Übungen zu Numerische Mathematik
SS06
B. von Loesch, K. Taubert

Abgabe: 13.6.06 vor den Übungen

Aufgabe 30
Jene die diese Aufgabe noch nicht behandelt haben, haben dafür noch zwei weitere Wochen.

Aufgabe 31
Die zu einer Norm || . || im R^n zugeordnete Matrixnorm ist gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}, \qquad A \in R^{n*n}.$$

Zeigen Sie, dass die zur Maximum-Norm im R^n zugeordnete Matrixnorm durch

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \operatorname*{Max}_i \left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right)$$

gegeben ist.
Geben Sie die Kondition der $10^6 * 10^6$ Tridiagonal-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -8 & & \\ -8 & 20 & -8 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -8 & 20 \end{pmatrix}$$

in der Maximum-Norm an.
Geben Sie die zur Norm $\| x \|_\infty^c = \operatorname*{Max}_i c_i|x_i|$, $x \in R^n$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c_i > 0$, zugeordnete Matrixnorm an.
Zeige, dass es zu den folgenden Matrixnormen Matrizen gibt, dass einmal die eine und einmal die andere Norm größer ausfällt:

Zeilensummennorm, Spaltensummennorm.

Aufgabe 32
Die (Runge-) Funktion

$$f(x) = 1/(1+x^2)$$

soll im Intervall [-5,5] durch einen natürlichen interpolatorischen kubischen Spline, mit einem Gitter von 11 äquidistanten Knoten, approximiert werden
Fertigen Sie ein Bild an, das sowohl die Runge Funktion als auch den approximierenden Spline enthält und die Differenz der beiden Funktionen erkennen lässt. Ähnliches soll mit der ersten, zweiten und dritten Ableitung der Runge Funktion und den entsprechenden Ableitungen des interpolierenden Splines geschehen.

Aufgabe 33
Eine Bezier-Kurve dritten Grades hat die Gestalt

$$B_3(a_0,a_1,a_2,a_3,t) = (1-t)^3a_0+3(1-t)^2ta_1+3t^2(1-t)a_2+t^3a_3.$$

Ein Viertelkreis vom Radius 1 soll nun durch eine Bezier-Kurve dritten Grades approximiert werden. Die Tangenten der Bezier-Kurve in den Endpunkten soll mit den Tangenten an den Endpunkten des Viertelkreises übereinstimmen. $B_3(a_0,a_1,a_2,a_3,0.5)$ soll auf dem Viertelkreis liegen.
Mit vier – ähnlich gebauten Kurvensegmente - soll jetzt eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 1.81066$ und $b = 1$ approximiert werden.

Aufgabe 34
Gegeben seien die Punkte ($a = 1/\sqrt{2}$)

$$(0,0), (1,1), (2,0), (3,1), (3-a,1+a), (3,1+2a), (3.5,0.5+2a), (3.25,1+a), (3,0.5+2a)$$

Bestimmen Sie die zugehörige Bezier-Kurve und den zugehörigen parametrischen kubischen Spline.