Übungen zu Numerische Mathematik
SS06
K. Taubert

Abgabe: 11.4.06 vor den Übungen

Lösen Sie die folgenden vier Aufgaben (Teilnehmer an der Übung vom 4.4.06 werden es besonders einfach haben) und ordnen Sie allen (Teil-) Aufgaben ein oder mehrere passende Kapitel des Skriptes zu.

Aufgabe 1
Von der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist nur bekannt, dass sie in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ und $x_2 = \pi$ die folgenden Funktionswerte $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = 0$ annimmt. Bestimmen Sie ein Polynom 2. Grades $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,2$ und berechnen Sie $\int_0^\pi p(x)dx$ als Näherung für $\int_0^\pi f(x)dx$.

Aufgabe 2
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbf{R}$ die Lösbarkeit von

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 &= 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x_1,x_2) = x_1+2x_2$ auf der Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 3, -x_1 + x_2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 3
Geben Sie die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ -11x_1 - 21x_2 &= -12 \end{aligned}$$

an.
Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie <u>alle</u> Nullstellen von

$$f(x) = e^x - x - 2.$$

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz und den Satz von Rolle.

Aufgabe 5
Das Polynom $p(x) = 2x^3-x^2+3x-5$ soll mit Hilfe des vollständigen Horner-Schema durch $x =z+2$ auf die neue Veränderliche $z = x-2$ umgeschrieben werden.

Aufgabe 6
Zeige mit dem vollständigen Horner Schema, dass eine kubische Gleichung

$$x^3 +ax^2 +bx +c = 0$$

auf die reduzierte Form

$$z^3 +pz +q = 0$$

überführt werden kann. Überführe die Gleichung

$$x^3 +3x^2 -5x +7 = 0$$

auf eine reduzierte Form und bestimme graphisch eine reelle Lösung. Verbessere die reelle Lösung mit der Intervallhalbierungsmethode oder dem Newton Verfahren. Bestimme anschließend „gute" Näherungen für die beiden komplexen Wurzeln des ursprünglichen Polynoms.