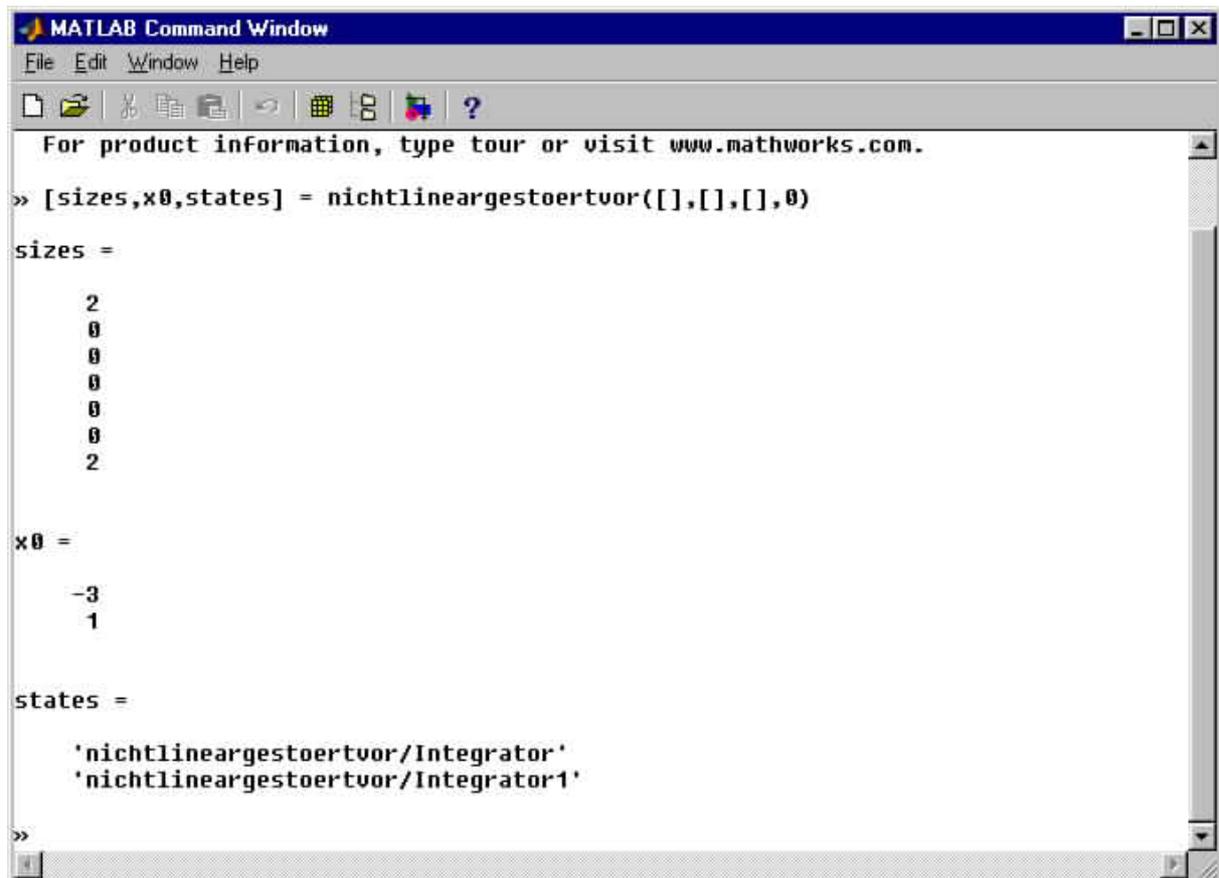
Der Vektor  $x0$  enthält die Anfangsbedingungen des Systems.

Unter  $states$  findet sich der Platz der Variablen im SIMULINK-Modell.

Der Aufruf

$$[sizes, x0, states] = nichtlineargestoertvor([], [], [], 0),$$

für das später aufgeführte Modell `nichtlineargestoertvor`, liefert



```

MATLAB Command Window
File Edit Window Help
For product information, type tour or visit www.mathworks.com.
>> [sizes,x0,states] = nichtlineargestoertvor([],[],[],0)

sizes =

     2
     0
     0
     0
     0
     0
     2

x0 =

    -3
     1

states =

    'nichtlineargestoertvor/Integrator'
    'nichtlineargestoertvor/Integrator1'
  
```

D.h. das System hat zwei kontinuierliche Zustandsvariable die zu den Blöcken Integrator und Integrator1 gehören und deren Anfangsbedingungen zu -3 und 1 gesetzt sind.

Mit dem Kommando sim kann eine Simulation eines SIMULINK-Modells von der MATLAB-Oberfläche gestartet werden.

Die Syntax des sim Kommandos ist

$$[t,x,y] = \text{sim}(\text{model}, \text{Timespan}, \text{Options}, \text{ut})$$

mit den optionalen Parametern

- t      Zeitvariable
- x      Zustandsvariable
- y      Ausgangsvariable

Das erste Argument model im sim-Kommando ist ein MATLAB String mit den Namen des SIMULINK-Modells.

Timespan kann z.B. wie folgt besetzt werden:

[OutputTimes]      =      Vektor mit mindestens drei Komponenten. Ein wohl üblicher Vektor wäre [Tstart:TimeSpacing:Tfinal].

Durch Options können die Simulationsparameter des Modells von der MATLAB-Ebene überschrieben werden. Options werden mit dem Simset-Kommando aufgebaut und haben die Syntax

```
Options = simset( 'Name1', Wert1, 'Name2', Wert2, .....).
```

Die zulässigen Namen\_ und deren aktuellen Einstellungen Wert\_ können für ein SIMULINK-Modell mit den Namen model durch

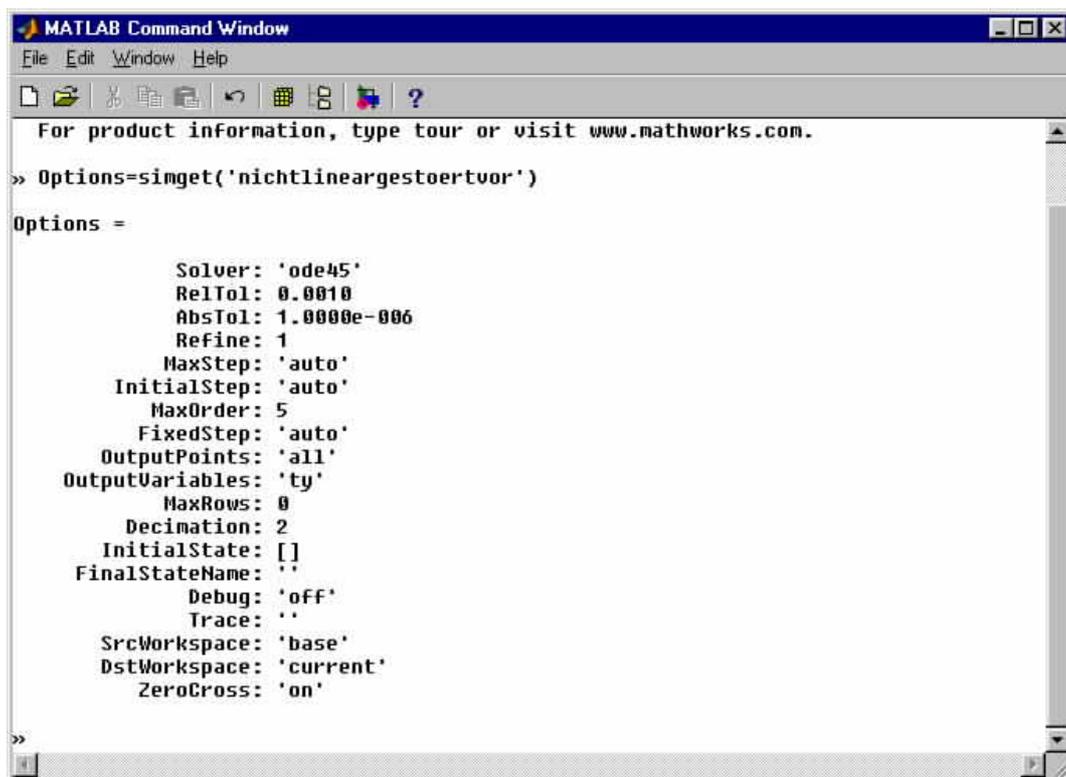
```
Options = simget('model')
```

aufgerufen werden.

Der Aufruf

```
Options = simget('nichtlineargestoertvor')
```

ergab z.B.



```
MATLAB Command Window
File Edit Window Help
For product information, type tour or visit www.mathworks.com.
>> Options=simget('nichtlineargestoertvor')
Options =
    Solver: 'ode45'
    RelTol: 0.0010
    AbsTol: 1.0000e-006
    Refine: 1
    MaxStep: 'auto'
    InitialStep: 'auto'
    MaxOrder: 5
    FixedStep: 'auto'
    OutputPoints: 'all'
    OutputVariables: 'ty'
    MaxRows: 0
    Decimation: 2
    InitialState: []
    FinalStateName: ''
    Debug: 'off'
    Trace: ''
    SrcWorkspace: 'base'
    DstWorkspace: 'current'
    ZeroCross: 'on'
>>
```

Der noch fehlende Parameter ut im sim-Kommando betrifft die Festlegung von Simulationspunkten.

Nützlich und wichtig kann sein, daß von der MATLAB-Ebene die SIMULINK-Modelle aufgerufen werden und Ergebnisse der Simulation verarbeitet werden können.

Der folgende M-File [2]

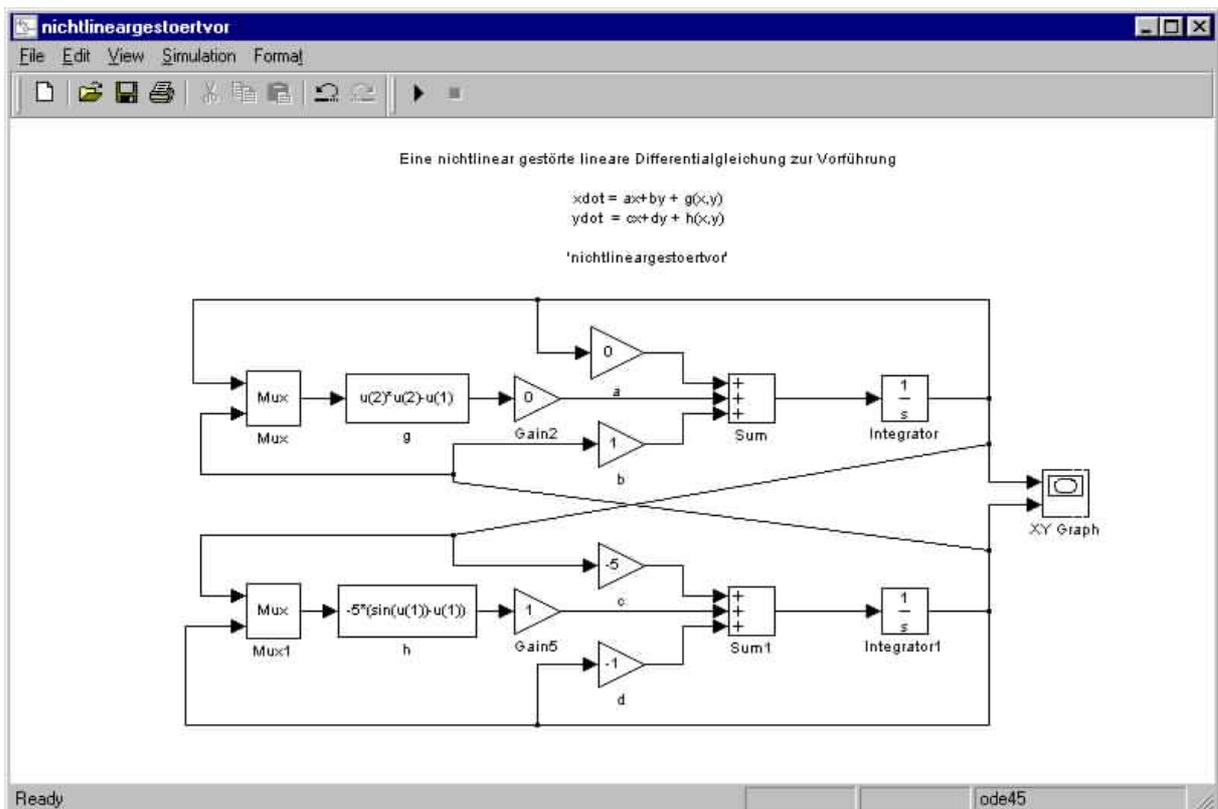
```

MATLAB Editor/Debugger
File Edit View Debug Tools Window Help
Stack:
phasenportraet.m - A:\phasenportraet.m
%Erzeugung eines Phasenplots für nichtlineargestoertvor.mdl
for x1 = -1:0.5:1
    for x2 = -1:0.5:1
        opts = simset('Initialstate', [x1,x2]);
        [t,x,y] = sim('nichtlineargestoertvor',15,opts);
        hold on;
        plot(x(:,1),x(:,2));
    end
end
axis([-1,1,-1,1]);
xlabel('x1');
ylabel('x2');
grid;
phasenportr...
Ready Line 5 10:23 AM

```

erzeugt z.B. ein Phasenplot für ein System von 2 Differentialgleichungen.

Das SIMULINK-Modell nichtlineargestoertvor (mit d = 0)



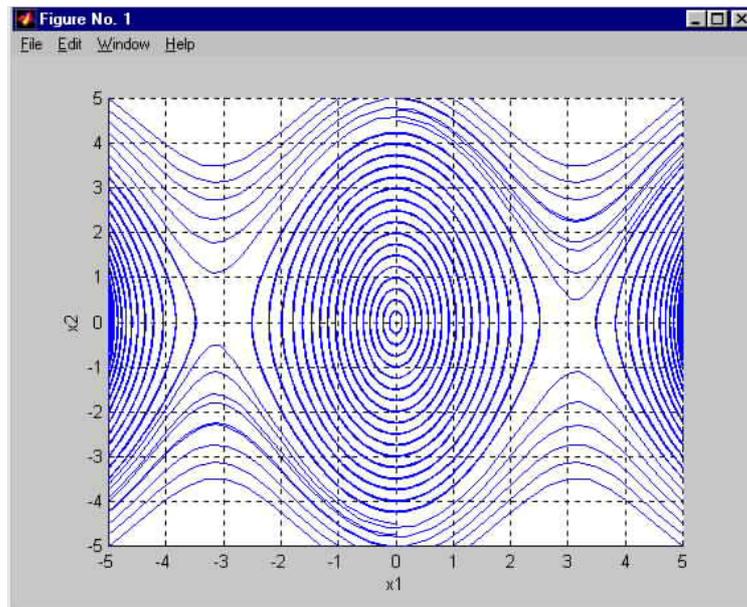
und der Aufruf des M-Files mit folgenden Festsetzungen

```

x1 = -5 : 5 : 5
x2 = -5 : 0.25 : 5
axis([-5,5,-5,5])

```

liefert dann das folgende Phasendiagramm



#### § 4.5 Bemerkungen zur qualitativen Behandlung von Differentialgleichungen mit SIMULINK

Im § 2 hatten wir gesehen, dass manchmal Aussagen über das Verhalten von Lösungen, von Systemen von Differentialgleichungen

$$z' = f(z)$$

in einer Umgebung von Gleichgewichtspunkten  $z_0$ , über das linearisierte System oder der ersten Variation

$$z' = f_z(z_0) * z$$

möglich sind.

MATLAB unterstützt diese qualitativen Untersuchungen, indem für SIMULINK-Modelle ein Tool (trim) zur Bestimmung von Gleichgewichtspunkten (Nullstellen) und ein Tool (linmod) zur Bestimmung der Matrix des linearisierten Systems oder der ersten Variation zur Verfügung stellt. Die noch fehlenden Informationen über die Eigenwerte ergeben sich dann mit dem Kommando eig aus MATLAB.

Liegt also ein SIMULINK-Modell für die erst genannte Differentialgleichung mit (z.B.) dem Namen Nichtlinear vor, dann ergibt der Aufruf

$$z_0 = \text{trim}(\text{'Nichtlinear'}, v_0)$$

mit dem Startwert  $v_0$ , einen möglichen Gleichgewichtspunkt  $z_0$ . Andere Startpunkte liefern unter Umständen auch weitere Gleichgewichtspunkte.

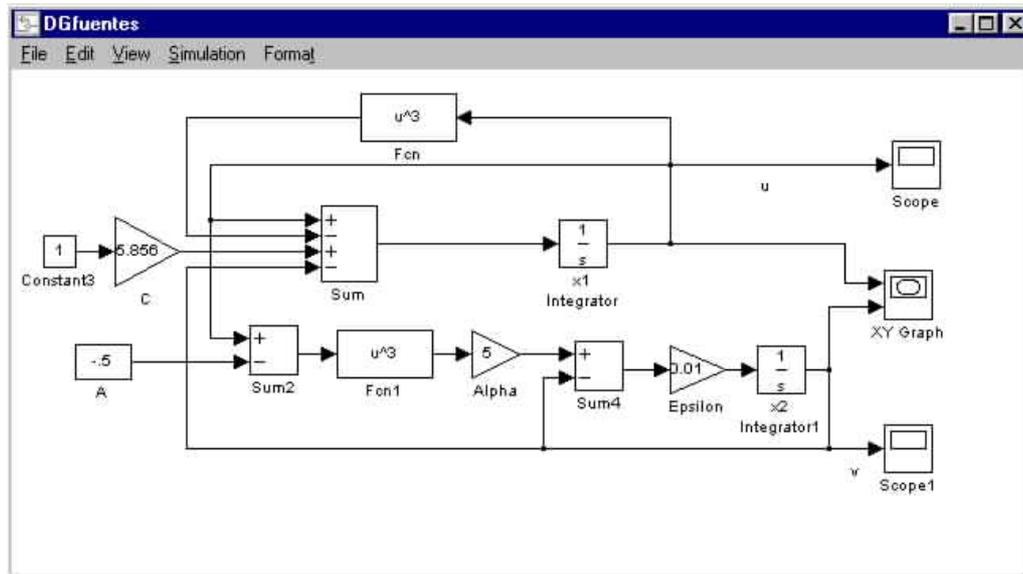
Der Aufruf

$$[A \ B \ C \ D] = \text{linmod}(\text{'Nichtlinear'}, z_0)$$

liefert die Funktionalmatrix  $f_z(z_0)$  als Matrix A.

## Ein Beispiel

Für die Differentialgleichung aus § 1 und den zugehörigen SIMULINK-Modell DGfuentes



und  $C = 5.856$  liefert der MATLAB Aufruf

```
x = trim('DGfuentes')           %Nullstelle
[A B C D] = linmod('DGfuentes',x) % A = Funktionalmatrix an der Nullstelle
```

```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
Current Directory: C:\programme\MATLAB\work

Command Window

This is a Classroom License for instructional use only.
Research and commercial use is prohibited.
Using Toolbox Path Cache. Type "help toolbox_path_cache" for more info.

To get started, select "MATLAB Help" from the Help menu.

>> x = trim('DGfuentes')
x =
    0.5767
    6.2409

>> [A B C D] = linmod('DGfuentes',x)
A =
    0.0023   -1.0000
    0.1739   -0.0100

B =
Empty matrix: 2-by-0

C =
Empty matrix: 0-by-2

D =
[]
    
```

Der MATLAB-Aufruf `Eig(A)` liefert schließlich die Eigenwerte von A

$$-0.0039 + 0.4170i \quad \text{und} \quad -0.0039 - 0.4170i.$$

Eine Wiederholung des Aufrufes, dieses Mal mit  $C = 5.8$ , liefert

```

MATLAB
File Edit View Web Window Help
Current Directory: C:\programme\MATLAB\work

Command Window
Research and commercial use is prohibited.
Using Toolbox Path Cache. Type "help toolbox_path_cache" for more info.

To get started, select "MATLAB Help" from the Help menu.

>> x = trim('DGFuentes')

x =

    0.5735
    6.1849

>> [A B C D] = linmod('DGFuentes',x)

A =

    0.0134   -1.0000
    0.1728   -0.0100

B =

Empty matrix: 2-by-0

C =

Empty matrix: 0-by-2

D =

[]

>>
  
```

Die Eigenwerte von A sind in diesem Fall

$$0.0017 + 0.4156i \quad \text{und} \quad 0.0017 - 0.4156i.$$

Schnell überzeugt man sich nun davon, daß beim Übergang von  $C = 5.856$  zu  $C = 5.8$  ein  $(z_0, C_0)$  existieren muß, für das die zugehörige Funktionalmatrix A ein Paar von rein imaginären Eigenwerten haben muß. Es spricht also viel dafür, dass eine Hopf-Verzweigung vorliegt und mithin eine periodische Lösung der Differentialgleichung existiert.

#### Literatur

- [1] Coddington, E.A., Levinson, N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill. 1955. S 1-429
- [2] Dabney, J.B., Harman, T.L. Mastering SIMULINK2. The Matlab Curriculum Series. Prentice Hall 1998. S. 1-345