Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Partielle Differentialgleichungen

3 EINFÜHRENDE BEISPIELE

Zwei typische partielle Differentialgleichungen werden in Ihren klassischen und schwachen Formulierungen eingeführt und exemplarisch behandelt. Die einfachen Beispiele zeigen, dass auch gewöhnliche Anfangs- und Randwertaufgaben schnell ins Spiel kommen können.
Die Beispiele zeigen auch, dass eine Befassung mit der numerischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen ein wesentlicher Bestandteil der numerischen Behandlung von partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen sein muss.

§ 3.1 Die Horizontalmethode

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$u_t - u_{xx} = \sin(x), \quad 0 < t < 1, \; 0 < x < \pi$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Die Lösung dieser Aufgabe kann explizit angegeben werden, nämlich:

$$u(x,t) = (1 - e^{-t})\sin(x).$$

Dieses hat den Vorteil, dass die Ergebnisse der Horizontalmethode unmittelbar mit der Lösung der Anfangsrandwertaufgabe verglichen werden können.
Das Intervall $I = [0,1]$ werde z.B. in fünf Teilintervalle $I_1, \ldots, I_5$ ($I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,2,\ldots,5$) der Länge $h = 0.2$ unterteilt.
Entsprechend der Anfangsbedingung wird dann für $t = 0$

$$z_0(x) = 0$$

gesetzt.

Zu den Zeitpunkten $t_1 = 0{,}2$, $t_2 = 0{,}4$, $t_3 = 0{,}6$, $t_4 = 0{,}8$, $t_5 = 1$ werden dann sukzessive Näherungen $z_i(x)$ für $u(x,t_i)$ aus
den gewöhnlichen Randwertaufgaben

$$\frac{z_j(x) - z_{j-1}(x)}{h} - z_j^{(2)}(x) = \sin(x)$$

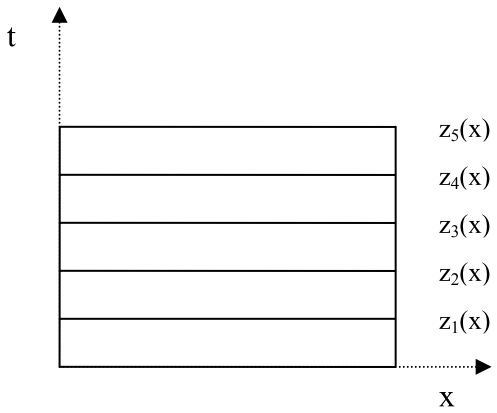
$$z_j(0) = z_j(\pi) = 0.$$

ermittelt

Beachte:
Die zeitliche Ableitung u_t zum Zeitpunkt t wird also durch einen Differenzenquotient

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h}$$

ersetzt und anstatt der ursprünglichen Aufgabe, eine endliche Anzahl von gewöhnlichen Randwertaufgaben gelöst. Es wird in diesem Fall auch von einer Semidiskretisierung gesprochen.



Für j = 1 ergibt sich

$$\frac{z_1(x) - z_0(x)}{h} - z_1^{(2)}(x) = \sin(x)$$

$$z_1(0) = z_1(\pi) = 0.$$

mit der Lösung

$$z_1(x) = (1 - \frac{1}{1+h})\sin(x).$$

Allgemein

$$z_j(x) = (1 - \frac{1}{(1+h)^j})\sin(x) \quad \text{für} \quad j = 1,2,\dots,5.$$

Eine Näherungslösung für u(x,t) zum Zeitpunkt $t \in [t_{j-1},t_j]$ könnte dann durch lineare Interpolation

$$u(x,t) \approx z_{j-1}(x) + \left(\frac{t-t_{j-1}}{h}\right)[z_j(x) - z_{j-1}(x)]$$

ermittelt werden.

Wird eine Unterteilung vom Intervall [0,1] in N, anstatt 5, Teilen vorgenommen, dann ergibt sich mit h = 1/N z.B.

$$u(x,1) \approx z_N(x) = \left(1- \frac{1}{(1+(1/N))^N}\right)\sin(x)$$

und damit auch

$$\lim_{N\to\infty} z_N(x) = u(x,1).$$

Aufgabe 3.1
Gesucht sind die Lösungen von $y'' + \pi^2 y = 0$ mit den Randbedingungen

$$y(0)=y(1)=0 \quad \text{bzw.} \quad y(0)= 0,\ y(1)=1.$$

Welche Veränderung der Randwertaufgabe führt stets zu einer eindeutigen Lösung?

§ 3.2 Die Vertikal- oder Linienmethode

Betrachtet wird die Anfangs-Randwertaufgabe

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < T$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Die zweite Ableitung u_{xx} wird jetzt durch den Differenzenquotienten

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

ersetzt.
Im Gegensatz zur Horizontalmethode wird nun nicht eine Unterteilung des Zeitintervalls sondern eine Unterteilung des räumlichen Intervalls [0,1] vorgenommen.
Mit h =1/N, $N \geq 1$, den Gitterpunkten x_i mit $x_i = ih$, $i = 0,1,\dots,N$
und den Abkürzungen $u_i = u(x_i,t)$, $f_i(t) = f(x_i,t)$, entsteht an den Gitterpunkten ein gleichwertiges System von gewöhnlichen Anfangswertaufgaben:

$$\frac{du_i}{dt} - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i(t) + R_i, \quad u_0 = u_N = 0, \quad i = 1,2,\dots,N-1$$

$$u_i(0) = u_0(x_i)$$

Durch Vernachlässigung von R_i entsteht eine lineare inhomogene Anfangswertaufgabe
mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{dz}{dt} - (1/h^2)Az = b$$

$$z(0) = z_0,$$

deren Lösung als Näherungslösung für die Anfangsrandwertaufgabe angesehen werden kann.

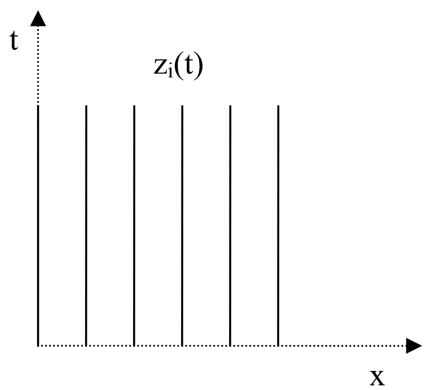
Die Matrix A hat die Form

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & . & . & . \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor b ist

$$b = (f(h,t), f(2h,t), \dots, f((N-1)h,t))$$

Es liegt ein „so genanntes“ steifes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen vor, für deren numerische Integration besondere Vorkehrungen zu treffen sind.
Wie bei der horizontalen Methode liegt auch hier wieder eine Semidiskretisierung vor, jetzt allerdings in vertikaler Richtung.



Aufgabe 3.2
Bestimmen Sie mit einem geeigneten Programm die Eigenwerte und die Kondition der Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & . & . & . & \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Verändern Sie auch die Dimension der Matrix!

§ 3.3 Eine einfache elliptische Randwertaufgabe

Gegeben sei die Dirichlet Randwertaufgabe

$$- u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \quad x,y \in \Omega,$$
$$u(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

für das Einheitsquadrat $\Omega := \{(x,y) \mid 0 < x,y < 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$ mit dem Rand $\partial\Omega$.
Ein einfaches numerisches Verfahren zur Behandlung dieser Aufgabe ergibt sich dadurch, dass die Ableitungen durch „zentrale Differenzenquotienten“ ersetzt werden:

$$u_{xx}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}$$
$$u_{yy}(x,y) \approx \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2}.$$

Mit $h = 1/(N+1)$, $N \geq 1$, den Gitterpunkten (x_i,y_j) mit $x_i = ih$ und $y_j = jh$ $i,j = 0,1,\ldots,N+1$ und den Abkürzungen $u_{ij} = u(x_i,y_j)$, $f_{ij} = f(x_i,y_j)$, entsteht an den Gitterpunkten ein gleichwertiges Gleichungssystem

$$[4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}]/h^2 = f_{ij} + R_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,N.$$

Dabei hängt der Fehler R_{ij} von der Schrittweite h ab und ist bei hinreichender Differenzierbarkeit der Lösung u von der Größenordnung $o(h^2)$ oder sogar $0(h^4)$.
Durch Vernachlässigung von R_{ij} entsteht ein lineares Gleichungssystem

$$(1/h^2)Az = b$$

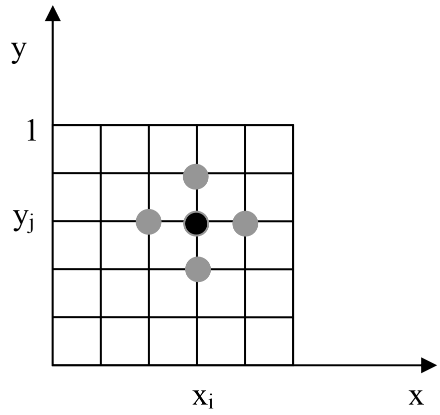
deren Lösung „mit gutem Recht“ als Näherungslösung für die Lösung der Dirichlet-Aufgabe angesehen werden kann.
Der Vektor z hat die Form

$$z = (z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{N1}, z_{12}, \ldots, z_{N2}, \ldots, z_{1N}, \ldots, z_{NN})$$

wobei die Komponenten z_{ij} Näherungen für $u(x_i,y_j)$ sind. Der Vektor b hat die Form

$$b = (f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{N1}, f_{12}, \ldots, f_{N2}, \ldots, f_{1N}, \ldots, f_{NN}).$$

Anschaulich kann man sich das Quadrat der Kantenlänge 1 mit einem Gitter überdeckt denken:



Der Näherungswert z_{ij} für $u(x_i,y_j)$ ergibt sich also aus seinen vier benachbarten Werten und f_{ij}. Die Gewichte des „Sterns" sind (-1,-1,4,-1,-1).

Die Matrix A hat die Gestalt:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
4 & -1 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
-1 & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & & & & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & & & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & -1 & & & & \cdot & & & & & & & & & & & \\
 & & & -1 & 4 & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
\hline
-1 & & & & & 4 & -1 & & & & \cdot & & & & & & & & & \\
 & \cdot & & & & -1 & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & & \\
 & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & -1 & & & & \cdot & & & & & & \\
 & & & & -1 & & & & -1 & 4 & & & & & \cdot & & & & & \\
\hline
 & & & & & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & \\
 & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & \\
 & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \\
 & & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & & -1 \\
\hline
 & & & & & & & & & & -1 & & & & & 4 & -1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & \cdot & & & & -1 & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & & & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & -1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & & & -1 & 4
\end{array}\right)
$$

wobei berücksichtigt wurde, dass die Werte am Rand durch Null gegeben sind.

Die Form der Matrix hängt ganz wesentlich von der gewählten Indizierung oder der Numerierung der Knoten (x_i,y_j) ab. Die Matrix ist sehr schwach besetzt. Außerdem hat die Matrix viele weitere Eigenschaften die es erlauben, das Gleichungssystem sehr unterschiedlich zu lösen. Auch deshalb wird dieses Beispiel häufig für Vergleiche herangezogen.
Als numerische Verfahren können zum Beispiel verwendet werden:

- Iterative Verfahren (Gesamt- Einzelschritt- oder SOR-Verfahren)
- Methode der konjugierten Gradienten
- ADI-Verfahren
- Blockiterationsverfahren
- Sparce Matrix Techniken
- usw.

Es gilt übrigens

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{Max}_{i,j} |u(x_i, y_j) - z_{ij}| = 0$$

sofern f eine stetige Funktion für $0 \le x,y \le 1$ ist.

Aufgabe 3.3
Bestimmen Sie die Restglieder R_{ij} unter der Voraussetzung, dass u eine zweimal (viermal) stetig differenzierbare Lösung u von $-u_{xx} - u_{yy} = f(x,y)$, $0 < x,y < 1$, ist. Dabei sei f eine stetige Funktion.

Aufgabe 3.4
Lösen Sie mit den angegebenen Verfahren (klassisch) näherungsweise die Gleichung

$$-u_{xx} - u_{yy} = (x^2+y^2)\sin(xy), \qquad 0 < x,y < \pi,$$

$$u(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$
$$u(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad y = 0$$
$$u(x,y) = \sin(\pi y) \quad \text{für} \quad x = \pi$$
$$u(x,y) = \sin(\pi x) \quad \text{für} \quad y = \pi,$$

und geben Sie den Fehler an!

§ 3.4 Die Vertikal oder Linienmethode in der schwachen Formulierung

Betrachtet wird erneut die Anfangs-Randwertaufgabe

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < T$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Multiplikation der (Differential-) Gleichung mit einer beliebig oft differenzierbaren Funktion v auf $\Omega = (0,1)$ (zunächst mit einem kompakten Träger) und Integration über [0,1] liefert

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)v(x)dx + \int_0^1 u_x(x,t)v_x(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

oder mit den entsprechenden Abkürzungen

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v)$$
$$u(0) = u_0.$$

(Wir fassen also für jedes feste t die Funktion $x \to u(x,t)$ als Element eines Raumes V auf und schreiben dieses Element als u(t). Ähnliches gilt auch für $x \to f(x,t)$).

Eine vorläufige „schwache“ Formulierung der ursprünglichen Aufgabe lautet dann:

„Gesucht ist eine geeignete [‡] Funktion $u : [0,T] \to V$ mit

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) \quad \text{für alle } v \in V \quad \text{und alle } t > 0$$

$$u(0) = u_0 \text{“}$$

Approximative Lösungen ergeben sich z.B. dann daraus, dass zu einem gegebenem Teilraum $V_h \subset V$ ein u_h gesucht wird mit

$$\frac{d}{dt}(u_h(t),v_h) + a(u_h(t),v_h) = (f(t),v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

$$u_h(0) = u_{0h} \in V_h.$$

Dabei sei u_{0h} eine Approximation aus V_h für u_0.

Als Raum V_h (übrigens hier noch ohne Angabe einer zugehörigen Norm) kann z.B. ein endlich dimensionaler Raum

$$V_h = \text{span}\,\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N\}.$$

mit geeigneten Funktionen $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N$ gewählt werden.

Die gesuchte approximative Lösung ergibt sich dann aus dem Ansatz

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\varphi_i(x)$$

oder den Beziehungen

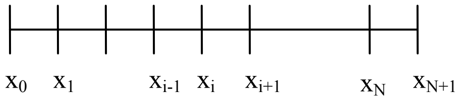
---

‡ z.B. $u \in W_2^1([0,T],V)$ und $V = H_0^1([0,1])$.

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}u_i(t)\right)(\varphi_i,\varphi_j)+\sum_{i=1}^{N}u_i(t)a(\varphi_i,\varphi_j)=(f(t),\varphi_j) \qquad \text{für } j = 1,2,\ldots,N.$$

Ein möglicher Raum V_h kann mit den folgenden Funktionen aufgebaut werden:

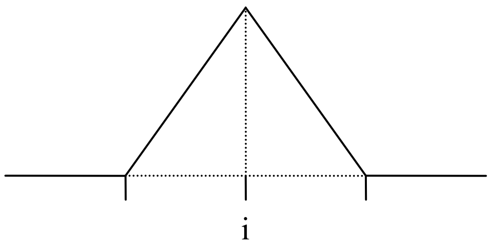
Das x-Intervall [0,1] wird dafür in N+1 gleiche Teile der Länge h unterteilt



und die Funktionen φ_i als stückweise lineare und stetige Funktionen mit

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

oder der Gestalt



gewählt.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} D &= (d_{ij}), & d_{ij} &= (\varphi_i,\varphi_j) \\ A &= (a_{ij}), & a_{ij} &= a(\varphi_i,\varphi_j) \\ F(t) &= (f_i), & f_j &= (f,\varphi_j) \end{aligned}$$

entsteht somit ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der (impliziten) Form

$$D(\vec{u}(t))' + A\vec{u}(t) = F(t)$$

mit (z.B.) der Anfangsbedingung

$$D\vec{u}(0) = u_0^* \quad \text{mit} \quad u_0^* = (u_{0,j}), \quad u_{0,j} = (u_0,\varphi_j).$$

Die Matrizen D und A haben die Form

$$D = \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & . & & 0 \\ & . & . & . & \\ & & . & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & . & & 0 \\ & . & . & . & \\ & & . & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5
Verifizieren Sie die Richtigkeit der entstehenden Matrizen D und A bei der angegebenen (schwachen) Vertikalmethode. Wie entsteht eigentlich die angegebene Anfangsbedingung?

§ 3.5 Die Horizontalmethode in der schwachen Formulierung

Wir betrachten erneut die Anfangs-Randwertaufgabe

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \; 0 < t < T$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

in der schwachen Formulierung

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v).$$

$$u(0) = u_0.$$

Das t-Intervall [0,T] wird in p gleiche Teile der Länge τ unterteilt, und zwar in $[t_{i-1}, t_i]$ mit $t_i = \tau\,\nu$ und $\tau = T/p$
Als stückweise lineare Funktionen wählen wir wieder (jedoch jetzt als Funktionen von t)

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} (t - t_{i-1})/\tau & \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ (t_{i+1} - t)/\tau & \text{für } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Näherung für u(x,t) wird dann beschrieben durch die Rothe-Funktion

$$u_\tau(x,t) = \sum_{i=1}^{p} z_i(x)\varphi_i(t).$$

Die Approximationen $z_i(x)$ für $u(x,t_i)$ ergeben sich aus (Horizontalmethode)

$$\left(\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau}, v\right) + a(z_{i+1}, v) = (f_{i+1}, v) \quad \text{für alle } v \in V \text{ und}$$

$$z_0 = u_0.$$

Aufgabe 3.6
Bei der schwachen Horizontalmethode soll V durch V_h ersetzt werden. Wie sehen die entstehenden Gleichungen aus?

§ 3.6 Eine einfache elliptische Randwertaufgabe (schwache Formulierung)

Gegeben sei erneut die Dirichlet Randwertaufgabe

$$-\Delta u = -u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \qquad x,y \in \Omega$$

$$u(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

für das Einheitsquadrat $\Omega := \{(x,y) \mid 0 < x,y < 1\} \subseteq \mathbf{R}^2$ mit dem Rand $\partial\Omega$.
Multiplikation der (Differential) Gleichung mit einer beliebig oft differenzierbaren Funktion v auf Ω (zunächst mit einem kompaktem Träger) und Integration über Ω liefert

$$-\int_\Omega \Delta u(x,y)\, v(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y) dxdy$$

oder

$$\int_\Omega (\nabla u(x,y) \nabla v(x,y)) dxdy \;=\; \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y) dxdy\,.$$

Mit den Abkürzungen

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega (\nabla u(x,y) \nabla v(x,y)) dxdy \qquad \text{und} \qquad b(v) = \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y) dxdy$$

ergibt sich

$$a(u,v) = b(v).$$

Eine „schwache" Formulierung der ursprünglichen Aufgabe besteht nun darin, einen geeigneten linearen Raum V § und ein $u \in V$ derart zu finden, dass die letzte Gleichung mit diesem u für alle $v \in V$ erfüllt ist:

„Gesucht ist ein $u \in V$ mit

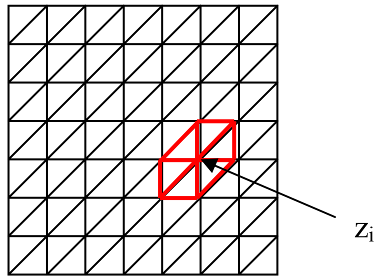
$$a(u,v) = b(v) \;\; \text{für alle } v \in V\text{"}$$

Eine „approximative" Lösung ergibt sich z.B. dann daraus, dass zu einem gegebenen Teilraum $V_h \subset V$ ein u_h gesucht wird mit

$$a(u_h,v_h) = b(v_h) \;\; \text{für alle } v_h \in V_h$$

§ z.B. $V = H^1_0(\Omega)$

.
Für eine (spezielle) Finite Elemente Methode wird das Rechteck Ω in ein gleichmäßiges Dreiecksgitter der folgenden Form zerlegt:



Jedem (inneren) Knoten z_i wird im zugehörigen Sechseck eine affin lineare Funktion mit

$$\varphi_i(z_j) = \delta_{ij}$$

zugeordnet.
Das Sechseck besteht aus sechs Dreiecken. Für jedes Dreieck ergibt sich $\varphi_i(z)$ aus

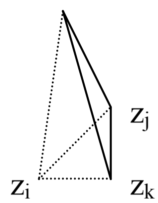
$$\varphi_i(z) = a + bx + cy$$

mit

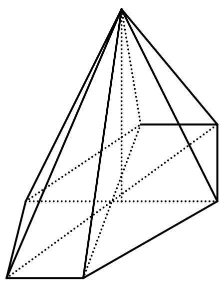
$$\varphi_i(z_i) = 1$$

$$\varphi_i(z_j) = 0$$

$$\varphi_i(z_k) = 0.$$



Insgesamt wird also jedem inneren Knoten der folgende Körper mit der Höhe eins zugeordnet.



Als Raum V_h (übrigens auch hier noch ohne Angabe einer zugehörigen Norm) wird nun die Menge

$$V_h = \text{span}\,\{\varphi_i \;/\; i = 1,2,\ldots (N-1)^2\}.$$

gewählt.

Der Ansatz

$$u_h(z) = \sum_{i=1}^{(N-1)^2} a_i \varphi_i(z)$$

führt damit zum Gleichungssystem

$$a\Big(\sum_{i=1}^{(N-1)^2} a_i \varphi_i(z), \varphi_j(z)\Big) = b(\varphi_j(z)) \quad \text{für alle } \varphi_j \in V_h$$

oder As = b.

Die „Steifigkeitsmatrix“ $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{(N-1)^2}$ und $b = (b_i)_{i,j=1}^{(N-1)^2}$ sind durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 4\text{, falls } i = j \\ -1\text{, falls } |x_i - x_j| + |y_i - y_j| = h \\ 0\text{, sonst} \end{cases}$$

und
$$b_i = \int_\Omega f(z)\varphi_i(z)dz$$

gegeben.

Aufgabe 3.7
Verifizieren Sie die angegebene Form der „Steifigkeitsmatrix“.

Literatur:

[1] Ch. Großmann und H.-G. Roos. Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner Studienbücher. 1992.
[2] K. Rektoris. The Method of Discretization in Time and partial Differential Equations. D. Reidel Publishing Company. 1982.
[3] J. Stoer und R. Bulirsch. Einführung in die Numerische Mathematik. Springer Verlag. 1973.