Übungen zu Numerische Mathematik II
WS06/07
J. Sternberg, K. Taubert

Abgabe: 21.11.06 vor den Übungen

Aufgabe 11/12
Gegeben sei die 2π-periodische (Sprung-) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ -1 & \text{für} \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Bekanntlich lässt sich f als Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

darstellen und die zugehörigen Fourierkoeffizienten haben die Gestalt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

und für k =1,2,3,….

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx\,.$$

a) Da f eine ungerade Funktion ist, gilt $a_0 = a_j = 0$. Außerdem ist auch $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$. Berechnen Sie die übrigen Koeffizienten der Fourierreihe.

b) Das Ausdruck $f(x)- t_n(x) = f(x)- (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ soll für verschiedene $n = 20,60,200$ geplottet werden. Wählen Sie jeweils 2n Stützstellen zum Plotten der Differenz und beobachten Sie das „Gibbsche Phänomen".

c) Ersetzen Sie die exakten Koeffizienten a_0, a_k und b_k durch jene Werte die entstehen, wenn die zugehörigen Integrale mit der m =2n+1 wiederholten Trapezregel berechnet werden, d.h.

$$a_j^* = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{m-1} f(x_j)\cos(kx_j) \quad \text{für} \quad j = 0,1,2, \ldots\ldots, n$$

$$b_j^* = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{m-1} f(x_j)\sin(kx_j) \quad \text{für} \quad j = 1,2, \ldots\ldots, n$$

und

$$x_j = \frac{2\pi}{m} j \quad \text{für} \quad j = 0,1, \ldots, m-1.$$

Drucken Sie für verschiedene n = 0,1,2, ….., 400 die Differenz

$$f(x_j) - \left(\frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_j^* \cos(kx_j) + b_j^* \sin(kx_j)\right), \qquad j = 0,1,2, \ldots\ldots, m\text{-}1$$

und $$f\left(x_j+\frac{\pi}{m}\right) - \left(\frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_j^* \cos\left(k\left(x_j + \frac{\pi}{m}\right)\right) + b_j^* \sin\left(k\left(x_j + \frac{\pi}{m}\right)\right)\right), \quad j = 0,1,2, \ldots\ldots, m\text{-}1$$

aus.
Was beobachten Sie?

d) Es sei

$$f_{op}^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx)$$

und

$$f_{eps}^{**}(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{N} (a_j^* + eps)\cos(jx) + (b_j^* + eps)\sin(jx)$$

mit durch eps leicht geänderten Koeffizienten.
Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) - f_{op}^*(x_k))^2$$

und vergleichen Sie diesen Wert mit

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) - f_{eps}^{**}(x_k))^2 .$$

e) Wiederholen Sie die Aufgabe mit der Rampenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ -2\pi + x & \text{für} \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(Beachten Sie, dass die Aussage aus a für diese Funktion nicht gilt)

Aufgabe 13
Der Wert des trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin(3x)\right)$$

soll an den Stellen $x_j = \frac{2\pi j}{4}$, $j = 0,1,2,3$ bestimmt werden. Bestimmen Sie zunächst ein zugehöriges diskretes Fourierpolynom und werten Sie dieses anschließend mit einer FFT aus.

Aufgabe 14
Beweisen Sie die grundlegende Aufspaltung für die FFT.
Es sei N Gerade und

$$t_N(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \omega_N^{jk} \quad \text{für} \quad k = 0,1, \ldots, N-1$$

dann gilt mit M=N/2

$$t_N(x_{2s}) = \sum_{j=0}^{M-1} d_j \omega_M^{js} \quad \text{für} \quad s = 0,1, \ldots, M-1 \quad \text{mit} \quad d_j = c_j + c_{j+M}$$

und

$$t_N(x_{2s+1}) = \sum_{j=0}^{M-1} d_{j+M} \omega_M^{js} \quad \text{für} \quad s = 0,1, \ldots, M-1 \quad \text{mit} \quad d_{j+M} = (c_j - c_{j+M})\omega_N^j.$$