

Numerische Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Eine Einführung

Universität Hamburg
SoSe07

K. Taubert

Numerik gewöhnlicher Anfangswertaufgaben

2 EINSCHRITTVERFAHREN, insbesondere RUNGE-KUTTA-VERFAHREN

Es werden allgemeine Einschrittverfahren und insbesondere (R)unge-(K)utta-(V)erfahren zur numerischen Approximation von Lösungen von Anfangswertaufgaben eingeführt. Mit den BUTCHER-Arrays wird ein übersichtliches Mittel zur Darstellung von allgemeinen expliziten und impliziten RKV zur Verfügung gestellt.

Die Begriffe Konsistenz und lokaler (Abbruch-) Fehler von Einschrittverfahren werden eingeführt. Diese Begriffe sagen etwas über die „Güte“ der Verfahren aus und liefern für geeignete Klassen von Anfangswertaufgaben auch die „Konvergenz“ dieser Verfahren. Einschrittverfahren eignen sich besonders für Schrittweitensteuerungen die zu erheblichen Recheneinsparungen führen können.

Später zeigt sich, dass viele RKV sich auch für die Approximation von Lösungen von Algebra-Differentialgleichungen eignen.

§ 2.1 Einschrittverfahren

Gegeben sei die skalare Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (*)$$

mit einer stetigen Funktion $f: \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, die außerdem die Lipschitzbedingung

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq K |u - v| \quad \text{für alle } x, u, v \in \mathbf{R}$$

mit einem $K \geq 0$ erfüllt.

Bemerkung

Die Lipschitzbedingung wird häufig auch durch die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit von f in einer Umgebung (x_0, y_0) ersetzt.

Die Voraussetzungen führen dazu, dass es eine eindeutige Lösung auf jedem Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt.

Ein allgemeines explizites Einschrittverfahren für (*) hat die Form (mit $h > 0$)

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h, f) \quad (**)$$

mit einer reellwertigen Funktion $\Phi(x, u, h, f)$. Außerdem verlangen wir noch, dass Φ eine Lipschitzbedingung

$$|\Phi(x, u, h, f) - \Phi(x, v, h, f)| \leq L_f |u - v|$$

für alle zulässigen x, u, v und h mit einer Lipschitzkonstanten $L_f > 0$ erfüllt.

Beispiel 1 (Das Euler-Verfahren)

Ein explizites Einschrittverfahren kennen wir bereits, nämlich das explizite Euler-Verfahren:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \text{mit} \quad \Phi(x, y, h, f) = f(x, y).$$

Beispiel 2 (Das Euler-Cauchy-Verfahren)

Das Euler-Cauchy-Verfahren baut auf das Euler-Verfahren auf und hat die Gestalt

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right]$$

oder

$$\Phi(x, y, h, f) = \frac{1}{2} f(x, y) + \frac{1}{2} f(x+h, y+hf(x, y)).$$

Beispiel 3 (Verbessertes Euler-Verfahren)

Hierbei handelt es sich um eine Art Mittelpunktsformel

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2} hf(x_n, y_n)\right)$$

oder

$$\Phi(x, y, h, f) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2} hf(x, y)\right).$$

Beispiel 4 (Klassisches Runge-Kutta-Verfahren)

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren (der Ordnung 4) hat die Form

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

und entsprechendem Φ .

Bemerkung

Man beachte, dass die angegebenen Funktionen Φ stets ein gewichtetes Mittel von Steigungen sind. Da f eine Lipschitzbedingung erfüllt, kann leicht verifiziert werden, dass die bisher angegebenen Funktionen Φ auch die geforderte Lipschitzbedingung erfüllen.

Gegeben sei nun die Anfangswertaufgabe (*), ein explizites Einschrittverfahren (**) und ein Intervall (x_0, x_0+T) mit $0 < T < \infty$.

Es sei $y(\cdot)$ die Lösung von (*) auf $[x_0, x_0+T)$, $x_n = x_0 + nh$ für $h > 0$ mit $n = 0, 1, 2, \dots, N_h$ und N_h die maximale ganze Zahl, so dass $x_{N_h} \leq x_0+T$.

Für jedes $0 \leq n \leq N_h - 1$ gilt dann

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \Phi(x_n, y(x_n), h, f) + \varepsilon_{n+1}.$$

mit einem geeigneten ε_{n+1} .

Definition 2.1 (Lokaler Fehler)

Der Defekt $E_{n+1}(h) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \Phi(x_n, y(x_n), h, f)$ heißt lokaler Fehler im Knoten x_{n+1} .

Bemerkung

Der Begriff des lokalen Fehlers ist in der Literatur nicht ganz einheitlich. In der Darstellung

$$E_{n+1}(h) = h \tau_{n+1}(h).$$

wird auch $\tau_{n+1}(h)$ oft als lokaler (Abbruch-) Fehler im Knoten x_{n+1} bezeichnet

Definition 2.2 (Ordnung)

Ein explizites Einschrittverfahren (**) hat die Ordnung $p \geq 1$ ($p \in \mathbf{N}$), wenn für alle Anfangswertaufgaben (x_0, y_0) mit hinreichend oft differenzierbaren Lösungen gilt

$$|y(x_0+h) - y_1| \leq Mh^{p+1}.$$

Dabei sei $y(x_0+h)$ die Lösung zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ an der Stelle x_0+h und

$$y_1 = y_0 + h \Phi(x_0, y_0, h, f).$$

Bemerkung

Häufig wird für die Einschrittverfahren auch noch ein Konsistenzbegriff eingeführt. Der Begriff Konsistenz wird in der Literatur nicht ganz einheitlich formuliert. Gelegentlich wird die Konsistenz auch mit der Forderung nach einer Mindestordnung 1 gleichgesetzt.

Man beachte, dass bei der Definition der Ordnung für explizite RKV die Konstante M zunächst von den Anfangsbedingungen und f abhängt.

Die Ordnung p kann auch so interpretiert werden: Die Taylorentwicklung von $y(x_0+h)$ an der Stelle x_0 muss einschließlich dem Term h^p mit y_1 übereinstimmen.

Beispiel 5

Gegeben sei eine Anfangswertaufgabe (*) mit einer sogar stetig differenzierbaren Funktion f . Für alle Anfangsbedingungen sind dann die Lösungen der Anfangswertaufgaben zweimal stetig differenzierbar.

Der lokale Fehler im Knoten x_{n+1} des expliziten Euler-Verfahrens ergibt sich aus

$$\begin{aligned} E_{n+1}(h) &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \Phi(x_n, y(x_n); h, f) \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) \\ &= y(x_n) + y'(x_n)h + y''(\zeta) \frac{h^2}{2!} - y(x_n) - hy'(x_n) = y''(\zeta) \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

mit einem $\zeta \in (x_n, x_{n+1})$.

Damit ist der lokale Fehler im Knoten x_{n+1}

$$E_{n+1}(h) = \frac{h^2}{2} y''(\zeta)$$

Das Euler-Verfahren ist nach Konstruktion von der Ordnung 1.

Bemerkungen

Im Kapitel 3 wird sich zeigen, dass die Ermittlung der Ordnung eines Einschrittverfahrens durchaus mühsam und langwierig sein kann. Besondere Techniken für die Ermittlung der Ordnung von RKV sind entwickelt worden.

Den einzelnen Verfahren wird also eine Ordnung p zugeordnet. Diese Ordnung plus Eins liefert auch die Größenordnung des lokalen Fehler, wenn f hinreichend oft differenzierbar ist.

Im schraffierten Bereich der nachfolgenden Tabelle ist die Ordnung p für das jeweilige Verfahren angegeben. Wird zu der Zahl in der Tabelle eine 1 addiert, dann liefert diese Zahl die Größenordnung des lokalen Fehlers für die jeweilige Klasse von Funktionen f .

Euler Verfahren	Verbessertes Euler Verfahren	Euler-Cauchy Verfahren	Klassisches Runge-Kutta Verfahren	Klassen f
1	1	1	1	f 1*stet. diff
1	2	2	2	f 2*stet. diff
1	2	2	4	f 4*stet. diff

§ 2.2 Ein erster Konvergenzsatz. Bemerkungen

Es soll hier ein erster Konvergenzsatz für Einschrittverfahren angegeben werden.

Satz 2.1

Gegeben sei das Intervall $[x_0, x_0+T]$ und die skalare Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0^a,$$

mit einer p -mal stetig differenzierbaren Funktion $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, die außerdem die Lipschitzbedingung

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq K |u - v| \quad \text{für alle } x, u, v \in \mathbf{R}$$

mit einem $K \geq 0$ erfüllt. Es sei $y(\cdot)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe auf $[x_0, x_0+T]$.

Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit der Ordnung p

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h, f) + \delta_n, \quad y_0 = y_0^h,$$

das außerdem die Lipschitzbedingung.

$$|\Phi(x, u, h, f) - \Phi(x, v, h, f)| \leq L_f |u - v|$$

erfüllt.

Es sei $\delta \geq |\delta_n|$ eine obere Schranke für die während der Durchführung des Einschrittverfahrens auftretenden (Rundungs-)fehler δ_n

Für die in Frage kommenden lokalen Fehler $E_{n+1}(h)$ gelte $|E_{n+1}(h)| \leq Mh^{p+1}$ mit einem einheitlichen M .

Es sei $F_n = y(x_n) - y_n^h$ und insbesondere $F_0 = y(x_0) - y_0^h$.

Für jedes $h > 0$ und alle n mit $x_0 + nh \leq x_0 + T$ gilt dann

$$|F_n| \leq e^{L_f T} |F_0| + \frac{M}{L_f} (e^{L_f T} - 1) h^p + \frac{1}{L_f} (e^{L_f T} - 1) \frac{\delta}{h}.$$

Beweis

Wir führen den Beweis nur für das explizite Euler-Verfahren und $\delta_n = 0$ durch. Einsetzen der Lösung der Anfangswertaufgabe in das Verfahren liefert:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n)) \\ &= y(t_n) + y'(t_n)h + y''(\zeta) \frac{h^2}{2!} - y(t_n) - hy'(t_n) \\ &= y''(\zeta) \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

mit einem geeigneten $\zeta \in (t_n, t_{n+1})$.

Damit ist

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_n) - y_n + h(f(t_n, y(t_n)) - hf(t_n, y_n)) + y''(\zeta) \frac{h^2}{2}$$

oder

$$|F_{n+1}| \leq |F_n| + K|F_n| + \varepsilon(h)$$

mit

$$\varepsilon(h) = \frac{h^2}{2!} \max_{\eta \in [t_0, t_0+T]} |y''(\eta)| =: Mh^2.$$

Die Rekursionsformel für $|F_n|$ liefert

$$\begin{aligned} |F_{n+1}| &\leq (1+hK)^{n+1} |F_0| + \sum_{v=0}^n (1+hK)^v \varepsilon(h) \\ &\leq (1+hK)^{n+1} |F_0| + \frac{(1+hK)^{n+1} - 1}{(1+hK) - 1} \varepsilon(h) \end{aligned}$$

$$\leq e^{K(x_{n+1}-x_0)} |F_0| + h \frac{M}{K} (e^{K(x_{n+1}-x_0)} - 1).$$

Werden noch die Rundungsfehler δ_n berücksichtigt, dann ergibt sich in ähnlicher Form

$$|F_{n+1}| \leq e^{KT} |F_0| + h \frac{M}{K} (e^{KT} - 1) + \frac{\delta}{h} \frac{1}{K} (e^{KT} - 1).$$

Bemerkungen

Es ist zweckmäßig, die angegebene Abschätzung für den globalen Fehler genauer zu untersuchen:

Ein Fehlerverhalten der Größenordnung $O(h^p)$ ist dann zu erwarten, wenn

1. $|F_0| \leq C_1 h^p$,
2. $|\delta_n| \leq C_2 h^{p+1}$,
3. das Einschrittverfahren von der Ordnung p ist und
4. f p -mal stetig differenzierbar ist.

Ist auch nur eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, dann muss von einem schlechteren Fehlerverhalten ausgegangen werden.

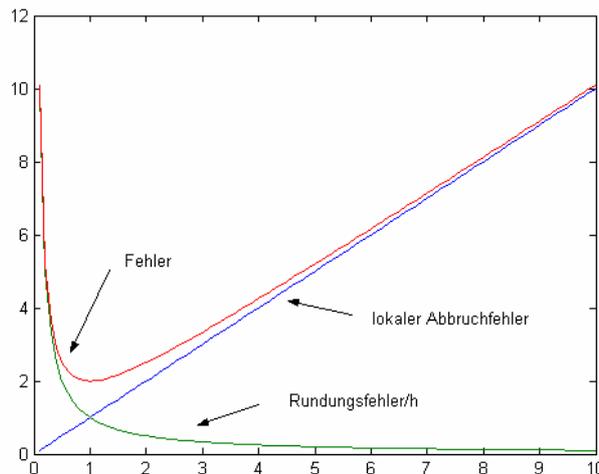
Von praktischer Bedeutung ist auch noch die folgende Beobachtung:

Angenommen, es ist $|F_0| = 0$, dann setzt sich der globale Fehler den zwei Komponenten

$$h^p * L \quad \text{und} \quad (1/h) * \bar{L} * \delta$$

zusammen.

Das qualitative Fehlerverhalten, welches sich daraus ergibt, kann aus der folgenden Zeichnung entnommen werden:



Sind die Rundungsfehler nicht der Schrittweite angepasst, dann ist unterhalb einer kritischen Schrittweite mit einer Zunahme des globalen Fehlers zu rechnen. D.h., eine ständige Verringerung der Schrittweite ist nicht nur aufwendig, sondern letztlich auch völlig kontraproduktiv.

§ 2.3 Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Ein M-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren hat die allgemeine Form

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^M b_i Y_i'$$

mit

$Y_1 = y_n$	$Y_1' = f(x_n, y_n)$
$Y_2 = y_n + h[a_{21} Y_1']$	$Y_2' = f(x_n + c_2 h, Y_2)$
$Y_3 = y_n + h[a_{31} Y_1' + a_{32} Y_2']$	$Y_3' = f(x_n + c_3 h, Y_3)$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
$Y_M = y_n + h[a_{M1} Y_1' + a_{M2} Y_2' + \dots + a_{M,M-1} Y_{M-1}']$	$Y_M' = f(x_n + c_M h, Y_M)$

Als Kurzschreibweise haben sich (seit 1964) die zugehörigen BUTCHER-Arrays bewährt:

$\begin{array}{c cccc} 0=c_1 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ c_M & a_{M1} & a_{M2} & \dots & \dots & a_{M-1,M} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{M-1} & b_M \end{array}$	oder	$\frac{c}{b^T} \left \begin{array}{c} A \\ b^T \end{array} \right.$
---	------	--

Einige Beispiele für Butcher-Arrays mit den zugehörigen Ordnungen M der RKV sind:

Euler-Verfahren

$$\frac{0}{1} \left| \begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \right.$$

M=p=1

Euler-Cauchy

$$\frac{0}{1} \left| \begin{array}{cc} 1 & \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right.$$

M=p=2

Verbessertes Euler

$$\frac{0}{1/2} \left| \begin{array}{cc} 1/2 & \\ 0 & 1 \end{array} \right.$$

M=p=2

Heun-Verfahren

Klassisches RKV

3/8-Formel

0			
1/3	1/3		
2/3	0	2/3	
	1/4	0	3/4

M=p=3

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	2/6	2/6	1/6

M=p=4

0				
1/3	1/3			
2/3	-1/3	1		
1	1	-1	1	
	1/8	3/8	3/8	1/8

M=p=4

Bemerkung:

Die Erwartung, dass mit einem p-stufigen expliziten RKV auch stets die Ordnung p erreicht werden kann, ist leider falsch. Die in besten Fall erreichbare Ordnung wird in der folgenden Tabelle genannt:

Ordnung	1	2	3	4	5	6	7	8
Mindeststufe	1	2	3	4	6	7	9	11

Beachten Sie, dass mit zunehmender Stufe auch die Anzahl der Funktionsauswertungen pro Schritt steigt.

§ 2.4 Ein zweiter Konvergenzsatz. Bemerkungen

Neben den bisher behandelten skalaren Anfangswertaufgaben

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (***)$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbf{R}^* \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, sind auch Aufgaben mit der Eigenschaft

$$(f(x,u) - f(x,v))(u-v) \leq K(u-v)(u-v) \quad \text{für alle } x,u,v \in \mathbf{R}$$

und ein $K \in \mathbf{R}$ von praktischer und theoretischer Bedeutung.

Für $K < 0$ bedeutet diese Bedingung, dass f eine in der zweiten Komponente streng monoton fallende Funktion ist. Für $K \leq 0$ haben die Anfangswertaufgaben stets eine eindeutige Lösung für alle $x \geq x_0$ und für die Differenz von zwei Lösungen $y_1(\cdot)$ und $y_2(\cdot)$ gilt offenbar (!)

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{K(x-x_0)} |y_1(x_0) - y_2(x_0)| \quad \text{für alle } x \geq x_0.$$

Einer numerischen Integration dieser Aufgaben mit Einschrittverfahren steht zunächst nichts im Wege. Der folgende Satz liefert sogar eine auf den ersten Blick adäquate Abschätzung für den globalen Fehler.

Satz 2.2

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbf{R}^* \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ und der Eigenschaft

$$(f(x,u) - f(x,v))(u-v) \leq K(u-v)(u-v) \quad \text{für alle } x,u,v \in \mathbf{R}$$

mit einem $K < 0$.

Es sei $y_0(\cdot)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y_0(x_0) = y_0$ auf dem Intervall $I = [x_0, x_0+T]$ und U eine Umgebung von $\{(x, y_0(x)) / x \in I\}$.
Gegeben sei ein RKV

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h, f)$$

der Ordnung p und für alle zulässigen (x, v) aus U gelte

$$|y(x+h) - y_1| \leq Mh^{p+1}$$

mit einem einheitlichen M .

Dabei sei $y(\cdot)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y(x) = v$ und $y_1 = v + h \Phi(x, v, h, f)$.
Dann gilt

$$|F_n| \leq \frac{M}{K} e^{(-Kh)} (e^{K(x_n - x_0)} - 1) h^p$$

für alle hinreichend kleinen h , so dass die numerische Approximation in U bleibt.

Beweis

Es sei $x_i = x_0 + ih$ für $i = 0, 1, 2, \dots, N$ mit $x_0 + Nh \in I$.

Es sei $y_1(x)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y_1(x_1) = y_1$. Dann gilt

$$E_1 = |y_0(x_N) - y_1(x_N)| \leq Mh^{p+1} e^{K(x_N - x_1)}$$

Es sei $y_2(x)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y_2(x_2) = y_2$. Dann gilt

$$E_2 = |y_1(x_N) - y_2(x_N)| \leq Mh^{p+1} e^{K(x_N - x_2)}$$

Ist allgemein $y_i(x)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit $y_i(x_i) = y_i$ dann gilt

$$E_i = |y_{i-1}(x_N) - y_i(x_N)| \leq Mh^{p+1} e^{K(x_N - x_i)}$$

Damit kann $|y_0(x_N) - y_N|$ abgeschätzt werden durch

$$|y_0(x_N) - y_N| \leq Mh^p \sum_{i=1}^N E_i$$

und die Summe durch

$$\int_{x_0}^{x_N} e^{K(x_N - h - x)} dx$$

Bemerkung

Die im ersten Kapitel durchgeführte numerische Integration der Anfangswertaufgabe $y' = -1000y$, $y(0) = 1$, mit dem Euler-Verfahren zeigt, dass der obige Satz seine Tücken hat. Da die Funktion f der Bedingung

$$(f(x, u) - f(x, v))(u - v) \leq 0$$

genügt, ist es nahe liegend, zu fordern bzw. zu erwarten, dass auch Φ die Bedingung

$$(\Phi(x, u, h, f) - \Phi(x, v, h, f))(u - v) \leq 0$$

erfüllt. Dieses erweist sich als problematisch und wird später in Kapitel 5 gesondert behandelt.

§ 2.5 Implizite Runge-Kutta Verfahren

Mit den bisherigen Butcher-Arrays können nun leicht auch implizite M-stufige RKV eingeführt werden:

c_1	a_{11}	a_{21}	\dots	\dots	$a_{1,M-1}$	a_{1M}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	\dots	$a_{2,M-1}$	a_{2M}
c_3	a_{31}	a_{32}	\dots	\dots	$a_{3,M-1}$	a_{3M}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
c_M	a_{M1}	a_{M2}	\dots	\dots	$a_{M-1,M}$	$a_{M,M}$
	b_1	b_2	\dots	\dots	b_{M-1}	b_M

Diese Arrays führen zu

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^M b_i f(x_n + c_i h, g_i)$$

$$g_i = y_n + h \sum_{j=1}^M a_{ij} f(x_n + c_j h, g_j).$$

Bei einem echten impliziten RKV ist also in jedem Schritt eine Fixpunktaufgabe $G = F(G)$ mit $F : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$ (!) zu lösen.

Beispiel (M=2)

Ein zweistufiges implizites RKV hat die Gestalt

$$y_{n+1} = y_n + hb_1 f(x_n + c_1 h, g_1) + hb_2 f(x_n + c_2 h, g_2)$$

mit

$$g_1 = y_n + ha_{11} f(x_n + c_1 h, g_1) + ha_{12} f(x_n + c_2 h, g_2)$$

oder $G = F(G)$

$$g_2 = y_n + ha_{21} f(x_n + c_1 h, g_1) + ha_{22} f(x_n + c_2 h, g_2)$$

Mit $G = (g_1, g_2)^T$ ist also in jedem Schritt die Fixpunktaufgabe $G = F(G)$ zu lösen.

Damit kann der Aufwand für die Berechnung einer neuen Näherung erheblich anwachsen. Für hinreichend kleine Schrittweiten h und Lipschitzstetige f können diese Aufgaben mit dem Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen gelöst werden. Bei Aufgaben, bei denen f eine große Lipschitzkonstante hat, wird man die Fixpunktaufgabe mit dem Newton-Verfahren lösen müssen.

Einige Beispiele für implizite RKV sind

Impliziter Euler Mittelpunktfornel

Gauß-Legendre

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Ordnung 1

Ordnung 2

Ordnung 4

Das Butcher-Array für das implizite Euler-Verfahren führt zu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n+h, g_1)$$

oder

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n+h, y_{n+1}).$$

$$g_1 = y_n + hf(x_n+h, g_1)$$

Das Butcher-Array für die Mittelpunktfornel führt zu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n+h/2, g_1)$$

oder

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n+h/2, (y_n + y_{n+1})/2).$$

$$g_1 = y_n + (h/2)f(t_n+h/2, g_1)$$