

2 LINEARISIERUNG und das VERHALTEN VON LÖSUNGEN NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

§ 2.1 Einführung

Hat ein System von Differentialgleichungen

$$y' = f(y),$$

einen Gleichgewichtspunkt y_0 oder eine stationäre Lösung, dann kann sehr oft das Verhalten weiterer Lösungen der Differentialgleichung durch eine Untersuchung des linearisierten Systems

$$y' = f_y(y_0)(y - y_0),$$

oder deren erste Variation, festgestellt werden. Ein Beispiel hierfür ist:

Ein einfaches Populationsmodell führt auf die nichtlineare Differentialgleichung

$$y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y,$$

mit geeigneten Konstanten $r, K > 0$.

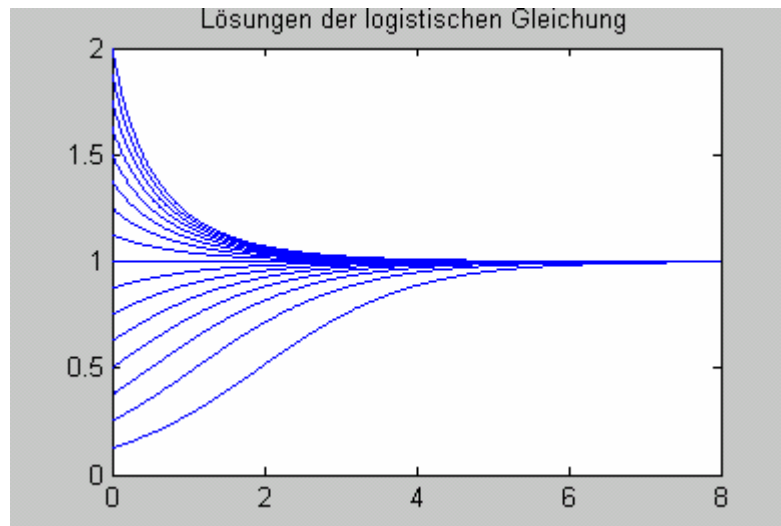
Diese Differentialgleichung besitzt den Gleichgewichtspunkt $y_0 = K$ und damit eine stationäre Lösung

$$y(x) = K.$$

Die Auflösung der Differentialgleichung und das kleine MATLAB-Programm

```
x=(0:.01:8);  
r=1; K=1;  
for i = 1:16  
    y0 = i/8;  
    y = (y0*K) ./ (y0+(K-y0)*exp(-r*x))  
plot(x,y)  
hold on  
title('Lösungen der logistischen Gleichung')  
end
```

liefert



Allgemein gilt, dass für alle Anfangswerte aus $(0, \infty)$ die Lösungen dieser logistischen Differentialgleichungen gegen $y_0 = 1$ streben. Für die übrigen Anfangswerte gilt dieses aber nicht.

Die erste Variation der logistischen Differentialgleichung (mit $r = 1$) an der Stelle $y_0 = K = 1$ hat die Form

$$y' = -(y - y_0)$$

und deren Lösungen streben, für x gegen unendlich, allesamt gegen y_0 .

Die Theorie zeigt, dass der im Beispiel vorliegende Sachverhalt kein Zufall ist: Hat das nichtlineare System einen stationären Punkt y_0 und streben alle Lösungen der in y_0 linearisierten Aufgabe gegen diesen Punkt, dann müssen für Anfangsbedingungen, aus einer gewissen Umgebung von y_0 , auch die Lösungen des nichtlinearen Problems gegen y_0 streben.

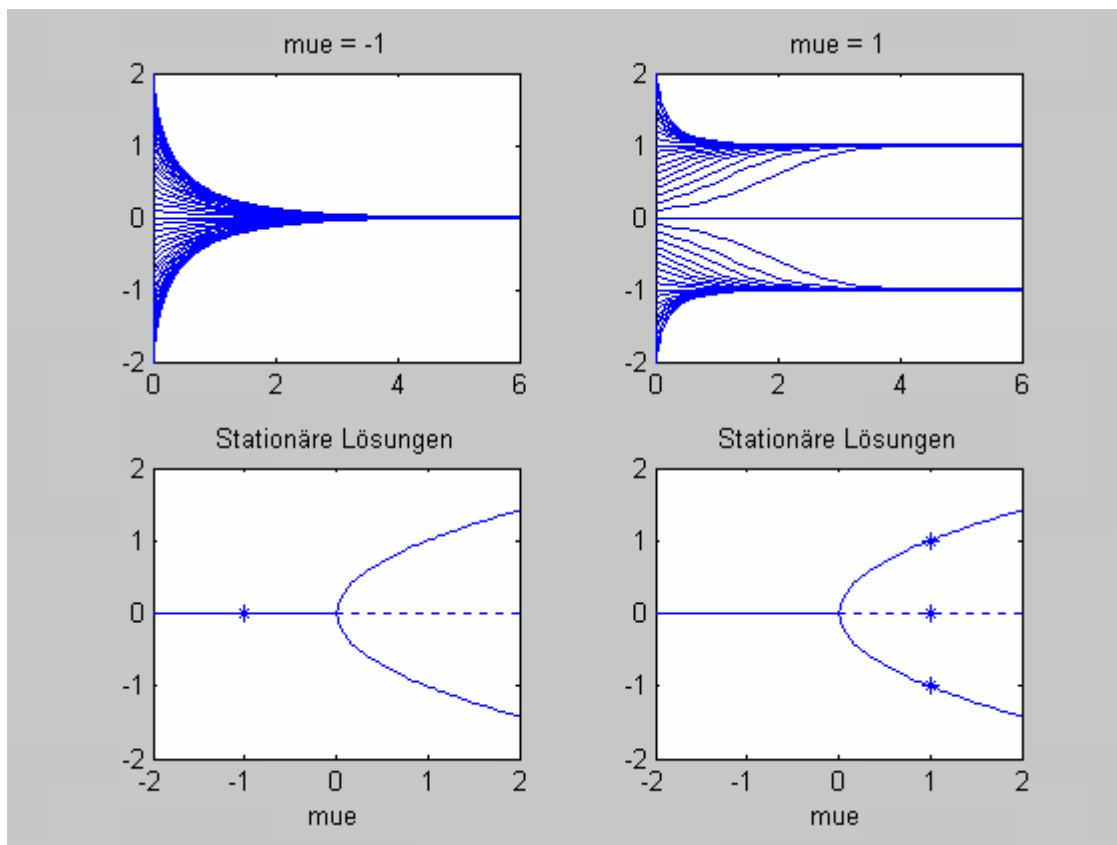
Unter Umständen können also nichtlineare Probleme mit Hilfe von zugehörigen linearen Problemen untersucht werden. Dies kann von großem Vorteil sein!

Das folgende Beispiel zeigt, dass sich die Lösungen von Differentialgleichungen bei geringen Veränderungen der Einträge aber auch erheblich ändern können

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \mu y - y^3 \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

Das folgende Bild zeigt die stationären Lösungen in Abhängigkeit von μ . Für nichtpositive μ hat die Aufgabe nur eine stationäre Lösung $y(x) = 0$. Wird μ positiv, dann hat die Aufgabe drei stationäre Lösungen. Die übrigen Bilder zeigen das Verhalten der Lösungen in Bezug zu den stationären Lösungen.



Es wird sich später zeigen, dass durch Veränderung von Parametern und zugehörigen linearisierten Aufgaben auch weitergehende Aussagen über die Art der Lösungen von Differentialgleichungen gemacht werden können.

§ 2.2 Systeme von Differentialgleichungen

In der Einführung wurde angedeutet, dass bei der Behandlung von nichtlinearen Problemen die zugehörigen linearisierten Aufgaben von Bedeutung sein können

Es soll deshalb das Verhalten von Lösungen von 2×2 linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten untersucht werden.

Gegeben sei also ein System

$$\begin{aligned} u' &= au + bv \\ v' &= cu + dv \end{aligned}$$

oder kurz $y' = Ay$ mit $\det(A) \neq 0$. Wegen $\det(A) \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} au + bv &= 0 \\ cu + dv &= 0 \end{aligned}$$

nur die eine Lösung $u = v = 0$ und damit die Differentialgleichung den (isolierten) Gleichgewichtspunkt $u = v = 0$.

Dieser Gleichgewichtspunkt liefert gleichzeitig auch die (stationäre) Lösung

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \\ v(x) &= 0 \end{aligned}$$

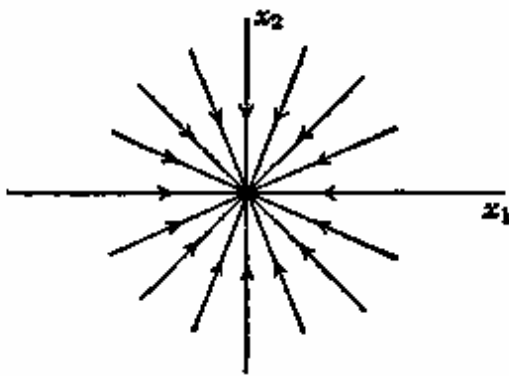
der Differentialgleichung.

Das Verhalten anderer Lösungen der Differentialgleichung, im Bezug zur stationären Lösung $u(x) = v(x) = 0$, hängt von den Eigenwerten und Eigenräumen der Matrix A ab. Die Matrix A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine der folgenden kanonischen Formen überführt werden:

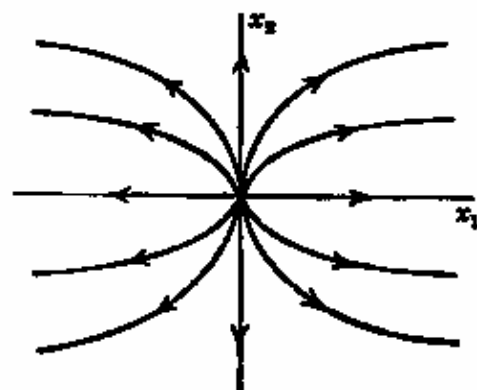
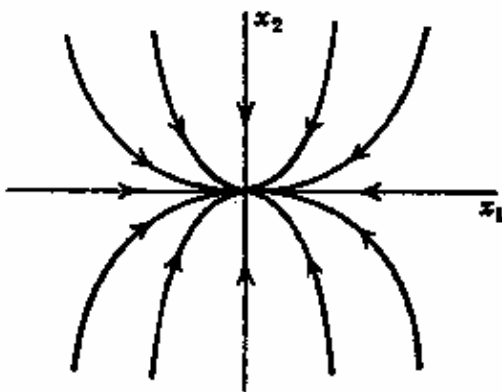
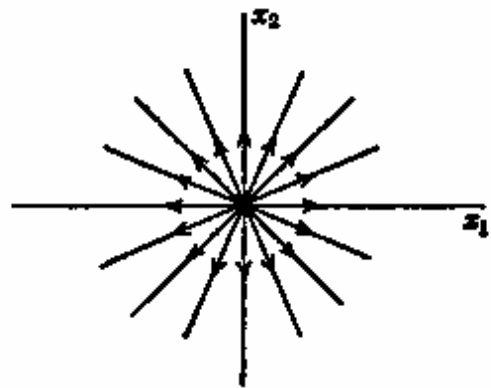
$A \rightarrow TAT^{-1}$			
(I)	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$(\lambda \neq 0)$	(II) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $(\mu < \lambda < 0$ oder $0 < \mu < \lambda)$
(III)	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \gamma & \lambda \end{pmatrix}$	$(\lambda \neq 0, \gamma > 0)$	(IV) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $(\lambda < 0 < \mu)$
(V)	$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$	$(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$	(VI) $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ $(\beta \neq 0)$

Durch I-IV werden alle möglichen Fälle mit reellen Eigenwerten λ und μ erfasst. Die Fälle V-VI erfassen den Fall komplexer Eigenwerte $\alpha + i\beta$ mit reellen α und β .

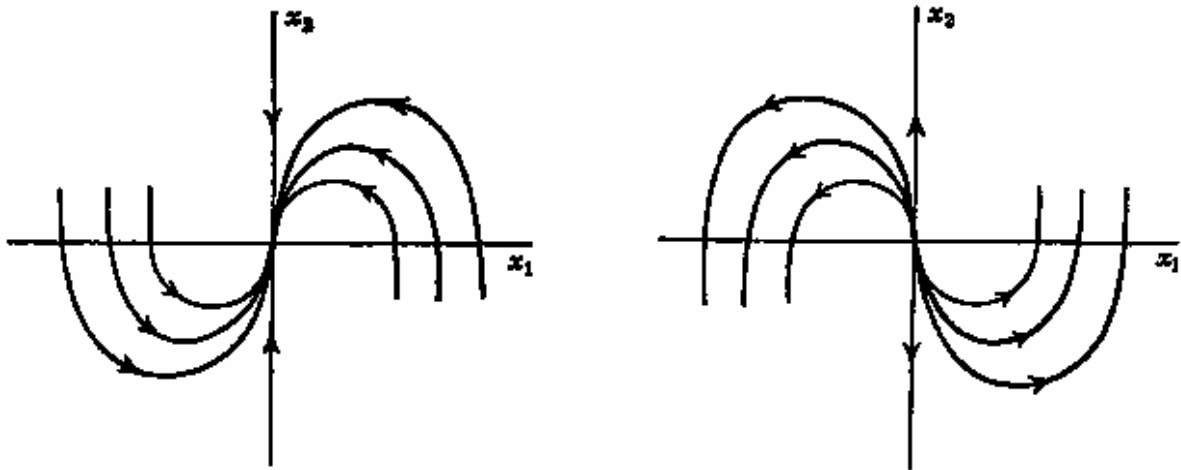
Zu den einzelnen Fällen gehören die folgenden Bilder oder Phasendiagramme. Sie zeigen das Verhalten der allgemeinen Lösungen ($x_1 = u, x_2 = v$) relativ zur stationären Lösung an. Die Richtung der Pfeile gibt den „Bewegungsablauf“ für zunehmendes x an.



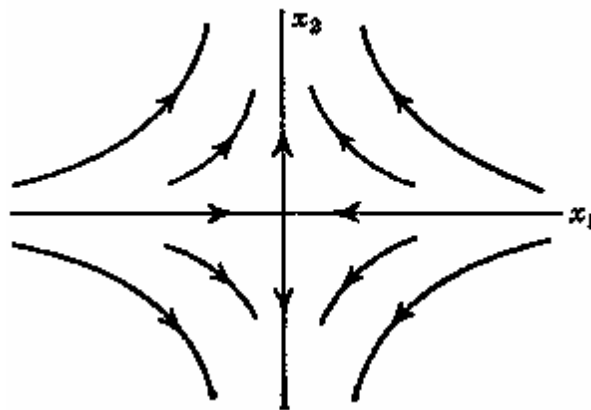
(I) Zwei gleiche reelle Eigenwerte mit vollständigen Eigenraum



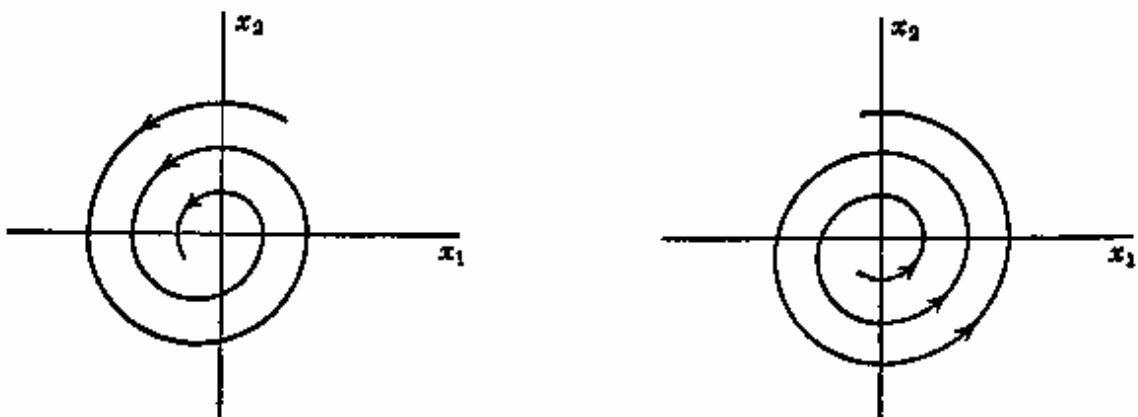
(II) Zwei verschiedene reelle Eigenwerte mit gleichen Vorzeichen



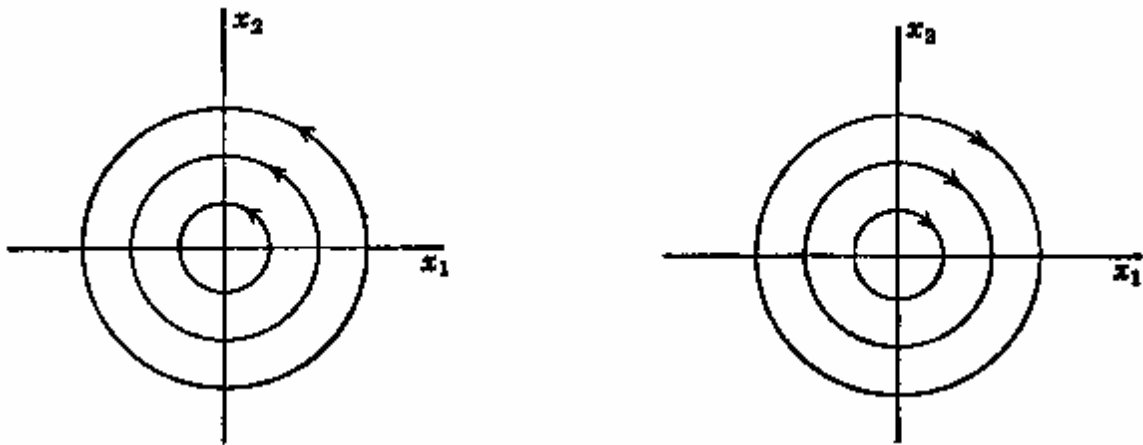
(III) Zwei gleiche reelle Eigenwerte jedoch kein vollständiger Eigenraum



(IV) Zwei reelle Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen



(V) Zwei komplexe Eigenwerte mit nicht verschwindenden Realteil



(VI) Zwei rein komplexe Eigenwerte

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

Gegeben sei die Differentialgleichung (Konkurrierende Spezies)

$$\begin{aligned} u' &= u(12-2u-3v) \\ v' &= v(12-2v-4u). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist ein System nichtlinearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= f(u,v) \\ v' &= g(u,v) \end{aligned}$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f und $g : \mathbf{R}^* \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Es ist $u = v = 0$ ein Gleichgewichtspunkt oder eine (isolierte) Lösung von $f(u,v) = g(u,v) = 0$. In einer Umgebung dieses Gleichgewichtspunktes (Taylorentwicklung) gilt

$$\begin{aligned} u' &= f(0,0) + f_u(0,0) \cdot u + f_v(0,0) \cdot v + \eta_1(u,v) \\ v' &= g(0,0) + g_u(0,0) \cdot u + g_v(0,0) \cdot v + \eta_2(u,v). \end{aligned}$$

Am Gleichgewichtspunkt (hier $(0,0)$) wird dem nichtlinearen System dann das linearisierte System oder die erste Variation

$$\begin{aligned} u' &= f_u(0,0)u + f_v(0,0)v \\ v' &= g_u(0,0)u + g_v(0,0)v. \end{aligned}$$

zugeordnet*.

Das Modell mit den konkurrierenden Spezies hat vier Gleichgewichtspunkte

$$(0,0), (0,6), (6,0) \text{ und } (1,5,3)$$

Die Gestalt der zugehörigen linearisierten Aufgaben

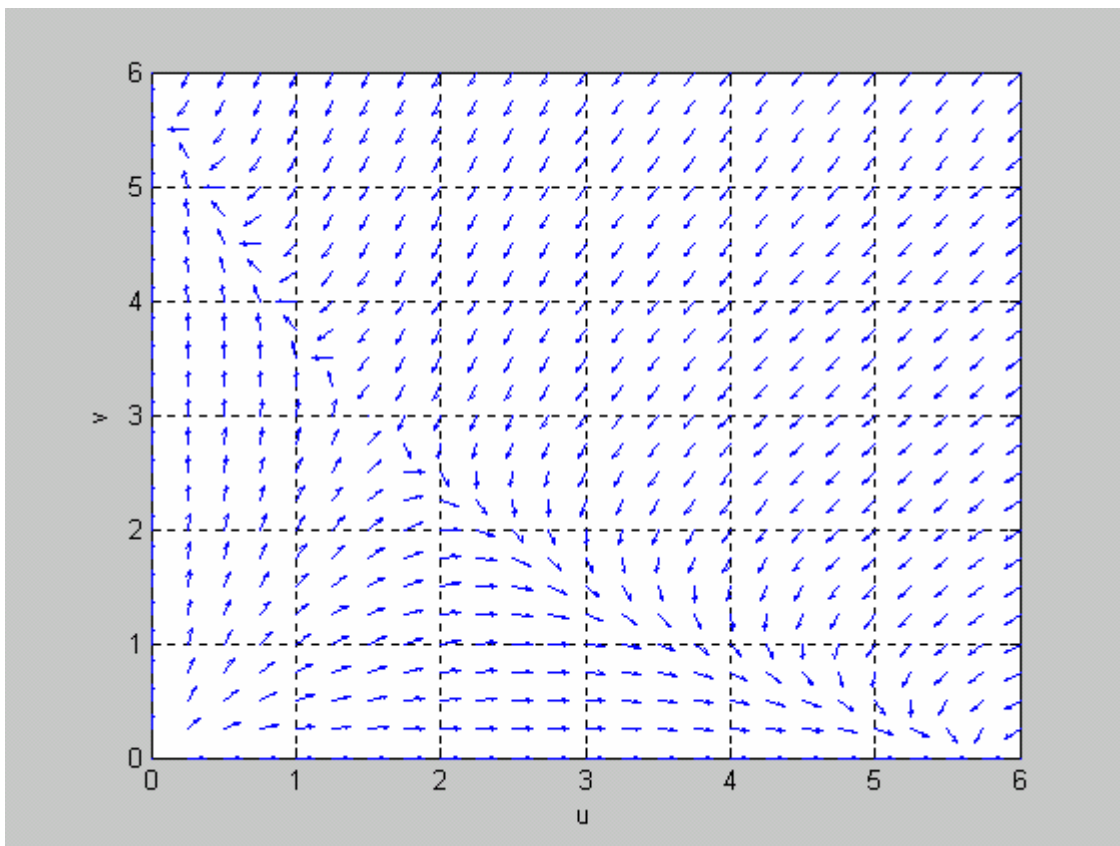
* Liegt ein nichttrivialer Gleichgewichtspunkt vor, dann wird an dieser Stelle linearisiert oder eine Variablentransformation durchgeführt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

an diesen Stellen kann aus der folgende Tabelle entnommen werden:

(0,0)	(0,6)	(6,0)	(1.5,3)
$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -24 & -12 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -3 & -4.5 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$
Fall I (rechts)	Fall II (links)	Fall I (links)	Fall IV

Das folgende Bild veranschaulicht das globale Verhalten der Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung und zeigt, dass das Verhalten in der Umgebung der Gleichgewichtspunkte dem der linearisierten Systeme entspricht*.



Die folgende Definition und der anschließende Satz zeigen, dass dieses Verhalten kein Zufall sein muss.

Definition (Stabilität, Asymptotische Stabilität)**
 Gegeben sei eine (nichtlineare) Differentialgleichung

$$y' = F(y)$$

* Ein zugehöriges MATLAB-Programm befindet sich am Ende des Kapitels.

** Die Definition und der anschließende Satz bleiben unter geringfügigen Änderungen auch für nichtautonome Differentialgleichungen richtig

mit einer stetigen Funktion $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

Eine für alle $x \geq 0$ definierte Lösung $y(\cdot)$ der Differentialgleichung heißt stabil, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle Lösungen $z(\cdot)$ mit

$$\|y(0) - z(0)\| < \delta \quad \text{gilt} \quad \|y(x) - z(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Gilt außerdem noch

$$\|y(x) - z(x)\| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

dann heißt die Lösung asymptotisch stabil.

Satz 2.1

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay + F(y)$$

mit einer reellen und konstanten $n \times n$ Matrix A und einer stetigen Funktion $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.
Haben alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil und erfüllt F die Eigenschaft

$$\lim_{z \rightarrow 0} \|F(z)\| / \|z\| = 0$$

dann ist die triviale Lösung $y(x) = 0$ asymptotisch stabil.

Beweis:

Wegen der Stetigkeit von F hat jede Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y' &= Ay + F(y) \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

eine Lösung $y(\cdot)$ für hinreichend kleine x .

Solange diese Lösung existiert ($x \geq 0$) gilt

$$y(x) = e^{xA}y(0) + \int_0^x e^{(x-s)A}F(y(s))ds.$$

Da alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil haben, existieren positive Konstanten K und a mit

$$\|e^{xA}\| \leq Ke^{-ax},$$

dabei sei die Matrixnorm zur Vektornorm zugeordnet.

Damit ist aber

$$\|y(x)\| \leq K\|y(0)\|e^{-ax} + K \int_0^x e^{-a(x-s)} \|F(y(s))\| ds.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert aber auch ein $\delta > 0$ mit

$$\|F(z)\| \leq \varepsilon \|z\|/K \quad \text{für alle } z \text{ mit } \|z\| \leq \delta.$$

Solange also $\|y(x)\| \leq \delta$ ist, gilt

$$e^{ax} \|y(x)\| \leq K \|y(0)\| + \varepsilon \int_0^x e^{as} \|y(s)\| ds.$$

Damit ist aber

$$e^{ax} \|y(x)\| \leq K \|y(0)\| e^{\varepsilon x}.$$

oder

$$\|y(x)\| \leq K \|y(0)\| e^{-(a-\varepsilon)x} \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Wird $\varepsilon < a$ gewählt, dann ist $\|y(x)\| \leq K \|y(0)\|$ solange $\|y(x)\| \leq \delta$.

Für $\|y(0)\| = \|y_0\| < \delta/K$ folgt damit auch die Existenz von $y(\cdot)$ für alle positiven x und der Beweis ist erbracht.

Die Untersuchung der allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u' &= f(u,v) \\ v' &= g(u,v) \end{aligned}$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f und $g : \mathbf{R}^* \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ wurde bereits im § 2.2 angedeutet und kann auf die bereits bekannte Situation zurückgeführt werden:

Ist $u = v = 0$ eine (isolierte) Lösung von $f(u,v) = g(u,v) = 0$, dann gilt in einer Umgebung dieses Gleichgewichtspunktes (Taylorentwicklung)

$$\begin{aligned} u' &= f(0,0) + f_u(0,0) * u + f_v(0,0) * v + \eta_1(u,v) \\ v' &= g(0,0) + g_u(0,0) * u + g_v(0,0) * v + \eta_2(u,v) \end{aligned}$$

oder

$$y' = Ay + F(y)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} f_u(0,0) & f_v(0,0) \\ g_u(0,0) & g_v(0,0) \end{pmatrix}.$$

Da die Störung $(\eta_1(u,v), \eta_2(u,v))$ die im Satz 1.1 geforderten Bedingung erfüllt, sind die Bedingungen aus dem Satz 2.1 erfüllt.

Etwas salopp kann also gesagt werden:

Für Anfangsbedingungen in einer hinreichend kleinen Umgebung des Gleichgewichtspunktes verhalten sich die Lösungen des nichtlinearen Systems wie die Lösungen des zugeordneten linearen Systems oder der ersten Variation.

Alles Gesagte gilt natürlich auch für jeden anderen möglichen (isolierten) Gleichgewichtspunkt (u_1, v_1) , d.h. $f(u_1, v_1) = g(u_1, v_1) = 0$ des nichtlinearen Systems.

Wir betrachten jetzt erneut das lineare Aufgabe (L) ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned} u' &= au + bv \\ v' &= cu + dv \end{aligned}$$

und die nichtlinear gestörte Aufgabe (NL)

$$\begin{aligned}u' &= au + bv + g(u,v) \\v' &= cu + dv + h(u,v)\end{aligned}$$

In der Sprache der dynamischen Systeme liegt in den Fällen I, II, III und V ein Attraktor vor. Im Falle IV liegt ein Sattelpunkt und im Falle VI ein Zentrum vor.

Ist $ad-bc$ ungleich Null und hat die Nichtlinearität die Eigenschaften aus dem Satz 1.1, dann ergibt sich in der Sprache der dynamischen Systeme das folgende Resultat:

Satz 2.2

Ist der Ursprung $(0,0)$ ein Attraktor von (L) dann auch von (NL) .

Welche Störungen noch weitergehende Eigenschaften der Attraktoren invariant lassen, Zentren erhalten oder welche Übergänge möglich sind, muss der umfangreichen Literatur entnommen werden.

Gegeben sei jetzt die parameterabhängige (μ) Differentialgleichung

$$y' = f(y, \mu) \qquad f : \mathbf{R}^2 * \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

mit hinreichend oft differenzierbarem f .

Im Kontext dieser Aufgaben kann der Satz 1.1 wie folgt umformuliert werden:

Satz 2.3

Ist y_0 ein Gleichgewichtspunkt zu μ_0 , d.h. $f(y_0, \mu_0) = 0$ und haben alle Eigenwerte von $A = f_y(y_0, \mu_0)$ negativen Realteil, so ist y_0 asymptotisch stabil.

Ohne Beweis soll noch ein weiterer Satz angegeben werden.

Satz 2.4 (Hopf)

Die Differentialgleichung $y' = f(y, \mu)$ habe einen „Zweig“ asymptotisch stabiler Lösungen an dessen Rand (y_0, μ_0) die Beziehung $f(y_0, \mu_0) = 0$ gilt. Hat $f_y(y_0, \mu_0)$ nur rein imaginäre Eigenwerte und gilt eine „Transversabilitätsbedingung“, dann besitzt die Aufgabe eine periodische Lösung.

Die Sätze 2.1-4 zeigen also, dass durch lokale Eigenschaften oder durch Linearisierungen ($f \rightarrow f_y$) an Gleichgewichtspunkten, Aussagen über die asymptotische Stabilität von Lösungen und der Existenz von periodischen Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen gemacht werden können. Für weitergehende Aussagen muss auf die umfangreiche Literatur hingewiesen werden.

Anhang

```
function ydot = popupha_f(y)
u1 = y(1)*(12-2*y(1)-3*y(2));
v1 = y(2)*(12-2*y(2)-4*y(1));
ydot= [u1;v1];
```

```
%Gradientenfeld für das Populationsmodell
```

```
h = 0.01;
x1 = 0:0.25:6;
x2 = 0:0.25:6;
[nr,nc] = size(x1);
x1m = zeros(nc,nc);
for nx1 = 1:nc
    for nx2 = 1:nc
        x = [x1(nx1);x2(nx2)] + h*popupha_f([x1(nx1);x2(nx2)]);
        dx1 = x(1)-x1(nx1);
        dx2 = x(2)-x2(nx2);
        l = sqrt(dx1^2+dx2^2)*7.5;
        if l > 1.e-10
            x1m(nx2,nx1)=dx1/l;
            x2m(nx2,nx1)=dx2/l;
        end
    end
end
quiver(x1,x2,x1m,x2m,0);
axis([0,6,0,6]);
xlabel('u');
ylabel('v');
grid;
```