Übungen zu Numerische Mathematik
SS06
B. von Loesch, K. Taubert

Abgabe: 30.5.06 vor den Übungen

Aufgabe 28 (Achtung: korrigierte Fassung!)
Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

a) Schreiben Sie einen Algorithmus der eine effiziente LR-Zerlegung von T der Form

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ s_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & s_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & r_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & d_{n-1} & r_{n-1} \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Matrizen L und R sollen nur die Vektoren s, d, r berechnet werden.

b) Zeigen Sie dass der Algorithmus wohldefiniert ist, wenn die Matrix T diagonaldominant ist:

$$|a_1| > |c_1|$$
$$|a_i| \geq |c_i| + |b_i| \qquad i = 2, \dots, n-1$$
$$|a_n| \geq |b_n| \qquad b_i \neq 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, n.$$

Tipp: Induktion.

c) Verwenden Sie die Zerlegung aus a) und Vorwärts- und Rückwärtssubstitution um den Thomas_Algorithmus zum Lösen von linearen Gleichungssystemen der Form Tx = y für tridiagonale Matrizen T herzuleiten:

1) Setze $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
2) Berechne

$$\alpha_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i + \alpha_i b_i} \quad \text{und} \quad \beta_{i+1} = \frac{y_i - \beta_i b_i}{a_i + \alpha_i b_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

3) Setze $x_n = \beta_{n+1}$.
4) Berechne

$$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i \quad \text{für } i = n, \dots, 2$$

Aufgabe 29
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Geben Sie die Kondition cond (bezüglich der Maximum-Norm) der Matrizen

$$A, \quad \Lambda_1^A A, \quad \Lambda_2^A \Lambda_1^A A,$$

die bei einer Durchführung des GEV entstehen würden, an.
Geben Sie eine 3*3 Matrix B mit cond (B) < cond($\Lambda_1^B B$) < cond($\Lambda_2^B \Lambda_1^B B$) an.

Geben Sie die Kondition (bezüglich der 2-Norm) der n*n-Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

an. Dabei soll $1 \le n \le 100$ gewählt werden. Die Eigenwerte können mit der MATLAB-Anweisung eig(A) bestimmt werden.

Aufgabe 30
Gegeben sei eine Matrix G der Form

$$\begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_3 & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_4 & 0 & -G_4 & 0 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3+G_5+G_6 & 0 & -G_5 & -G_6 \\ 0 & -G_4 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_5 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & 0 & -G_6 & 0 & 0 & G_6 \end{pmatrix}$$

mit $G_i > 0$.
Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$Gx = b$$

für alle $b \in R^6$ eine eindeutige Lösung besitzt.