Numerische Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen
Eine Einführung

Universität Hamburg
SoSe07

K. Taubert

Numerik gewöhnlicher Anfangswertaufgaben

5 DIE STABILITÄT VON DIFFERENZENVERFAHREN

Ein grundsätzlicher Ansatz zur Beurteilung von Differenzenverfahren ist neben dem lokalen Fehler (Ordnung) die Stabilität.
Bei der „Stabilität" wird i.A. verlangt, dass die von einem Differenzenverfahren gelieferten Näherungslösungen für alle hinreichend kleinen oder sogar alle h ein einheitliches und ähnliches „Stabilitätsverhalten" wie die Lösungen der Anfangswertaufgabe aufweisen.
Vier Klassen von Anfangswertaufgaben

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

stehen hier im Vordergrund und zwar meistens solche mit einem stetigen $f : \mathbf{R}^*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ der Art:

1. $| f(x,u) - f(x,v) | \leq K| u - v |$ für alle zulässigen x,u,v .
2. Die Anfangswertaufgaben sind eindeutig lösbar für alle Anfangsbedingungen.
3. $(f(x,u)-f(x,v))(u-v) \leq 0$ für alle zulässigen x,u,v .
4. $f(x,y) = \lambda y$ mit $\mathrm{Re}(\lambda)<0$.

Schon diese Klassen von Anfangswertaufgaben führen zu einer größeren Menge von Stabilitätsbegriffen. Dazu gehören:

1. (Starke) Stabilität,
2. A-Stabilität,
3. B-Stabilität,
4. G-Stabilität,
5. (Bereiche der) absoluten Stabilität und
6. L-Stabilität.

§ 5.1 Stabilität von Differenzenverfahren für lipschitzstetige Aufgaben

Es sei $f : \mathbf{R}^*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit

$$| f(x,u) - f(x,v) | \leq K| u - v | \quad \text{für alle } x,u,v \text{ und einem } K \geq 0 .$$

Gegeben seien die zwei Anfangswertaufgaben

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_1,$$

$$y' = f(x,y) + \delta(x), \qquad y(x_0) = y_2,$$

mit einer stetigen Funktion $\delta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
Die Differenz der Lösungen $y_1(.)$ und $y_2(.)$ der beiden Anfangswertaufgaben auf dem Intervall $I = [x_0\text{-}a, x_0\text{+}a]$, a>0, kann mit der Gronwallschen Ungleichung in der folgenden Form abgeschätzt werden :

$$\operatorname*{Max}_{x \in I} | y_1(x) - y_2(x) | \le | y_1 - y_2 | e^{Ka} + \frac{M}{K}(e^{Ka} - 1).$$

Dabei sei $M = \operatorname*{Max}_{x \in I} |\delta(x)|$.
D.h., die Differenz der Lösungen hängt (lipschitz-) stetig von Störungen in den Anfangsbedingungen und der rechten Seite der Anfangswertaufgabe ab.

Die einfachste Stabilitätsbedingung für Differenzenverfahren bei Anfangswertaufgaben besteht nun darin, von den Lösungen der Differenzenverfahren eine ähnliche Eigenschaft zu fordern und zwar gleichmäßig in h für alle $0 < h < h_0$.

Satz 5.1 (Stabilität bei RKV)
Gegeben sei das RKV

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \Phi(x_n, y_n; h, f), \qquad y_0 = y^1,$$

und das gestörte RKV

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \Phi(x_n, y_n; h, f) + \delta_n, \qquad y_0 = y^2.$$

Dabei sei f eine lipschitzstetige Funktion und Φ genüge der Bedingung

$$|\Phi(x_n, u; h, f) - \Phi(x_n, v; h, f)| \le L_f | u - v |$$

für alle zulässigen x_n, u,v und alle $0 < h < h_0$ auf $I = [x_0\text{-}a, x_0\text{+}a]$, a>0. Es sei außerdem $M = \operatorname*{Max}_{n} |\delta_n|$ und $L_f > 0$.
Dann gilt für die Differenz der zwei Lösungen (y_n^1) und (y_n^2) der RKV

$$\operatorname*{Max}_{n} | y_n^1 - y_n^2 | \le | y^1 - y^2 | e^{L_f a} + \frac{M}{L_f}(e^{L_f a} - 1).$$

Beweis
Siehe § 2.

Bemerkung
Man beachte, dass mit einer Zusatzvoraussetzung (Konsistenz) im Satz 5.1 sofort die Konvergenz eines RKV gefolgert werden kann :

Erfüllt die Lösung einer lipschitzstetigen Anfangswertaufgabe die Bedingung

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = \Phi\,(x_n, y(x_n); h, f) + \tau_{n+1}(h)$$

mit $\tau_{n+1}(h) = O(h)$ für alle $x \in I$, dann liegt bei gleicher Anfangsbedingung für das RKV offenbar Konvergenz auf I vor!

Satz 5.2 (Stabilität bei MSV)
Gegeben seien ein lineares k-Schrittverfahren

$$a_k y_{n+k} + \;\dots\; + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + \;\dots\; + b_0 f_n)$$

mit dem Anfangsfeld $y^1_{k-1}, y^1_{k-2}, \dots.., y^1_0$ und das gestörte Verfahren

$$a_k y_{n+k} + \;\dots\; + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + \;\dots\; + b_0 f_n) + h\,\delta_n$$

mit dem Anfangsfeld $y^2_{k-1}, y^2_{k-2}, \dots.., y^2_0$.
Dabei sei $|a_0| + |b_0| \neq 0$, $a_k \neq 0$, $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 0,1,2, \dots ,k$, $f_n = f(t_n, y_n)$.
Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms seien alle dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 und jene Wurzeln mit Betrag Eins seien einfach.
Es sei f eine lipschitzstetige Funktion mit der Lipschitzkonstanten K und

$$Y^i_n = \begin{pmatrix} y^i_{n+k-1} \\ \vdots \\ y^i_{n+1} \\ y^i_n \end{pmatrix}, \quad i=1,2, \quad n = 0,1,2, \dots..$$

Dabei sei $(y^1_n)_n$ die Lösung des ungestörten linearen k-Schrittverfahrens und $(y^2_n)_n$ die Lösung des gestörten linearen k-Schrittverfahrens.
Dann gilt für alle zulässigen n und alle h mit $0<h<h_0$ auf dem Intervall $I = [x_0-a, x_0+a]$, $a>0$,

$$\underset{n}{\mathrm{Max}} \,\| Y^1_n - Y^2_n \|_\infty \leq \;\| Y^1_0 - Y^2_0 \|_\infty\, e^{L_f a} + \frac{\delta}{K_f}(e^{L_f a} - 1)\,.$$

Dabei seien $\delta = \underset{n}{\mathrm{Max}}\,|\delta_n|$ und $L_f>0$ eine geeignete von der lipschitzstetigen Funktion f abhängige Konstante.

Beweis
Siehe § 4.

Bemerkung
Es bleibt dem Leser überlassen, mittels des Satzes 5.2 auch die Konvergenz eines linearen und konsistenten Mehrschrittverfahrens zu beweisen.

Bemerkung
In der modernen Literatur werden die Ungleichungen aus Satz 5.1 und 5.2 häufig als Stabilitätsdefinitionen für die Differenzenverfahren verwendet. Hinreichend für diese Stabilitätsforderung ist dann, in der Klasse der lipschitzstetigen Funktionen f, die gegebene Lipschitzbedingung bei den RKV oder die Wurzelbedingung bei den linearen Mehrschrittverfahren.

§ 5.2 (Starke) Stabilität bei Differenzenverfahren

Die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbf{R}*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ habe eine eindeutige Lösung y(.) im Intervall $I = [x_0,x_0+a]$, a>0.
Gegeben sei außerdem ein RKV

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \Phi(x_n,y_n;h,f), \qquad y_0 = y^1.$$

Ist f keine lipschitzstetige oder monotone Funktion, dann stellt sich die Frage, welche (Stabilitäts-) Eigenschaften das RKV erfüllen muss, damit es ein brauchbares Verfahren für die numerische Approximation der Lösung der Anfangswertaufgabe darstellt.
Wir erinnern uns daran, dass das explizite Euler-Verfahren eine Folge von gleichmäßig konvergenten Polygonzügen lieferte, deren Grenzwert die Lösung der Anfangswertaufgabe war. Die gleichmäßige Konvergenz der Polygonzüge wurde dadurch erzwungen, dass die Polygonzüge eine Familie von gleichgradig stetigen und gleichmäßig beschränkten Funktionen auf I waren. Genau dies ist die Stabilitätsforderung, die an das Differenzenverfahren zu stellen ist!

Satz 5.3
Es sei $\Phi(u,v;h,f)$ eine in einer Umgebung U von $\{ (x,y(x)) / \ x \in I \}$ für alle $0 < h \leq h_0$ beschränkte Funktion. Liegen die durch das RKV gelieferten Näherungen y_n^h, $nh \leq a$, für eine beschränkte Umgebung von Anfangsbedingungen y_0^h von $y(x_0)$ alle in U, dann erzeugt die Familie $y^h(., y_0^h)$, $0 < h \leq h_0$, ein System von gleichgradig stetigen Polygonzügen auf I.

Beweis
Trivial.

Bemerkung
Man beachte:
Wegen der Stetigkeit von f und der Konstruktionsvorschrift für explizite RKV ist die Beschränktheit von Φ in einer Umgebung von U stets gewährleistet.
Soll für $h \to 0$ und $y_0^h \to y(x_0)$ zusätzlich noch die gleichmäßige Konvergenz der Familie $y^h(., y_0^h)$ gegen die Lösung y(.) der Anfangswertaufgabe auf I gewährleistet werden, dann ist die gleichmäßige Konvergenz $\Phi(u,v;h,f) \xrightarrow[h\to 0]{} f(u,v)$ eine dafür ausreichende Bedingung. Diese letzte Bedingung wird häufig als Konsistenz eines allgemeinen Einschrittverfahrens bezeichnet.

Etwas komplizierter gestaltet sich die obige Problematik, wenn lineare k-Schrittverfahren zur numerischen Integration der Anfangswertaufgabe verwendet werden sollen :

Gegeben sei ein lineares k-Schrittverfahren

$$a_k y_{n+k} + \ \dots \ + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + \ \dots \ + b_0 f_n)$$

mit dem Startfeld $Y_0^h = (y_{k-1}^h, y_{k-2}^h, \dots , y_0^h)$ und es sei $| \ y_i^h - y(x_0) \ | \leq Lh$ für $i = 0,1, \dots , k-1$ mit einem L>0.

Definition
Ein lineares konsistentes Mehrschrittverfahren heißt stark stabil, wenn die Wurzeln des charakteristischen Polynoms $p(\xi) = a_k\xi^k + a_{k-1}\xi^{k-1} + ... + a_0$ alle dem Betrage nach kleiner oder gleich 1 sind. Es gibt genau eine Wurzel mit dem Betrag Eins, nämlich die Eins.

Satz 5.4
Gegeben seien ein stark stabiles k- Schrittverfahren und eine Familie von Startfeldern

$$Y_0^h = (y_{k-1}^h, y_{k-2}^h, ..., y_0^h) \text{ mit } |\ y_i^h - y(x_0)\,| \le Lh \text{ für } i = 0,1,2,\dots,k\text{-}1 \text{ und } L>0.$$

Es sei $(y_n^h)_n$ die Lösung des Differenzenverfahrens für das Startfeld Y_0^h und $y^h(.,Y_0^h)$ der zugehörige Polygonzug auf $I = [x_0,x_0+a]$, a>0.
Die Familie der Funktionen $y^h(.,Y_0^h)$ ist dann auf I gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.

Zum Beweis
Beim Beweis spielt natürlich die starke Stabilität des Differenzenverfahrens eine entscheidende Rolle. Versuchen Sie es! Gegenbeispiele zeigen, dass ein Verzicht auf diese Bedingung nicht möglich ist.

Bemerkung
Offen bleibt bis jetzt noch die Frage, ob die Funktionen $y^h(.,Y_0^h)$ für $h \to 0$ auch die Lösung der Anfangswertaufgabe liefern. Dieses ist dann der Fall, wenn neben

1. $\sum_{n=0}^{k} a_n = 0$

auch noch die Bedingung

2. $\sum_{n=0}^{k} na_n = \sum_{n=0}^{k} b_n \qquad b_n \ge 0$

erfüllt ist.

§ 5.3 Stabilität von Differenzenverfahren für monotone Aufgaben B und G-Stabilität

Es sei $f: \mathbf{R}*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit

$$(f(x,u) - f(x,v))(u-v) \le 0 \quad \text{für alle zulässigen } x,u,v.$$

Gegeben seien die zwei Anfangswertaufgaben

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$
$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = \tilde{y}_0 .$$

Für die Differenz der Lösungen y (.) und $\tilde{y}(.)$ der beiden Anfangswertaufgaben gilt:

$$|\ y(x) - \tilde{y}(x)\,| \le |\ y_0 - \tilde{y}_0\,|$$

und zwar für alle x aus dem Intervall $I = [x_0, \infty)$.

Werden die beiden Anfangswertaufgaben mit dem impliziten Euler-Verfahren approximativ gelöst, dann gilt für alle Schrittweiten h>0 und alle n

$$| y_n - \tilde{y}_n | \leq | y_0 - \tilde{y}_0 |.$$

Definition :
Ein implizites RKV $y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n,y_n;h,f)$ heißt B-stabil, wenn für alle $h > 0$ und alle Anfangsbedingungen $y_0, \tilde{y}_0$ gilt

$$| y_n - \tilde{y}_n | \leq | y_0 - \tilde{y}_0 |.$$

Beispiele
Schnell kann man sich davon überzeugen, dass die one-leg Version der Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n = hf((1/2)x_n+(1/2)x_{n+1},(1/2)y_{n+1}+(1/2)y_n)$$

ein B-stabiles Verfahren ist.
Die Butcher-Arrays

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

($\gamma = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$) liefern implizite RKV der Ordnung 3. Mit $\gamma = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ liegt ein B-stabiles Verfahren vor.

Bei den lineraren k-Schrittverfahren

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + \dots + b_0 f_n)$$

ist es zweckmäßig deren one-leg Versionen

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = hf(\, b_k t_{n+k} + \dots + b_0 t_n \,,\, a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n \,)$$

zu nehmen. Dabei sei $\sum_{i=}^{k} b_i = 1$ (Normalisierung).

Bei den BDF-Verfahren fallen beide Klassen zusammen!

Bemerkung
Werden die monotonen Aufgaben mit linearen k-Schrittverfahren integriert, dann sollten – auf den ersten Blick – Näherungslösungen $(y_n^1)_n$ und $(y_n^2)_n$ die Bedingung

$$| y_{n+1}^1 - y_{n+1}^2 | \leq | y_n^1 - y_n^2 |$$

für alle n erfüllen.
Da die Werte y_n jedoch vom Startfeld $y_0^h, y_1^h, \dots, y_{k-1}^h$ abhängen, wird stattdessen eine ähnliche Bedingung gefordert:

Definition
Die one-leg Verfahren heißen G-stabil, wenn es eine reelle, symmetrische und positiv definite Matrix G gibt, so dass für je zwei numerische Lösungen $(y_n^1)_n$ und $(y_n^2)_n$ gilt

$$\| Y_{n+1}^1 - Y_{n+1}^2 \|_G \leq \| Y_n^1 - Y_n^2 \|_G \quad \text{für alle n.}$$

Dies gilt im speziellen für alle h>0 und alle monotonen Anfangswertaufgaben.
Dabei sei

$$Y_n = (y_{n+k-1}, \; ..... \; ,y_n)^T,$$

$\| z \|_G = (Gz,z)^{1/2}$ und (.,.) das gewöhnliche innere Produkt auf dem $\mathbf{R}^k$.

Beispiele
1. Das implizite Euler-Verfahren ist G-stabil.
2. Die one leg-Version der Trapezregel ist G-stabil.
3. Die BDF-Formel der Ordnung zwei ist G-stabil mit $G = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung
Es ist ein Ergebnis von G. Dahlquist (1978), dass es in der Klasse der linearen k-Schrittverfahren (one-leg Versionen) außer den genannten Beispielen keine weiteren wichtigen Formeln gibt, die G-stabil sind.

§ 5.4 A-Stabilität und Bereiche der absoluten Stabilität von RKV und MSV

Die Lösungen der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y) = \lambda y \qquad \text{mit} \quad Re(\lambda)<0 ,$$
$$y(x_0) = y_0,$$

hat die Eigenschaft

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0 .$$

Gesucht sind deshalb Differenzenverfahren, die für alle festen Schrittweiten h und alle λ mit $Re(\lambda)<0$ dieses asymptotische Verhalten wiedergeben.

Gegeben sei ein RKV (explizit oder implizit)

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi\,(x_n,y_n;h,f).$$

Wird dieses Verfahren zur numerischen Integration der Anfangswertaufgabe $y' = \lambda y$ mit $Re(\lambda)<0$ verwendet, dann ergibt sich eine Rekursionsformel der Form

$$y_{n+1} = R(\hbar)y_n \quad \text{mit} \quad \hbar = \lambda h .$$

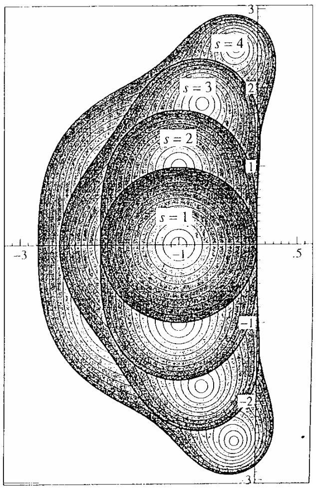
Dabei ist $R(z)$ ein Quotient von zwei Polynomen vom Grade $\leq s$, wenn das RKV von der Stufe s ist.

Beispiele
Das explizite Euler-Verfahren führt zu $R(z) = 1+z$ und das implizite Euler-Verfahren zu $R(z) = 1/(1-z)$.
Für ein allgemeines explizites RKV der Ordnung p hat $R(.)$ die Gestalt

$$R(z) = 1+z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{z^p}{p!}\,.$$

Definition
Für ein RKV heißt die Menge der $z \in \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft $|R(z)| \leq 1$ der Bereich der absoluten Stabilität des Verfahrens. Umfasst dieser Bereich die Menge aller z mit $\mathrm{Re}(z) \leq 0$, dann ist das Verfahren A-stabil.

Anschließend finden Sie die Bereiche der absoluten Stabilität der expliziten RKV der Ordnungen 1,2,3 und 4. Die Zeichnung wurde aus dem umfassenden und sehr zu empfehlenden Buch von E. Hairer, S.P. Nörsett und G. Wanner[1] entnommen:



Aus der Darstellung der Übertragungsfunktion $R(z)$ für explizite RKV der Ordnung p kann sofort erkannt werden, dass es in der Klasse der expliziten RKV keine A-stabilen Verfahren geben kann.
Implizite A-stabile RKV können jedoch angegeben werden. Beispiele dafür sind:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad \gamma = (3+\sqrt{3})/6 \qquad \text{SDIRK} \qquad \text{Ordnung 3}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \qquad \text{Lobatto 3A} \qquad \text{Ordnung 4}$$

Die zugehörigen Übertragungsfunktionen sind:

[1] Solving Ordinary Differential Equations II. Springer Series in Computational Mathematics 14. 1996

$$R(z) = \frac{1+(1-2\gamma)z+(1/2-2\gamma+\gamma^2)}{(1-\gamma z)^2}$$

bzw.

$$R(z) = \frac{1+z/2+z^2/12}{1-z/2+z^2/12}.$$

Bevor der Frage nach der A-Stabilität bzw. den Bereichen der absoluten Stabilität bei linearen Mehrschrittverfahren nachgegangen wird, ist es zweckmäßig, einige Bemerkungen über lineare Differenzengleichungen zu machen:

Eine Gleichung der Form

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_k y_n = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0 \quad (*)$$

(a_i, $i = 1, 2, \dots, k$, $a_k \neq 0$, aus **R** oder **C**) heißt homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung k.
Eine homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten wird durch eine Zahlenfolge $(y_j)_j$ mit $y_j = cu^j$ ($c \neq 0$) gelöst, wenn

$$cu^{n+k} + a_1 cu^{n+k-1} \dots + a_k cu^n = 0$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$ ist oder u die Gleichung

$$\varphi(u) = u^k + a_1 u^{k-1} \dots + a_k = 0$$

erfüllt.
Die Gleichung $\varphi(u) = 0$ heißt charakteristische Gleichung der Differenzengleichung und es gilt der

Satz
Ist s eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\varphi(u) = u^k + a_1 u^{k-1} \dots + a_k = 0$$

mit der Vielfachheit r so sind die Folgen

$$(s^i)_i \quad , \quad (is^i)_i \quad , \quad \dots\dots \quad , \quad (i^{r-1}s^i)_i,$$

Lösungen der linearen Differenzengleichung (*) und jede Lösung von (*) lässt sich als Linearkombination von Lösungen der obigen Form darstellen.
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung der Ordnung k hat noch k freie Parameter c_i. Diese können durch die Vorgabe von

$$y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$$

festgelegt werden.

Beispiel
Die numerische Integration der linearen Differentialgleichung

$$y' = \lambda y \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

durch ein stabiles und konsistentes k-Schrittverfahren

$$a_k y_{n+k} + \ldots + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + \ldots + b_0 f_n)$$

führt zu einer homogenen Differenzengleichung der Ordnung k, nämlich:

$$\sum_{j=0}^{k} (a_j - h\lambda b_j) y_{n+j} = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Die zugehörige (von $h\lambda$ abhängige) charakteristische Gleichung lautet dann

$$\varphi(u) = \sum_{j=0}^{k} (a_j - h\lambda b_j) u^j = 0.$$

Definition
Gegeben sei ein stabiles und konsistentes lineares k-Schrittverfahren

$$a_k y_{n+k} + \ldots + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + \ldots + b_0 f_n).$$

Die Menge aller $\hbar = h\lambda$, $h > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, für die die charakteristische Gleichung

$$(a_k - \hbar b_k) u^k + \ldots + (a_0 - \hbar b_0) = 0$$

nur Wurzeln mit dem Betrag kleiner als 1 hat, heißt Bereich der absoluten Stabilität des Mehrschrittverfahrens.

Beispiele
Das explizite Euler-Verfahren führt auf die charakteristische Gleichung

$$u + (-1 - \hbar) = 0$$

mit der Wurzel $1 + \hbar$. Das explizite Euler-Verfahren ist deshalb absolut stabil für alle $\hbar$ aus der offenen Scheibe mit dem Mittelpunkt -1 und dem Radius 1 in **C** (Siehe auch Kapitel 1).

Die Mittelpunktsformel $y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}$ führt auf die charakteristische Gleichung

$$u^2 - 2\hbar u - 1 = 0$$

mit den Wurzeln $s_{1,2} = \hbar \pm \sqrt{\hbar^2 + 1}$. Damit besitzt die Mittelpunktsformel kein Bereich der absoluten Stabilität.

Die Trapezregel $y_{n+1} = y_n + (h/2)f_{n+1} + (h/2)f_n$ führt auf die charakteristischen Gleichung

$$(1 - \frac{\hbar}{2})u - (1 + \frac{\hbar}{2}) = 0$$

mit der Wurzel

$$s = (1 + \hbar/2)/(1 - \hbar/2).$$

Diese Wurzel ist für <u>alle</u> $\hbar$ dem Betrage nach kleiner als 1.

Die Bereiche der absoluten Stabilität einiger Adams-Verfahren und Ihrer zugehöriger PECE-Version können aus den folgenden Bildern (wieder aus den Buch von Hairer, Nörsett und Wanner) entnommen werden:

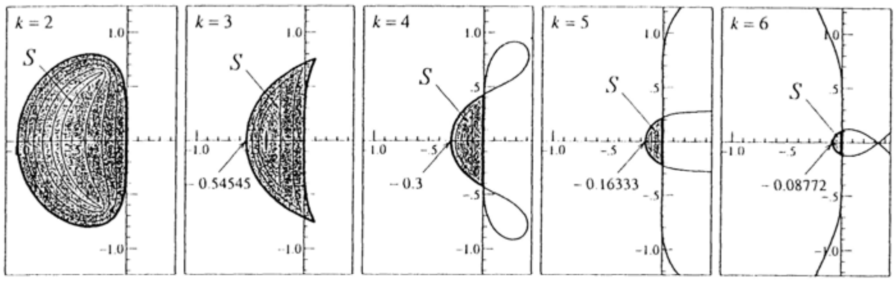


Fig. 1.2. Stability domains for explicit Adams methods

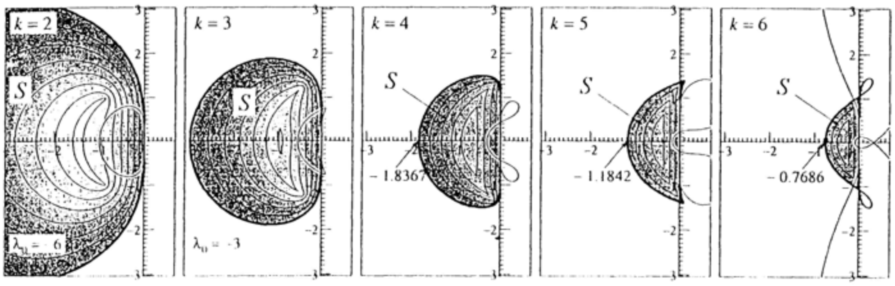


Fig. 1.3. Stability domains of implicit Adams methods, compared to those of the explicit ones

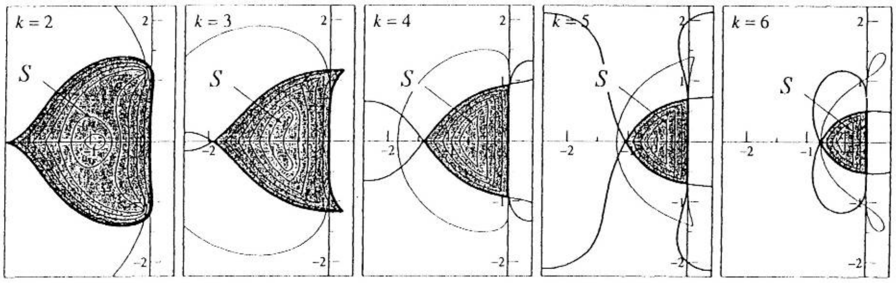


Fig. 1.4. Stability domains for PECE compared to original implicit methods

Anschließend noch die Bereiche der absoluten Stabilität der BDF-Formeln

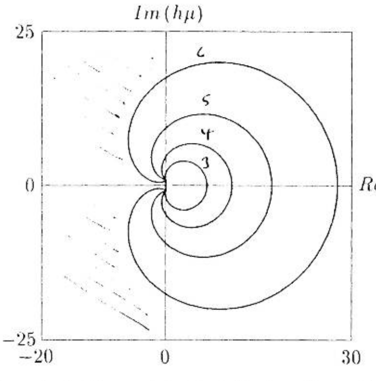


Abbildung 1.5: Stabilitätsgebiete für Ordnung $k = 3, 4, 5, 6$

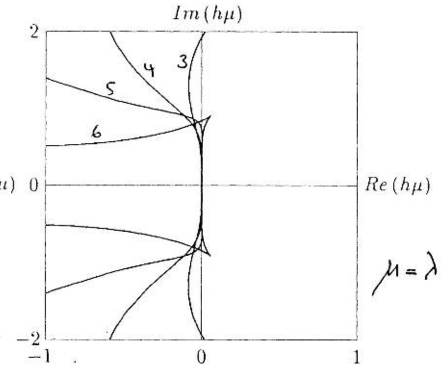


Abbildung 1.6: Ausschnitt für Ordnung $k = 3, 4, 5, 6$

Bemerkung:
Es wird i.A. schwierig sein, für alle $\hbar$, alle Wurzeln einer charakteristischen Gleichung

$$(a_k - \hbar b_k)u^k + \ldots + (a_0 - \hbar b_0) = 0$$

zu ermitteln. Da hilft der folgende Trick:
Bestimmen Sie die $\hbar$ (Kurve in **C**) für die das charakteristische Polynom Wurzeln mit dem Betrag 1 hat. Die Wurzeln mit dem Betrag 1 sind gegeben durch

$$\sum_{j=0}^{k}(a_j - \hbar b_j)e^{ji\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hbar = \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j e^{ji\varphi}}{\sum_{j=0}^{k} b_j e^{ji\varphi}}.$$

Ein einfacher Test liefert dann den Bereich der absoluten Stabilität.

Definition
Ein stabiles und konsistentes Mehrschrittverfahren heißt A-stabil, wenn die Wurzeln der charakterischen Gleichung für alle $\hbar$, Re($\hbar$)<0, dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Kurz: Wenn der Bereich der absoluten Stabilität die linke komplexe Halbebene ist.

Beispiele
Das implizite Euler-Verfahren, die Trapezregel und die BDF-Formel der Ordnung 2 sind A-stabile Differenzenverfahren.

§ 5.5 L-Stabile Verfahren

Bereits im Kapitel 1 hatten wir gesehen, dass die Trapezregel (obwohl A-Stabil) nicht in der Lage war, die Anfangswertaufgabe $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, mit negativen und betragsgroßen λ adäquat zu integrieren. Dieses hat zu einem weiteren Stabilitätsbegriff geführt.

Definition
Ein implizites Runge-Kutta-Verfahren heißt L-stabil, wenn es A-Stabil ist und für seine Übertragungsfunktion R(z) gilt

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = 0.$$

Beispiele für L-stabile Verfahren sind wieder das implizite Euler-Verfahren, aber auch die sogenannte Radau IIA-Formel.

Auch für lineare konsistente und stabile Mehrschrittverfahren wird L-Stabilität definiert. Die A-Stabilität der Verfahren wird allerdings nicht verlangt.

Definition
Ein lineares, konsistentes und stabiles Mehrschrittverfahren heißt L- stabil, wenn für die Wurzeln $s_i(\hbar)$ der charakteristischen Gleichung

$$\varphi(u) = \sum_{j=0}^{k}(a_j - \hbar b_j)u^j = 0$$

gilt

$$\limsup_{\mathrm{Re}(\hbar)\to-\infty} |s_i(\hbar)| < 1 \qquad \text{für } i = 1,2, \dots ,k.$$

Als Beispiele für L-Stabile Verfahren können die BDF-Formeln genannt werden. Die Trapezregel ist nicht L-stabil!

.