

Asymptotische Methoden der Angewandten Mathematik

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Felix Klein Zentrum für Mathematik
Sommerschule 2012

Inhalte der Vorlesung und Literaturhinweise.

Inhalte:

- 1 Van–der–Pol Oszillator.
- 2 Singulär– und regulär–gestörte Probleme.
- 3 Asymptotische Entwicklungen.
- 4 Grenzsichten.
- 5 Mehrskalenphänomene.

Literaturhinweise:

- 1 E.J. Hinch, Perturbation Methods, Cambridge University Press.
- 2 G.I. Barenblatt, Scaling, self–similarity, and intermediate asymptotics, Cambridge University Press.

Der van–der–Pol Oszillator.

Der van–der–Pol Oszillator wird beschrieben durch die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + k\dot{x}(x^2 - 1) + x = 0$$

Für große Zeiten t ist die Lösung eine Schwingung mit einer von den Anfangsbedingungen unabhängigen Amplitude.

Eine **asymptotische Entwicklung** der Grenzperiode lautet

Grenzperiode =

$$\begin{cases} 2\pi(1 + \frac{1}{16}k^2 + O(k^4)) & \text{für } k \rightarrow 0 \\ k(3 - 2\ln 2) + 7.0143k^{-1/3} + O(k^{-1} \ln k) & \text{für } k \rightarrow \infty \end{cases}$$

Kapitel 1. Einleitung

Grundgedanke: Wir suchen bei einem gegebenen Problem der Form

$$A(u) = f$$

einen “kleinen” Parameter ε , von dem A abhängt, d.h. $A = A^\varepsilon$ und betrachten das Problem

$$A^\varepsilon(u_\varepsilon) = f$$

Dann lösen wir die “einfachere” Modellgleichung

$$A^0(u_0) = f$$

- 1 Was ist der kleine Parameter ε ?
- 2 In welchem Sinne strebt $A^\varepsilon \rightarrow A^0$?
- 3 Kann man $A^0(u_0) = f$ lösen?
- 4 Liegt u_0 “in der Nähe” von u_ε ?

Ein erstes Beispiel.

Wir schreiben die quadratische Gleichung $A(x) = x^2 + 0.01 \cdot x - 1 = 0$ als

$$A^\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon x - 1 = 0$$

mit dem Parameter $\varepsilon \ll 1$ und berechnen die beiden Nullstellen

$$x_\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2}$$

Eine Taylor-Entwicklung um den Punkt $\varepsilon = 0$ ergibt

$$x_\varepsilon = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} + \dots \\ -1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \dots \end{cases}$$

Die Gleichung $A^\varepsilon(x) = 0$ besitzt für $\varepsilon > 0$ zwei Lösungen und beide konvergieren für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die beiden Lösungen von $A^0(x) = 0$.

Ein solches Problem nennt man **regulär-gestört**.



Ein zweites Beispiel.

Wir schreiben die quadratische Gleichung $A(x) = 0.01 \cdot x^2 + x - 1 = 0$ als

$$A^\varepsilon(x) = \varepsilon x^2 + x - 1 = 0$$

mit dem Parameter $\varepsilon \ll 1$ und berechnen die beiden Nullstellen

$$x_\varepsilon = -\frac{1}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2\varepsilon} (1 + 4\varepsilon)^{1/2} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(-1 \pm (1 + 4\varepsilon)^{1/2}\right)$$

Eine Taylor-Entwicklung um den Punkt $\varepsilon = 0$ ergibt

$$x_\varepsilon = \begin{cases} 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \dots \\ -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \dots \end{cases}$$

Die Gleichung $A^\varepsilon(x) = 0$ besitzt für $\varepsilon > 0$ zwei Lösungen und nur eine der beiden konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die einzige Lösung von $A^0(x) = 0$.

Ein solches Problem nennt man **singulär-gestört**.



Ein Randwertproblem.

Wir betrachten das Randwertproblem zweiter Ordnung

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Harmonischer Oszillator mit Masse m und Federkonstanten k sowie dem Parameter

$$\varepsilon = m/k$$

Für $1/\varepsilon \neq n^2\pi^2$ lautet die exakte Lösung

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\sin(x/\sqrt{\varepsilon})}{\sin(1/\sqrt{\varepsilon})}$$

Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir das **nicht korrekt gestellte** Problem

$$\begin{cases} y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$



Ein weiteres Randwertproblem.

Wir betrachten das Randwertproblem zweiter Ordnung

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich

$$A^0(y) = y' + y = 0$$

d.h. eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, für die nur ein Randwert vorgeschrieben werden kann, bei $x = 0$ oder $x = 1$.

Man nennt das Problem wieder **singulär-gestört**.

Die exakte Lösung lautet diesmal

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}$$



Fortsetzung des Beispiels.

Die exakte Lösung lautet diesmal

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-x} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}$$

Setze $\varepsilon = 0.01$ und $x \gg \varepsilon$, zum Beispiel $x = 0.1$. Dann gilt

$$x/\varepsilon = 10$$

und

$$e^{-x/\varepsilon} = e^{-10} \quad \text{bzw.} \quad e^{-1/\varepsilon} = e^{-100}$$

Für $x \gg \varepsilon$ erhalten wir also

$$y_\varepsilon(x) \sim e^{1-x}$$

aber

$$e^{1-x}|_{x=0} = e^1 \neq 0$$

Beachte: $A_0(y) = y' + y = 0$ und die Lösung von $y' + y = 0$ mit $y(1) = 1$ gegeben durch

$$y_0(x) = e^{1-x}$$

Navigationssymbole

Fortsetzung des Beispiels.

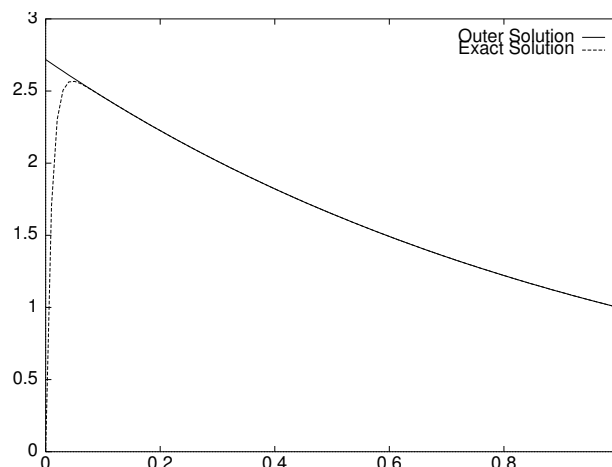


Abb. 1 Exakte Lösung $y_\varepsilon(x)$ im Vergleich zu $y_0(x)$.

Wir sehen bei $x = 0$ eine sogenannte **Grenzschicht** der Dicke $O(\varepsilon)$.

Mit Hilfe asymptotischer Entwicklungen erhalten wir eine Näherung außerhalb der Grenzschicht ($x \gg \varepsilon$) sowie eine Näherung innerhalb der Grenzschicht. Dann werden beide miteinander gekoppelt.

Navigationssymbole

2.1 Skalierung, Entdimensionalisierung und kleine Parameter

Mathematische Modelle enthalten in der Regel Parameter, deren Zahlenwerte mehr oder weniger genau bekannt sind.

Mittels einer **Skalierung** kann die Zahl der Parameter reduziert werden.

Beispiel: Das klassische Räuber–Beute Modell (Lotka–Volterra Modell)

$$\frac{db}{dt} = (\lambda - \gamma r)b$$

$$\frac{dr}{dt} = (-\mu + \delta b)r$$

besitzt die vier positiven Parameter λ, γ, μ und δ .

Die Beutepopulation $b = b(t)$ wächst mit der Wachstumsrate λ an, wird allerdings von den Räubern gejagt (Paarwechselwirkung).

Die Räuberpopulation $r = r(t)$ fällt mit der Wachstumsrate μ ab, wächst allerdings aufgrund der Beutepopulation an (Paarwechselwirkung).



Reduktion auf zwei Parameter.

Die rechten Seite lassen sich auch folgendermaßen schreiben

$$(\lambda - \gamma r)b = \lambda(1 - \frac{\gamma}{\lambda}r)b \quad \text{und} \quad (-\mu + \delta b)r = \mu(\frac{\delta}{\mu}b - 1)r$$

Dies motiviert die Einführung neuer Variablen der Form

$$u(t) = \frac{\delta}{\mu}b(t) \quad v(t) = \frac{\gamma}{\lambda}r$$

Die beiden Funktionen $u = u(t)$ und $v = v(t)$ erfüllen das vereinfachte System

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta}{\mu} \frac{db}{dt} = \frac{\delta}{\mu} \lambda(1 - v) \frac{\mu}{\delta} u = \lambda(1 - v)u$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{dr}{dt} = \frac{\gamma}{\lambda} \mu(u - 1) \frac{\lambda}{\gamma} v = \mu(u - 1)v$$

Das Differentialgleichungssystem für u und v enthält also nur noch die beiden Parameter λ und μ .



Reduktion auf einen einzelnen Parameter.

Durch die Einführung einer neuen, skalierten Zeitvariablen

$$\tau = \lambda \cdot t$$

besitzt unser Modell nur noch **einen** Parameter. Setzen wir nämlich

$$\tilde{u}(\tau) = u(\tau/\lambda) \quad \text{bzw.} \quad u(t) = \tilde{u}(\lambda \cdot t)$$

so ergibt sich mit der Kettenregel

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{du}{dt}$$

Damit ergeben sich die beiden skalierten Gleichungen

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = (1 - \tilde{v})\tilde{u}$$

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \alpha(\tilde{u} - 1)\tilde{v}$$

mit dem einzigen Parameter $\alpha = \mu/\lambda$.



Entdimensionalisierung mathematischer Modelle.

Grundlegende Eigenschaften mathematischer Modelle.

- 1 Typischerweise werden mathematische Modelle mit Hilfe dimensionsbehafteter Variablen definiert.
- 2 Physikalische Größen werden häufig in dem sogenannten **cgs-Einheitensystem** ausgedrückt, d.h. man verwendet die Maßeinheiten Zentimeter (*cm*), Gramm (*g*) und Sekunde (*s*).
- 3 Solche dimensionsbehafteten Größen lassen sich mittels **Referenzgrößen** (charakteristischen Größen) des Problems skalieren und damit in dimensionsloser Form schreiben.
- 4 Insgesamt wird das zugrundeliegende Modell entdimensionalisiert. Wir wollen uns diese Vorgehensweise wieder anhand eines einfachen Beispiele klarmachen.

Modellbeispiel: Nach welcher Zeit prallt ein Gegenstand, den man nach oben geworfen hat, wieder auf dem Boden auf?



Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Wir wollen die Frage beantworten: nach welcher Zeit prallt ein Gegenstand, den man nach oben geworfen hat, wieder auf dem Boden auf?

Zur Herleitung eines mathematischen Modells kann man auf grundlegende physikalische Gesetzmäßigkeiten zurückgreifen.

Zunächst besagt das Newtonsche Gesetz, dass die auf einen Körper wirkende Kraft F gleich dem Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung a des Gegenstandes ist, also $F = m \cdot a$.

Nach dem Gravitationsgesetz ist die auf zwei Körper wirkende Gravitationskraft gegeben durch

$$F = Gm_1m_2 \frac{x}{|x|^3}$$

Hierbei bezeichnen m_1 und m_2 die Massen der beiden Körper, x den Abstandsvektor zwischen den beiden und G die universelle Gravitationskonstante.

Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Wir konkretisieren die Fragestellung und gehen davon aus, dass der Gegenstand von der Erdoberfläche aus senkrecht nach oben geworfen wird und bezeichnen mit $x = x(t)$ den Abstand des Gegenstands von der Erdoberfläche zur Zeit t .

Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(x(t) + R)^2}$$

wobei R den Radius und M die Masse der Erde bezeichnet. Wir suchen nun eine Zeit $T > 0$, nämlich den Zeitpunkt des Aufpralls auf der Erdoberfläche, sodass $x(T) = 0$ gilt.

Mit Hilfe der Gravitationskonstanten $g = GM/R^2$ der Erde erhalten wir schließlich die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{gR^2}{(x(t) + R)^2}$$

Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x(t) + R)^2} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = v \end{cases}$$

besitzt die freien Variablen x und t sowie drei (physikalische) Parameter g , R und v , wobei allen Größen zunächst dimensionsbehaftet sind.

		Dimension
Variable	x	cm
	t	s
Parameter	g	cm/s^2
	R	cm
	v	cm/s

Dimensionen im cgs-Einheitensystem



Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Es bietet sich nun an, den Erdradius R als Referenzlänge zu verwenden

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{R}x(t)$$

Weiter ist der Quotient R/v eine Zeitskala und wir setzen

$$\tau = \frac{tv}{R}$$

und dementsprechend

$$y(\tau) = \tilde{y}(R\tau/v)$$

Damit läßt sich eine dimensionslose Differentialgleichung für die Funktion $y = y(\tau)$ herleiten:

$$y'' = \frac{d^2y}{d\tau^2} = \left(\frac{R}{v}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{v^2} \frac{gR^2}{(Ry + R)^2} = -\frac{gR}{v^2} \frac{1}{(y + 1)^2}$$

Für die Anfangsbedingung $y'(0)$ errechnet man

$$y'(0) = \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{R}{v} \frac{x'(0)}{R} = 1$$



Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Schließlich führen wir den dimensionslosen Parameter ε mittels

$$\varepsilon = \frac{v^2}{gR}$$

und erhalten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varepsilon y'' &= -\frac{1}{(y+1)^2} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

Mit den typischen Werten

$$v = 10^2 \dots 10^4 \text{ cm/s}, \quad g \approx 980 \text{ cm/s}^2, \quad R \approx 6500 \text{ km} = 6.5 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

ergibt sich zudem

$$\varepsilon \approx \frac{(10^4)^2}{1000 \cdot 5 \cdot 10^8} = 0.0002 \ll 1$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↻ 🔍 ↺

Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Die Wahl der Referenzgrößen, also etwa eine charakteristische Länge oder Zeit, ist in gewissem Sinne willkürlich.

Daher existiert auch nie eine einzige dimensionslose Form des Modells.

Das skalierte (dimensionslose) Problem sollte aber so gewählt werden, dass die dimensionslosen Variablen von der Größenordnung Eins sind.

Wie man leicht sieht ist dies beim letzten Beispiel nicht der Fall: werfen wir einen Gegenstand nach oben, so erwarten wir

$$x = 10 \dots 10^3 \text{ m} \quad \text{und} \quad t = 1 \dots 100 \text{ s}$$

Dann gilt aber

$$y = \frac{x}{R} \approx \frac{10^5}{5 \cdot 10^8} = 0.0002, \quad \tau = \frac{vt}{R} \approx 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10^8 = 0.002$$

und beide Größen sind **nicht** von der Größenordnung Eins.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↻ 🔍 ↺

Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Setzen wir $\varepsilon = 0$, also

$$\begin{cases} 0 &= -\frac{1}{(y+1)^2} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

so erhält man ein Problem, das **nicht** lösbar ist.

Dies deutet darauf hin, dass die Wahl der Referenzgrößen nicht sinnvoll ist, da sowohl y als auch τ nicht von der Größenordnung Eins sind.

Eine möglicherweise geeignetere Skalierung ergibt sich aus der Annahme $x \ll R$. Daraus folgt, dass die Beschleunigung x'' die Größenordnung

$$|x''| = \frac{gR^2}{(x+R)^2} \approx \frac{gR^2}{R^2} = g$$

hat.



Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, können wir mit Hilfe der Geschwindigkeit v eine typische Zeit θ bestimmen.

$$g = \frac{v}{\theta} \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{v}{g}$$

Die typische Beschleunigung ist aber auch gleich der typischen Länge dividiert durch das Quadrat der Zeit, also

$$g = \frac{L}{\theta^2} \quad \text{oder} \quad L = g\theta^2 = \frac{v^2}{g}$$

Setzen wir nun für g und v typische Werte ein, so ergibt sich

$$\theta = \frac{v}{g} \approx \frac{10^4}{10^3} \text{ s} = 10 \text{ s}$$

und

$$L = \frac{v^2}{g} \approx \frac{(10^4)^2}{10^3} \text{ cm} = 10^5 \text{ cm} = 1 \text{ km}$$



Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Setzen wir nun die skalierten Variablen als

$$y = \frac{x}{L} \quad \tau = \frac{t}{\theta}$$

so ist gewährleistet, dass beide von der Größenordnung Eins sind.
In dieser neuen Skalierung erhalten wir die dimensionslose Gleichung

$$y'' = \frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{\theta^2}{L} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{g} \frac{gR^2}{(v^2 y/g + R)^2} = -\frac{1}{(\varepsilon y + 1)^2}$$

und nun macht es durchaus Sinn, die Modellvereinfachung $\varepsilon = 0$ zu untersuchen.

Setzen wir nämlich $\varepsilon = 0$, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -1$$

Ein Beispiel zur Entdimensionalisierung.

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' = -1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

besitzt die (eindeutige) Lösung

$$y(\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2}$$

und der Aufprallzeitpunkt definiert durch $y(\tau^*) = 0$ ist gegeben durch $\tau^* = 2$.

Eine Rücktransformation auf die dimensionsbehaftete Variable $T = \theta \cdot \tau^* = 2v/g$ ergibt, dass der Aufprallzeitpunkt proportional zur Anfangsgeschwindigkeit ist und typische Werte für T sind

$$T \approx \frac{2 \cdot 10^2}{10^3} \dots \frac{2 \cdot 10^4}{10^3} \text{ s} = 0.2 \dots 20 \text{ s}$$

2.2 Formale asymptotische Entwicklungen bei algebraischen Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir als Einstieg in das Prinzip asymptotischer Entwicklungen den Fall einfacher algebraischer Gleichungen, die von einem kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ abhängen, näher untersuchen.

Landau-Symbole oder auch **Ordnungsrelationen**.

Wir schreiben für $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ beschränkt}$$

$$f(x) = \text{ord}(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = O(1) \text{ und } \frac{g(x)}{f(x)} = O(1)$$

Asymptotik bei algebraischen Gleichungen.

Wir untersuchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \varepsilon x = 1$$

mit dem kleinen Parameter $\varepsilon \ll 1$. Setzt man $\varepsilon = 0$, so ergibt sich die Gleichung

$$x^2 = 1$$

mit den beiden Lösungen $x = \pm 1$.

Wir erwarten nun, dass für kleine $\varepsilon > 0$ die Lösungen der Ausgangsgleichung nur wenig von den beiden Lösungen der reduzierten Gleichung abweichen. Setzt man die **asymptotische Entwicklung**

$$x_\varepsilon = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

als Lösungsansatz in die Ausgangsgleichung ein, erhält man zunächst die Beziehung

$$1 + 2\varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_1^2 + 2a_2) + \varepsilon^3(2a_1a_2 + 2a_3) + \dots + \varepsilon + \varepsilon^2 a_1 + \varepsilon^3 a_2 + \dots = 1$$

Koeffizientenvergleich in Potenzen von ε .

Wir setzen unseren Ansatz ein und erhalten

$$1 + 2\varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_1^2 + 2a_2) + \varepsilon^3(2a_1a_2 + 2a_3) + \dots + \varepsilon + \varepsilon^2 a_1 + \varepsilon^3 a_2 + \dots = 1$$

Diese Gleichung soll unabhängig vom Parameter $\varepsilon > 0$ erfüllt sein.

Jetzt sortieren wir nach Potenzen in ε und machen einen **Koeffizientenvergleich**

$$1 + \varepsilon(2a_1 + 1) + \varepsilon^2(a_1^2 + 2a_2 + a_1) + \dots = 1$$

Damit ergeben die Gleichungen für die unbekannt Koeffizienten a_1, a_2, \dots

$$2a_1 + 1 = 0$$

und

$$a_1^2 + 2a_2 + a_1 = 0$$

und dies liefert

$$a_1 = -\frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{8}$$



Näherungslösungen bei algebraischen Gleichungen.

Mit dem Ansatz

$$x_\varepsilon = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

erhalten wir als **asymptotische** Lösung

$$x_\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2$$

und die sollte nur wenig von der Lösung $x = 1$ der reduzierten Modellgleichung abweichen.

Tatsächlich lautet eine der exakten Lösungen

$$x_e = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$$

und eine Taylor-Entwicklung um $\varepsilon = 0$ ergibt

$$x_e = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{124}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$$

Daher gilt

$$x_e = x_\varepsilon + O(\varepsilon^4)$$



Ein weiteres Beispiel zur Asymptotik.

Wir betrachten nun die Gleichung

$$\varepsilon x^2 + x = 1$$

Für $\varepsilon > 0$ besitzt die Gleichung zwei Lösungen; eine der beiden wird von der Größenordnung $O(1)$ sein, d.h.

$$x = \text{ord}(1)$$

und

$$\varepsilon x^2 = O(\varepsilon)$$

Für die zweite Lösung erwarten wir, dass der Term εx^2 dominant wird, d.h. groß wird. Dementsprechend ist die Lösung x selbst groß und man kann den konstanten Term 1 vernachlässigen:

$$\varepsilon x^2 + x = \text{ord}(0)$$

Dann gilt aber

$$x = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$



Fortsetzung des Beispiels.

Machen wir daher den Ansatz

$$x_\varepsilon = a_{-1} \frac{1}{\varepsilon} + a_0 + a_1 \varepsilon + \dots$$

so liefert ein Koeffizientenvergleich nach Potenzen in ε die asymptotische Lösung

$$x_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon$$

Die exakte Lösung lautet

$$x_e = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

Eine Taylor-Entwicklung des Nenners ergibt

$$x_e = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

und daher gilt

$$x_e = x_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$



Regulär– und singular–gestörte Probleme.

Wir sehen, dass sich im ersten Beispiel das Lösungsverhalten der gegebenen Gleichung beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht verändert: auch für $\varepsilon = 0$ haben wir weiterhin eine quadratische Gleichung, die zwei Lösungen besitzt.

Man spricht daher von einem **regulär gestörten Problem**.

Das zweite Beispiel ist dagegen der Prototyp eines **singular gestörten Problems**, da im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ aus einer quadratischen Gleichung mit zwei Lösungen eine lineare Gleichung entsteht, die nur eine Lösung besitzt. Zudem erkennt man, dass eine der beiden Lösungen für $\varepsilon \rightarrow 0$ divergiert.

Bei regulär gestörten Problemen kann man eine asymptotische Lösung in der Regel mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung in ε berechnen.

Ein singular gestörtes Problem kann dagegen häufig mit Hilfe einer **Reskalierung** in ein regulär gestörtes Problem überführt werden.

Reskalierung singular–gestörter Probleme.

Wir betrachten wieder die Gleichung

$$\varepsilon x^2 + x = 1$$

mit der Transformation

$$X = \varepsilon x$$

ergibt sich die **reskalierte** Gleichung

$$X^2 + X = \varepsilon$$

und dies ist ein regulär gestörtes Problem, denn für $\varepsilon = 0$ erhalten wir:

$$X^2 + X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 0, \quad X_2 = -1$$

Beide Lösungen der reskalierten Gleichung lassen sich wieder mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Form

$$X_\varepsilon = X_{1/2} + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots$$

asymptotisch berechnen.

Reskalierung singular-gestörter Probleme.

Die Frage nach einer geeigneten Reskalierung, die ein singular gestörtes in ein regulär gestörtes Problem umwandelt, kann man zumindest in unserem einfachen Beispiel systematisch beantworten.

Wir verwenden dazu eine Reskalierung der Form

$$x = \delta(\varepsilon)X$$

wobei die Funktion $\delta(\varepsilon)$ so gewählt ist, dass im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ die Beziehung

$$X = \text{ord}(1)$$

erfüllt ist, d.h. sowohl X als auch $1/X$ bleiben für $\varepsilon \rightarrow 0$ beschränkt.

Die reskalierte Gleichung lautet dann

$$\varepsilon\delta(\varepsilon)X^2 + \delta(\varepsilon)X - 1 = 0$$

und man betrachtet nun **formal** die möglichen Größenordnung von $\delta(\varepsilon)$.



Reskalierung singular-gestörter Probleme.

- Ist $\delta \ll 1$, so erhalten wir

$$\varepsilon\delta^2X^2 + \delta X - 1 \approx \text{“klein”} + \text{“klein”} - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Vernachlässigen wir die kleinen Terme, so folgt $-1 \stackrel{!}{=} 0$ und diese Skalierung liefert offensichtlich keine Lösung.

- Für $\delta \approx 1$ ergibt sich

$$\varepsilon\delta^2X^2 + \delta X - 1 \approx \text{“klein”} + X - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad X = 1 + \text{“klein”}$$

Diese Lösung approximiert die exakte Lösung, die für $\varepsilon \rightarrow 0$ beschränkt bleibt.

- Für $1 \ll \delta \ll 1/\varepsilon$ erhalten wir

$$\frac{\varepsilon\delta^2X^2 + \delta X - 1}{\delta} \approx \text{“klein”} + X + \text{“klein”} \stackrel{!}{=} 0$$

Dies widerspricht der Annahme, dass $X = \text{ord}(1)$ gelten soll.



Reskalierung singular-gestörter Probleme.

- Mit $\delta \approx 1/\varepsilon$ folgt

$$\frac{\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1}{\varepsilon\delta^2} \approx X^2 + X + \text{“klein”} \stackrel{!}{=} 0$$

Dies ist eine zulässige Skalierung, denn aus $X^2 + X = 0$ erhalten wir als eine Lösung $X = -1$.

- Für $1/\varepsilon \ll \delta$ erhalten wir

$$\frac{\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1}{\varepsilon\delta^2} \approx X^2 + \text{“klein”} + \text{“klein”} \stackrel{!}{=} 0$$

und dies widerspricht wieder der Annahme $X = \text{ord}(1)$.

Sinnvolle Skalierungen ergeben sich also in den beiden Fällen

$$\delta = 1 \quad \text{und} \quad \delta = 1/\varepsilon$$

Poincare-Entwicklungen.

Wir haben oben geschrieben, dass reguläre gestörte Probleme in der Regel auf asymptotische Lösungen in Form von Potenzreihenentwicklungen im Parameter ε führen, die in der Literatur auch als **Poincare-Entwicklungen** bezeichnet werden.

$$x_\varepsilon = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n x_n$$

Das dies nicht immer der Fall sein muss, auch wenn die Ausgangsgleichung nur ganzzahlige Potenzen in ε beinhaltet, demonstrieren wir in den beiden nachfolgenden Beispielen.

Beispiel: Wir betrachten die algebraische Gleichung

$$(1 - \varepsilon)x^2 - 2x + 1 = 0$$

Handelt es sich dabei um ein regulär oder ein singular gestörtes Problem?

Andere asymptotische Entwicklungen.

Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$, d.h. die Gleichung besitzt eine doppelte Nullstelle; für $\varepsilon \neq 0$ haben wir zwei unterschiedliche Nullstellen.

Im Sinne eines regulär gestörten Problems starten wir mit dem Entwicklungsansatz

$$x_\varepsilon = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}x^2 - \varepsilon x^2 - 2x + 1 &= 1 + 2a_1\varepsilon + \varepsilon^2(2a_2 + a_1) + \dots \\ &\quad - \varepsilon - 2\varepsilon^2 a_1 - \dots \\ -2 - 2a_1\varepsilon - 2a_2\varepsilon^2 - \dots + 1 &= 0\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}1 - 2 + 1 &= 0 \\ 2a_1 - 1 - 2a_1 &= 0\end{aligned}$$



Asymptotische Entwicklungen.

Die erste Gleichung ist also automatisch erfüllt; dagegen läßt sich die zweite Gleichung bei konstantem a_1 nicht lösen d.h. der Entwicklungsansatz liefert keine Lösung.

Würde man allerdings zulassen, dass der Koeffizient a_1 nicht konstant ist, sondern von ε abhängt

$$a_1 = a_1(\varepsilon)$$

und würde für $\varepsilon \rightarrow 0$ gelten

$$a_1(\varepsilon) \rightarrow \infty$$

so wäre Gleichung

$$2a_1 - 1 - 2a_1 = 0$$

im Grenzfall automatisch erfüllt.

Damit aber eine Entwicklung der Form $x_\varepsilon = 1 + a_1(\varepsilon)\varepsilon$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ tatsächlich gegen die ungestörte Lösung konvergiert, muss ebenfalls die Beziehung $a_1(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow 0$ erfüllt sein.



Asymptotische Entwicklungen.

Lassen wir also zu, dass der Koeffizient a_1 von ε abhängt, müssen im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ die beiden folgenden Bedingungen gelten.

$$a_1(\varepsilon) \rightarrow \infty$$

$$a_1(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow 0$$

Dies legt nahe eine asymptotische Entwicklung der Form

$$x_\varepsilon = 1 + b_1\sqrt{\varepsilon} + b_2\varepsilon + b_3\varepsilon^{3/2} + \dots$$

anzusetzen, wobei nun die Koeffizienten b_1, b_2, \dots als konstant angenommen werden.

Setzt man diesen Ansatz in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt ein Koeffizientenvergleich bei $\sqrt{\varepsilon}$ eine Bedingung, die automatisch erfüllt ist.

In erster Ordnung erhalten wir eine Bedingung an b_1 , nämlich

$$b_1^2 = 1$$



Asymptotische Entwicklungen.

Eine asymptotische Entwicklung der exakten Lösungen ist gegeben durch

$$x_\varepsilon = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$$

Die zugehörigen exakten Lösungen lauten

$$x_e = \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon}$$

und lassen sich um $\varepsilon = 0$ **nicht** mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung approximieren, da sie als Funktionen von ε im Ursprung **nicht** differenzierbar sind.

Es können auch asymptotische Entwicklungen auftreten, die nicht aus (gebrochenen) Potenzen in ε bestehen, So besitzt die Gleichung

$$xe^{-x} = \varepsilon$$

mit $\varepsilon \ll 1$ zwei Lösungen.



Keine Poincaré-Entwicklung.

Da aus $\varepsilon \ll 1$ die Beziehung $e^{-\varepsilon} \approx 1$ folgt, wird eine der beiden Lösungen in der Nähe von ε liegen.

Mit dem Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$$

folgt, dass die zweite Lösung für $\varepsilon \rightarrow 0$ divergiert.

Eine asymptotische Entwicklung dieser divergenten Lösung ist

$$x_\varepsilon = \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Man sollte sich hier anschaulich klarmachen, wie langsam $\ln 1/\varepsilon$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ im Vergleich zu $1/\varepsilon$ divergiert.

Einige Definitionen.

Wir kommen nun zu einigen grundlegenden Begriffen aus der Theorie asymptotischer Entwicklungen.

Definition: Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ heißt **asymptotische Entwicklung** von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$, falls für alle $m \leq n$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^m f_k(x)}{f_m(x)} = 0$$

Wir schreiben dann

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Eine spezielle Klasse von asymptotischen Entwicklungen sind solche, die auf **Ordnungsfunktionen** basieren.

Ordnungsfunktionen.

Definition: Eine Folge $\{\delta_n(\varepsilon)\}$ nennt man **Folge von Ordnungsfunktionen**, falls $\delta_n(\varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung des Ursprungs definiert und stetig ist und zusätzlich die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_{n+1}(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} = 0$$

erfüllt ist.

Eine asymptotische Entwicklung auf der Basis von Ordnungsfunktionen lautet dann

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^n a_k \delta_k(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

Die (konstanten) Koeffizienten sind dabei eindeutig bestimmt und ergeben sich aus der Formel

$$a_k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{l=0}^{k-1} a_l \delta_l(x - x_0)}{\delta_k(x - x_0)}$$



Einige Definitionen.

Eine Funktion $f(x)$ kann durchaus mehrere unterschiedliche Entwicklungen besitzen. So gilt etwa für $x \rightarrow 0$

$$\tan x \sim x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$$

$$\tan x \sim \sin x + \frac{1}{2} \sin^3 x + \frac{3}{8} \sin^5 x$$

Im ersten Fall beziehen wir uns auf die Ordnungsfunktionen $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^{2n+1}$, $n = 0, 1, 2$; im zweiten Fall verwendet man

$$\delta_n(\varepsilon) = \sin^{2n+1} \varepsilon$$

Mehrere unterschiedliche Funktionen können identische asymptotische Entwicklungen besitzen: es gilt zum Beispiel

$$\exp(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \quad (\varepsilon \searrow 0)$$

$$\exp(\varepsilon) + \exp(-1/\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \quad (\varepsilon \searrow 0)$$



Eine asymptotische Entwicklung der Fehlerfunktion.

Zum Abschluß dieses Abschnittes geben wir noch ein klassisches Beispiel zur Approximationsgüte und Effektivität asymptotischer Entwicklungen.

Die sogenannte **Fehlerfunktion** $\operatorname{erf}(x)$ ist definiert über das Integral

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Die Fehlerfunktion ist von zentraler Bedeutung für Berechnungen in der **Statistik**, da sie die Verteilungsfunktion der Gaußverteilung, also das Integral der **Glockenkurve** ist, und sie wird zum Beispiel zur statistischen Beschreibung von Meßungenauigkeiten verwendet.

Die Funktionswerte der Fehlerfunktion lassen sich nur approximativ mit Hilfe von Reihenentwicklungen berechnen. Für kleine Werte von x kann man etwa den Integranden in eine Taylor-Reihe entwickeln und anschließend die einzelnen Terme der Taylor-Reihe integrieren.

Taylor-Entwicklung des Integranden.

Mit Hilfe der Entwicklung

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!}$$

erhält man die klassische (konvergente) Reihenentwicklung

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{219}x^9 - \dots \right)$$

Da sich eine **alternierende** Potenzreihe ergibt, benötigt man zur Approximation von Funktionswerten für $x \geq 1$ eine große Zahl von Termen.

Für eine Genauigkeit von 10^{-5} sind dies für $x = 1$ acht Terme, für $x = 3$ bereits 31 Terme und für $x = 5$ sogar 75 Terme.

Eine **divergente** asymptotische Entwicklung, die für $x > 1$ wesentlich genauer ist, ist gegeben durch

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + O(x^{-8}) \right)$$

Asymptotische Entwicklung der Fehlerfunktion.

Bei dieser asymptotischen Entwicklung benötigt man für $x = 5/2$ **nur** drei Terme. Herleitung über partielle Integration: zunächst schreiben wir

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

und verwenden folgende partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt &= \int_x^{\infty} \frac{(-2t)e^{-t^2}}{(-2t)} dt = \frac{e^{-t^2}}{(-2t)} \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x^2}}{(-2x)} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \end{aligned}$$

Eine wiederholte Anwendung der partiellen Integration liefert dann die asymptotische Entwicklung.



Kapitel 3. Grenzschichtphänomene

In diesem Abschnitt wollen wir das Prinzip asymptotischer Entwicklungen auf die näherungsweise Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ausdehnen, wobei wir uns insbesondere mit sogenannten **singulär-gestörten** Gleichungen beschäftigen werden.

Solche Modelle treten zum Beispiel in der Biochemie bei der Modellierung des Stoffwechsels lebender Organismen auf und werden dort als die sogenannte **Michaelis–Menten Kinetik** bezeichnet. Der Hintergrund dieser Modelle ist folgender: in jedem lebenden Organismus finden ständig biochemische Reaktionen, also Stoffumwandlungen, statt.

Dabei sind häufig spezielle Proteine (Eiweißverbindungen), sogenannte **Enzyme** involviert. Enzyme sind hochmolekulare Eiweißverbindungen die biochemische Vorgänge als **Biokatalysatoren** beschleunigen oder erst ermöglichen.

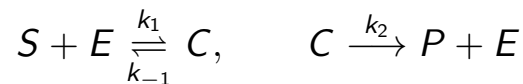
Ein Bestandteil des menschlichen Stoffwechsels ist etwa der Abbau von Glukose zum Zwischenprodukt Brenztraubensäure (Glykolyse) und diese Form der Stoffumwandlung benötigt 10 unterschiedliche Enzyme.



Die Michaelis–Menten Kinetik in der Biochemie.

Leonor Michaelis und Maud Leonora Menten haben im Jahr 1913 ein mathematisches Modell formuliert, das bis heute die Grundlage zur Beschreibung von Enzymreaktionen ist.

Betrachtet werden vier verschiedene Substanzen: ein Enzym E , ein Substrat S , ein Komplex (oder Zwischenprodukt) C sowie ein (End–)Produkt P . Diese vier Substanzen unterliegen folgender schematischer Darstellung einer Enzymreaktion:



Die Konstanten k_1 , k_{-1} und k_2 sind Parameter, die mit den Reaktionsraten verknüpft sind.

Zur Herleitung eines biochemischen Modells verwenden Michaelis und Menten das sogenannte **Massenwirkungsgesetz** (Law of Mass Action),

Die Rate, mit der bei einer Reaktion neue Stoffe gebildet werden, ist proportional zum Produkt der Konzentrationen der Stoffe, die die Reaktion auslösen, d.h. an der Reaktion beteiligt sind.



System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Das Massenwirkungsgesetz liefert ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 es + k_{-1}c$$

$$\frac{de}{dt} = -k_1 es + k_{-1}c + k_2c$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 es - k_{-1}c - k_2c$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2c$$

Dieses System wird gewöhnlich als Anfangswertproblem formuliert und typische Anfangswerte sind

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0$$



Modellreduktion durch Erhaltungsgrößen.

Man sieht leicht, dass folgende Erhaltungsprinzipien gelten

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0 \implies e(t) + c(t) = e_0$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{dc}{dt} + \frac{dp}{dt} = 0 \implies s(t) + c(t) + p(t) = s_0$$

Unser Fazit ist, dass wir das System auf ein gekoppeltes System von nur zwei Gleichungen reduzieren können.

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c$$

Das reduzierte System läßt sich nur im trivialen Fall $k_2 = 0$ exakt lösen.

Approximation mit quasi-stationären Zuständen.

Man nimmt an, dass nach einer kurzen transienten Phase die Konzentration des Komplexes C in einem Gleichgewicht ist, d.h. es gelte

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

Damit errechnet man

$$c = \frac{k_1 e_0 s}{k_1 s + k_{-1} + k_2} = \frac{e_0 s}{s + K_M}$$

mit der **Michaelis-Menten Konstanten** $K_M = (k_{-1} + k_2)/k_1$.

Addiert man nun die beiden Ausgangsgleichungen, so ergibt sich

$$\frac{d(s + c)}{dt} = \frac{ds}{dt} = -k_2 c = -k_2 \frac{e_0 s}{s + K_M}$$

Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich die **Briggs-Haldane Gleichung**

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{v_{max} s}{s + K_M}, \quad v_{max} = k_2 e_0,$$

die man auch als sQSSA-Modell bezeichnet.

Zur Entdimensionalisierung des reduzierten Modells.

Wir wollen zunächst das reduzierte Modell entdimensionalisieren.

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c \quad \frac{dc}{dt} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c$$

Sei dazu $\tau = k_1 e_0 t$ eine skalierte Zeit und

$$u(\tau) = \frac{s(t)}{s_0}, \quad v(\tau) = \frac{c(t)}{e_0}$$

Mit den Parametern

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1 s_0}, \quad K = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1 s_0}, \quad \varepsilon = \frac{e_0}{s_0}$$

ergeben sich die skalierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -u + (u + K - \lambda)v \\ \varepsilon \frac{dv}{d\tau} &= u - (u + K)v \end{aligned}$$



Asymptotische Entwicklung im Parameter ε .

Unter der Annahme

$$\varepsilon = \frac{e_0}{s_0} \ll 1$$

(typisch ist $\varepsilon = 10^{-2} - 10^{-7}$) suchen wir nun eine asymptotische Entwicklung von

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -u + (u + K - \lambda)v \\ \varepsilon \frac{dv}{d\tau} &= u - (u + K)v \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = 1 \quad \text{und} \quad v(0) = 0$$

Da wir im Folgenden an asymptotischen Lösungen für kleine ε interessiert sind, nehmen wir zusätzlich an, dass $K = \text{ord}(1)$ und $\lambda = \text{ord}(1)$ gilt, d.h.

$K = O(1)$, $1/K = O(1)$, $\lambda = O(1)$ und $1/\lambda = O(1)$.



Asymptotische Entwicklung im Parameter ε .

Analog zu den Entwicklungen in Kapitel 2 machen wir den Lösungsansatz

$$u(\tau; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^p \varepsilon^n u_n(\tau)$$

$$v(\tau; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^p \varepsilon^n v_n(\tau)$$

mit $p \in \mathbb{N}$, wobei die Koeffizienten der Potenzreihe nun Funktionen von τ sind.

Setzt man diese Entwicklungen in die Differentialgleichungen ein und ordnet die einzelnen Terme nach den Potenzen in ε , so ergeben sich für $n = 0$ gerade die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau} &= -u_0 + (u_0 + K - \lambda)v_0 \\ 0 &= u_0 - (u_0 + K)v_0 \end{aligned}$$

Asymptotische Entwicklung nullter Ordnung.

Das System nullter Ordnung lautet

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\tau} &= -u_0 + (u_0 + K - \lambda)v_0 \\ 0 &= u_0 - (u_0 + K)v_0 \end{aligned}$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, ergibt sich

$$\frac{du_0}{d\tau} = -\lambda v_0$$

Gleichzeitig liefert die zweite Gleichung mit Auflösung nach v_0

$$v_0 = \frac{u_0}{u_0 + K}$$

Insgesamt erhalten wir also die **skalierte** Briggs–Haldane Gleichung

$$\frac{du_0}{d\tau} = -\frac{\lambda u_0}{u_0 + K}$$

Asymptotische Entwicklung nullter Ordnung.

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{du_0}{d\tau} = -\frac{\lambda u_0}{u_0 + K} \\ u_0(0) = 1 \end{cases}$$

läßt sich mit Hilfe der **Lambertschen W -Funktion** darstellen.

Weiterhin gilt in nullter Ordnung

$$v_0 = \frac{u_0}{u_0 + K}$$

und damit

$$v_0(0) = \frac{u_0(0)}{u_0(0) + K} = \frac{1}{1 + K} = \text{ord}(1) \neq 0 = v(0)$$

Es sein denn, es gilt $K \rightarrow \infty$.

Grenzschichtverhalten der Michaelis–Menten Kinetik.

Asymptotisch gesehen ist die Gleichung

$$v_0(0) = \frac{u_0(0)}{u_0(0) + K} = \frac{1}{1 + K} = \text{ord}(1) \neq 0 = v(0)$$

nur im Grenzwert $K \rightarrow \infty$ zu erfüllen, was wir aber wegen $K = \text{ord}(1)$ ausgeschlossen haben.

Wir erhalten eine Näherung, können aber die Bedingung $v(0) = 0$ nicht erfüllen.

Tatsächlich besitzt das Problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -u + (u + K - \lambda)v \\ \varepsilon \frac{dv}{d\tau} &= u - (u + K)v \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$ und $v(0) = 0$ bei $\tau = 0$ eine **Grenzschicht** – wie unser Beispiel aus Kapitel 1.

Unsere Modellgleichung zu Grenzschichtphänomenen.

Typischerweise zeigen singular-gestörte Differentialgleichungen ein solches Grenzschichtverhalten – also solche Differentialgleichungen bei denen die höchste Ableitung der Gleichung mit einem kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ multipliziert wird, so dass sich die Ordnung der Differentialgleichung im Grenzfall $\varepsilon = 0$ um Eins verringert.

Wir wollen uns dies wiederum an einem (einfachen) Beispiel veranschaulichen und uns in diesem Beispiel ebenfalls mit der Herleitung einer asymptotischen Entwicklung für die Lösung der Differentialgleichung beschäftigen.

Gegeben sei das auf dem Intervall $(0, 1)$ formulierte Randwertproblem zweiter Ordnung

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dx} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

mit dem kleinen Parameter $\varepsilon > 0$.



Ansatz zur asymptotischen Entwicklung.

Im Grenzwert $\varepsilon = 0$ geht das obige Randwertproblem in eine Differentialgleichung erster Ordnung über, für die nur **eine** Randbedingung vorgeschrieben werden kann.

Wir entscheiden uns jetzt zunächst für die rechte Randbedingung, d.h. im Grenzwert $\varepsilon = 0$ betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dx} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Für dieses Problem lautet die exakte Lösung

$$y(x) = h(x) - h(1) + 1$$

Wir versuchen nun – analog zur Vorgehensweise von oben – eine asymptotische Entwicklung der Lösung für $\varepsilon > 0$ herzuleiten, d.h. wir suchen eine Reihendarstellung der Form

$$y(x; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^p \varepsilon^n f_n(x)$$



Einsetzen des Lösungsansatzes.

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dx}$$

ein, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^p \left(\varepsilon^{n+1} f_n''(x) + \varepsilon^n f_n'(x) \right) = h'(x)$$

Berücksichtigen wir zudem (nur) die rechte Randbedingung, so muss die Beziehung

$$\sum_{n=0}^p \varepsilon^n f_n(1) = 1$$

erfüllt sein.

Die Gleichungen für die Entwicklungsfunktionen $f_n(x)$ lassen sich nun sukzessive auflösen, in dem man einen Koeffizientenvergleich in Potenzen von ε durchführt.

Explizite Form der Entwicklungsfunktionen.

Zunächst ergibt sich in nullter Ordnung für die Funktion f_0 die Gleichung

$$f_0' = h', \quad f_0(1) = 1$$

Die höheren Ordnungen ergeben die Gleichungen

$$f_{n-1}'' + f_n' = 0, \quad f_n(1) = 0$$

und man erhält damit

$$f_0(x) = h(x) - h(1) + 1$$

$$f_n(x) = (-1)^n \left(h^{(n)}(x) - h^{(n)}(1) \right)$$

Die Darstellung für $f_n(x)$ läßt sich dabei direkt per Induktion beweisen. Daraus folgt die asymptotische Entwicklung

$$y(x; \varepsilon) \sim 1 + \sum_{n=0}^p (-\varepsilon)^n \left(h^{(n)}(x) - h^{(n)}(1) \right)$$

Äußere Entwicklung und Grenzschichtverhalten.

Für unsere asymptotische Entwicklung gilt bei $x = 0$

$$y(0; \varepsilon) \sim 1 + \sum_{n=0}^p (-\varepsilon)^n \left(h^{(n)}(0) - h^{(n)}(1) \right)$$

und da $h = h(x)$ eine beliebige Funktion ist, wird die Randbedingung

$$y(0) = 0$$

die wir ja auch nicht benutzt haben, nicht erfüllt sein.

Wir erwarten vielmehr, dass die Lösung des Problems ein Grenzschichtverhalten bei $x = 0$ aufweist, d.h. die Lösung fällt dort in einer Umgebung von $x = 0$ rapide auf Null ab und dieses Verhalten wird durch die asymptotische Entwicklung nicht erfaßt.

Wir sprechen daher auch von einer **äußeren asymptotischen Entwicklung**, die nur außerhalb einer Grenzschicht um $x = 0$ gültig ist.

Asymptotische Entwicklung innerhalb der Grenzschicht.

Wir versuchen nun, eine asymptotische Beschreibung des Grenzschichtverhaltens um $x = 0$ herzuleiten.

Unter der Annahme, dass die Grenzschichtdicke von der Ordnung ε ist, erscheint es sinnvoll eine **Skalierung** der Grenzschicht vorzunehmen und das Problem in der skalierten Variablen ξ mit

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

auszudrücken.

Mit dieser Skalierung wird die Grenzschicht auf einen Bereich der Länge $O(1)$ gestreckt und die Randbedingung $y(1) = 1$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ nach $\xi \rightarrow \infty$ verschoben.

Weiter definieren wir eine neue Funktion $\bar{y}(\xi; \varepsilon)$ über die Beziehung

$$y(x; \varepsilon) = y(\varepsilon \cdot \xi; \varepsilon) = \bar{y}(\xi; \varepsilon)$$

und erhalten unter Verwendung der Kettenregel

$$\frac{d\bar{y}}{d\xi} = \varepsilon \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Asymptotische Entwicklung innerhalb der Grenzschicht.

Damit transformiert sich die Gleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dx}$$

innerhalb der Grenzschicht zu

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\xi^2}(\xi) + \frac{d\bar{y}}{d\xi}(\xi) = \varepsilon \frac{dh}{dx}(\varepsilon \cdot \xi)$$

In der skalierten Grenzschichtvariablen $\xi = x/\varepsilon$ ist dies nun eine **regulär gestörte** Differentialgleichung, da sich die Ordnung der Gleichung für $\varepsilon = 0$ nicht reduziert.

Wir betrachten also nun das regulär gestörte Problem

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\xi^2}(\xi) + \frac{d\bar{y}}{d\xi}(\xi) = \varepsilon \frac{dh}{dx}(\varepsilon \cdot \xi)$$

innerhalb der Grenzschicht, wobei wir nur die Randbedingung $\bar{y}(0) = 0$ am linken Rand vorschreiben.



Asymptotische Entwicklung innerhalb der Grenzschicht.

Wir suchen nun nach einer asymptotischen Entwicklung von \bar{y} der Form

$$\tilde{y}(\xi; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^q \varepsilon^n g_n(\xi)$$

Bevor wir diesen Ansatz in die Gleichung einsetzen können, benötigen wir eine Entwicklung der rechten Seite um den Punkt $\varepsilon = 0$.

$$h_x(\varepsilon\xi) = \sum_{n=1}^M \varepsilon^{n-1} \xi^{n-1} \frac{h^{(n)}(0)}{(n-1)!} + o(\varepsilon^{M-1} \xi^{M-1})$$

Durch einen Koeffizientenvergleich ergeben sich dann die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Entwicklungsfunktionen $g_n(\xi)$.

$$g_0'' + g_0' = 0, \quad g_0(0) = 0$$

$$g_n'' + g_n' = \frac{h^{(n)}(0)}{(n-1)!} \xi^{n-1}, \quad g_n(0) = 0 \quad (n \geq 1)$$



Explizite Form der Entwicklungsfunktionen.

Die Bestimmungsgleichungen lassen sich explizit lösen und es gilt

$$g_0(\xi) = A_0 (1 - e^{-\xi})$$

und

$$g_n(\xi) = A_n (1 - e^{-\xi}) + (-1)^n h^{(n)}(0) \sum_{k=1}^n \frac{(-\xi)^k}{k!}$$

Eine asymptotische Entwicklung der Lösung **innerhalb der Grenzschicht** lautet damit

$$\tilde{y}(\xi, \varepsilon) \sim (1 - e^{-\xi}) \sum_{n=0}^q A_n \varepsilon^n + \sum_{n=1}^q (-\varepsilon)^n h^{(n)}(0) \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-\xi)^k}{k!} \right)$$

Man beachte aber, dass die Entwicklungsfunktionen in jeder Ordnung eine **unbestimmte** Konstante A_n enthalten, denn wir lösen Gleichungen zweiter Ordnung mit nur einer Randbedingung.

Innere und äußere asymptotische Entwicklung.

Wir haben jetzt zwei unterschiedliche asymptotische Lösungen berechnet:

- eine **äußere Entwicklung**

$$y(x; \varepsilon) \sim 1 + \sum_{n=0}^p (-\varepsilon)^n \left(h^{(n)}(x) - h^{(n)}(1) \right)$$

die außerhalb der Grenzschicht bei $x = 0$ gültig ist und

- eine **innere Entwicklung**

$$\tilde{y}(\xi, \varepsilon) \sim (1 - e^{-\xi}) \sum_{n=0}^q A_n \varepsilon^n + \sum_{n=1}^q (-\varepsilon)^n h^{(n)}(0) \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-\xi)^k}{k!} \right)$$

die das Lösungsverhalten innerhalb der Grenzschicht beschreibt, allerdings von den noch unbestimmten Konstanten A_0, \dots, A_q abhängt.

Die innere Entwicklung kann mit der Skalierung $\xi = x/\varepsilon$ auch in der Ausgangsvariablen x geschrieben werden.

Graphische Darstellung der inneren und äußeren Entwicklung.

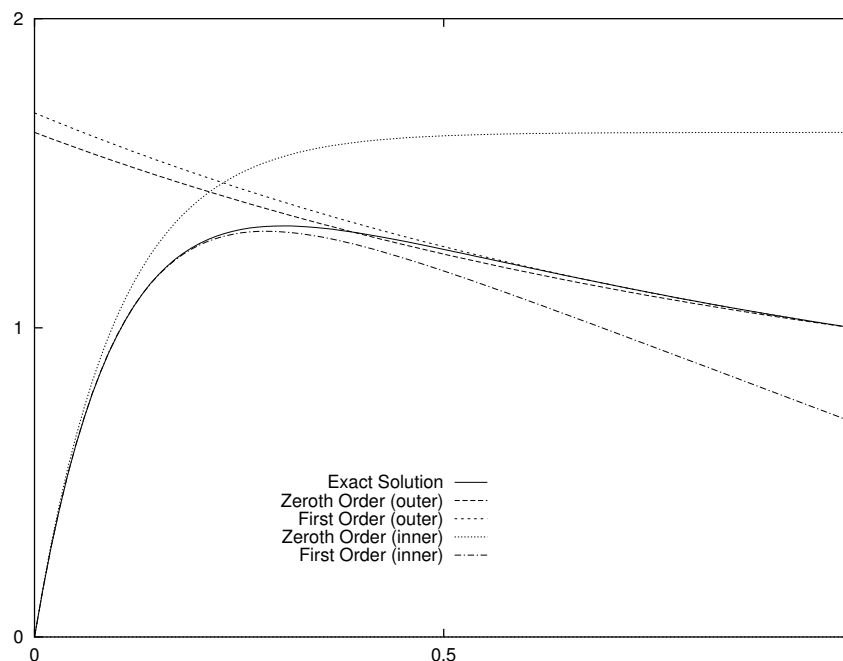


Abb. 2 Exakte Lösung für $\varepsilon = 0.1$ und $h(x) = e^{-x}$ sowie die beiden inneren und äußeren Entwicklungen erster Ordnung.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Kopplung zwischen innerer und äußerer Entwicklung.

Es bleibt nur die Frage, wie die Konstanten A_0, \dots, A_q der inneren Entwicklung bestimmt werden können.

Dies ist verknüpft mit einer **Kopplung** zwischen der inneren und äußeren Entwicklung zu einer **einzigsten** asymptotischen Entwicklung, die die tatsächliche Lösung auf dem **gesamten** Intervall $[0, 1]$ hinreichend genau approximiert.

Hierzu formulieren wir zunächst die Kopplung beider Entwicklungen mit Hilfe einer Zwischenvariablen η (englisch: intermediate variable).

Sei dazu die Variable η definiert durch

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^\alpha} = \xi \varepsilon^{1-\alpha}$$

wobei $0 < \alpha < 1$ gelten soll.

Wir stellen nun beide Entwicklung in der neuen Variablen η dar und verlangen, dass beide Entwicklungen dann asymptotisch gesehen identisch sind.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Graphische Darstellung der Variablen η für $\alpha = 1/2$.

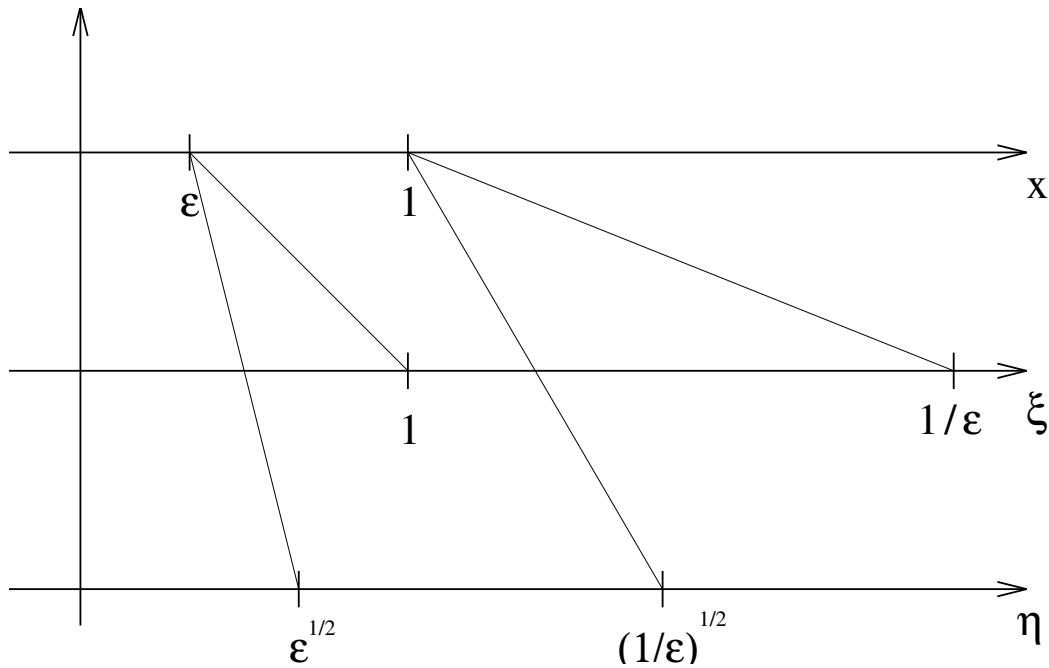


Abb. 3 Innere Variable ξ , äußere Variable x und zugehörige Zwischenvariable η .

Darstellung der äußeren Entwicklung in η .

$$\begin{aligned}
 y(x; \epsilon) &= y(\epsilon^\alpha \eta; \epsilon) \\
 &= 1 + h(x) - h(1) - \epsilon (h'(x) - h'(1)) + \dots \\
 &= 1 - h(1) + \epsilon h'(1) + h(\epsilon^\alpha \eta) - \epsilon h'(\epsilon^\alpha \eta) + \dots \\
 &= 1 - h(1) + \epsilon h'(1) + h(0) + \epsilon^\alpha \eta h'(0) + \frac{1}{2} \epsilon^{2\alpha} \eta^2 h''(0) + \dots \\
 &\quad - \epsilon (h'(0) + \epsilon^\alpha \eta h''(0) + \dots) \\
 &= 1 - h(1) + h(0) + \epsilon^\alpha \eta h'(0) + \frac{1}{2} \epsilon^{2\alpha} \eta^2 h''(0) + \dots \\
 &\quad + \epsilon (h'(1) - h'(0)) - \epsilon^{1+\alpha} \eta h''(0) - \frac{1}{2} \epsilon^{1+\alpha} \eta^2 h'''(0) + \dots \\
 &\quad + \epsilon^2 (h''(0) - h''(1)) + \dots
 \end{aligned}$$

Darstellung der inneren Entwicklung und Kopplung.

Die innere Entwicklung in der Variablen η lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\varepsilon^{\alpha-1}\eta, \varepsilon) &= \left(1 - e^{-\varepsilon^{\alpha-1}\eta}\right) \sum_{n=0}^q A_n \varepsilon^n \\ &+ \sum_{n=1}^q (-\varepsilon)^n h^{(n)}(0) \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-\varepsilon^{\alpha-1}\eta)^k}{k!}\right)\end{aligned}$$

Vernachlässigen wir nun alle exponentiellen Terme, da diese schneller verschwinden als jede Potenz in ε und setzen wir beide Entwicklungen bezüglich der Variablen η gleich, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$A_0 = 1 - h(1) + h(0)$$

$$A_1 = h'(1) - h'(0)$$

$$A_2 = h''(1) - h''(0)$$

Die Kopplungsregel von van Dyke.

Eine andere Möglichkeit innere und äußere Entwicklungen aneinander anzupassen ist die **Kopplungsregel von van Dyke**, die häufig einfacher anzuwenden ist als die Kopplung über eine Zwischenvariable.

Weiter liefert diese Methode eine einfache Möglichkeit eine einzelne asymptotische Entwicklung anzugeben, die im **gesamten** Definitionsbereich gültig ist.

Wir schreiben zunächst die ersten $p + 1$ Terme der äußeren Entwicklung als

$$E_p f = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n f_n(x)$$

beziehungsweise die ersten $q + 1$ Terme der inneren Entwicklung

$$H_q f = \sum_{n=0}^q \varepsilon^n g_n(\xi)$$

Die **Regel von van Dyke** lautet dann

$$E_p H_q f = H_q E_p f$$

Die Kopplungsregel von van Dyke.

Die **Regel von van Dyke** lautet dann

$$E_p H_q f = H_q E_p f$$

d.h. die inneren und äußeren Entwicklungen sollen **kommutieren**.

Der Operator $E_p H_q$ bedeutet dabei, dass wir zunächst die ersten $q + 1$ Terme der inneren Entwicklung nehmen, diese anschließend mittels der Beziehung $\xi = x/\varepsilon$ umschreiben und dann bei der entstehenden Entwicklung nur die ersten $p + 1$ Terme einer äußeren Entwicklung beibehalten.

Dementsprechend bedeutet $H_q E_p$, dass wir zunächst die ersten $p + 1$ Terme der äußeren Entwicklung nehmen, dies anschließend mittels der Beziehung $x = \varepsilon \xi$ umschreiben und dann bei der entstehenden Entwicklung nur die ersten $q + 1$ Terme einer inneren Entwicklung behalten.

Wir veranschaulichen dies anhand unseres Modellproblems an zwei Beispielen.

Ein Beispiel zur Regel von van Dyke.

Die jeweils ersten Terme der inneren und äußeren Entwicklung waren

$$f_0(x) = h(x) - h(1) + 1$$

$$g_0(\xi) = A_0 (1 - e^{-\xi})$$

Wenden wir nun die Regel von van Dyke mit $p = q = 0$ an, so erhalten wir

$$E_0 H_0 f = E_0 (A_0 (1 - e^{-\xi})) = E_0 (A_0 (1 - e^{-x/\varepsilon})) = A_0$$

$$\begin{aligned} H_0 E_0 f &= H_0 (h(x) - h(1) + 1) = H_0 (h(\varepsilon \xi) - h(1) + 1) \\ &= h(0) - h(1) + 1 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung $E_0 H_0 f = H_0 E_0 f$ ergibt sich

$$A_0 = h(0) - h(1) + 1$$

also das identische Resultat wie vorher.

Ein weiteres Beispiel zur Regel von van Dyke.

Für $p = q = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}E_1 H_1 f &= E_1 (A_0 (1 - e^{-\xi}) + \varepsilon (A_1 (1 - e^{-\xi}) + h'(0)\xi)) \\&= E_1 \left(A_0 \left(1 - e^{-x/\varepsilon} \right) + \varepsilon \left(A_1 \left(1 - e^{-x/\varepsilon} \right) + h'(0) \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\&= A_0 + x h'(0) + \varepsilon A_1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}H_1 E_1 f &= H_1 (h(x) - h(1) + 1 - \varepsilon (h'(x) - h'(1))) \\&= H_1 (h(\varepsilon\xi) - h(1) + 1 - \varepsilon (h'(\varepsilon\xi) - h'(1))) \\&= h(0) - h(1) + 1 - \varepsilon\xi h'(0) - \varepsilon h'(0) + \varepsilon h'(1) \\&= h(0) - h(1) + 1 - x h'(0) + \varepsilon (h'(1) - h'(0))\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wieder

$$A_0 = h(0) - h(1) + 1, \quad A_1 = h'(1) - h'(0)$$



Eine zusammengesetzte asymptotische Entwicklung.

Mit Hilfe der Regel von van Dyke kann man nun auch direkt eine zusammengesetzte asymptotische Entwicklung angeben, die auf dem ganzen Definitionsbereich gültig ist.

$$C_{p,q} f = E_p f + H_q f - E_p H_q f$$

Wir erhalten etwa für unser Modellproblem die kombinierte asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}C_{0,0} f &= E_0 f + H_0 f - E_0 H_0 f \\&= h(x) - h(1) + 1 + A_0 \left(1 - e^{-x/\varepsilon} \right) - A_0 \\&= h(x) - h(1) + 1 - (1 - h(1) + h(0)) e^{-x/\varepsilon}\end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen von oben leitet man analog die zusammengesetzte asymptotische Entwicklung $C_{1,1} f$ ab.



Graphische Darstellung der zusammengesetzten Entwicklung.

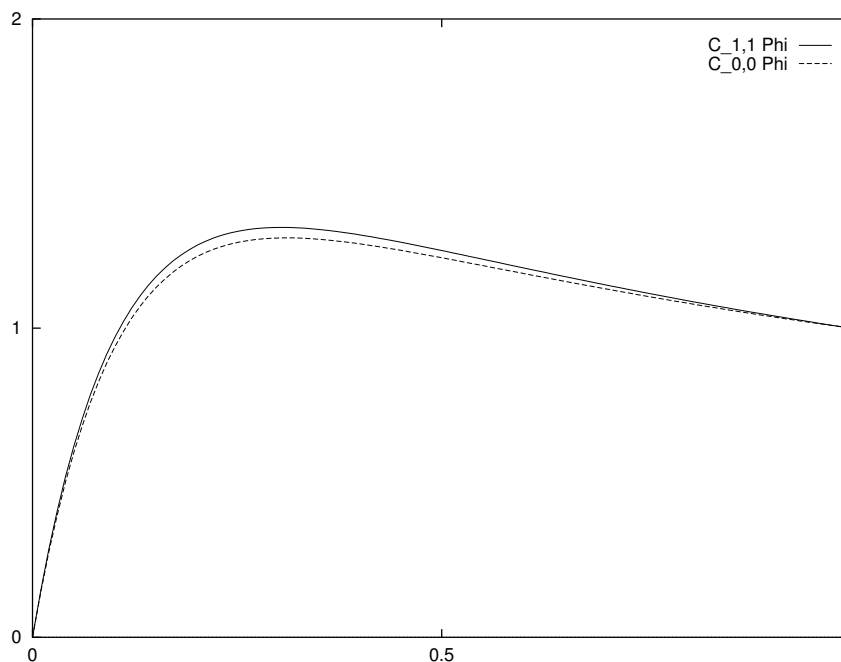


Abb. 4 Zusammengesetzte asymptotische Entwicklung $C_{0,0}f$ und $C_{1,1}f$.

Lage und Dicke von Grenzschichten.

Bei der asymptotischen Behandlung unserer Modellgleichung haben wir einige Dinge vorausgesetzt, die im allgemeinen Fall nicht **a-priori** bekannt sind.

Dies betrifft vor allem die Frage nach der Lage und der Größe oder Dicke von Grenzschichten. Beide Fragen können häufig analog zu der asymptotischen Behandlung algebraischer Gleichungen mit Hilfe einer **Reskalierung** beantwortet werden und dies wollen wir wiederum für unser Modellproblem exemplarisch vorstellen.

Wir setzen dazu

$$x = \delta(\varepsilon)\xi$$

mit einer speziellen Funktion $\delta(\varepsilon)$, beschränken uns aber im Folgenden auf den Spezialfall

$$x = \varepsilon^\alpha \xi \quad (\alpha > 0)$$

Die **reskalierte** Form unserer Modellgleichung lautet dann

$$\tilde{y}_{\xi\xi} + \varepsilon^{\alpha-1}\tilde{y}_\xi = \varepsilon^{2\alpha-1}h_x(\varepsilon^\alpha\xi),$$

Balanzierung der reskalierten Gleichung.

Die **reskalierte** Form unserer Modellgleichung lautet

$$\tilde{y}_{\xi\xi} + \varepsilon^{\alpha-1} \tilde{y}_{\xi} = \varepsilon^{2\alpha-1} h_x(\varepsilon^{\alpha} \xi),$$

Für verschiedene Werte von α erhält man damit eine Balance unterschiedlicher Terme der Gleichung.

Die interessanten Reskalierungen ergeben sich stets, wenn **mindestens** zwei Terme miteinander balanciert sind.

- für $\alpha = 0$ haben wir eine Balance zwischen den beiden Termen y' und h' ,
- für $0 < \alpha < 1$ ist allein der Term y' dominant,
- für $\alpha = 1$ sind die beiden Terme y'' und y' balanciert,
- für $\alpha > 1$ ist der Term y'' dominant

Zur Entdimensionalisierung des reduzierten Modells.

Anschaulich gesehen erhalten wir also

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon \Phi_{xx} & + & \Phi_x & = & h_x \\ \alpha = 0 & & & & \text{Balance} \\ 0 < \alpha < 1 & & & & \text{dominant} \\ \alpha = 1 & & & & \text{Balance} \\ 1 < \alpha & & & & \text{dominant} \end{array}$$

Die interessanten Skalierungen der Gleichung sind also

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = 1$$

die man im Englischen auch als **distinguished limits** bezeichnet und die gerade unsere inneren und äußeren Entwicklung lieferten.

Mit Hilfe einer Reskalierung kann auch entschieden werden, dass bei $x = 1$ kein Grenzschichtverhalten vorliegt.

Ein weiteres Beispiel zu Grenzschichtphänomenen.

Wir betrachten auf dem Intervall $[0, 1]$ das singular gestörte Randwertproblem

$$\varepsilon^2 y'' - y = 1$$

mit den beiden Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0$$

Die Reskalierungen

$$x = \varepsilon \xi \quad \text{und} \quad 1 - x = \varepsilon \xi$$

ergeben exponentiell abfallende Lösung bei $x = 0$ und $x = 1$.

Das bedeutet, dass das singular gestörte Problem **zwei** Grenzschichten besitzt, nämlich bei $x = 0$ und $x = 1$.

Eine (zusammengesetzte) asymptotische Entwicklung lautet

$$y(x) \sim 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}}$$

Graphische Darstellung der asymptotischen Lösung.

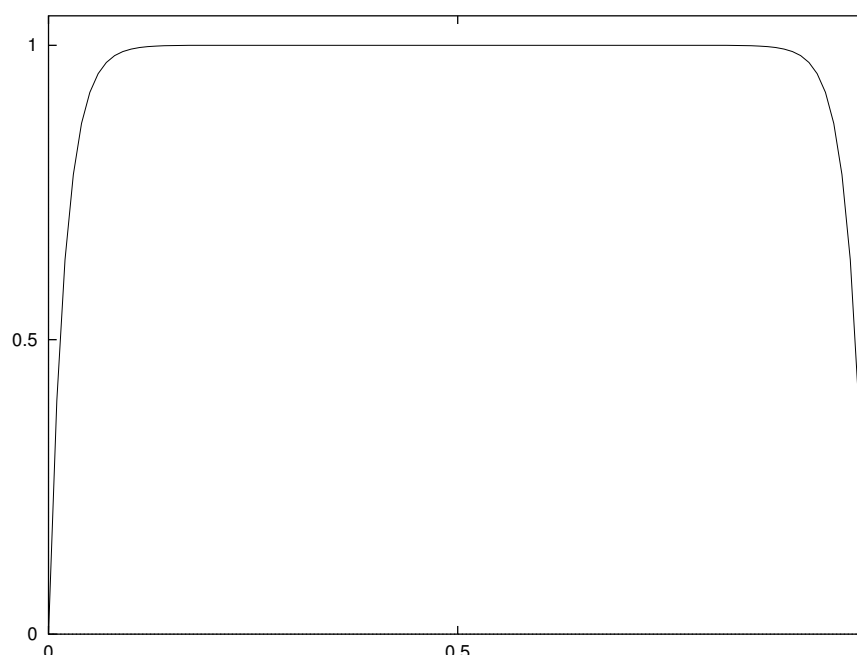


Abb. 5 Lösung des Modellproblems für $\varepsilon = 0.02$.

Noch ein Beispiel zu Grenzschichtphänomenen.

Wir betrachten auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Gleichung

$$\varepsilon^2 y'' + 2y(1 - y^2) = 0$$

zusammen mit den Randbedingungen $y(-1) = -1$ und $y(1) = 1$.
Im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich die algebraische Gleichung

$$y(1 - y^2) = 0$$

mit den drei Lösungen

$$y = 0, \quad y = 1 \quad \text{und} \quad y = -1$$

Für $\varepsilon \ll 1$ besitzt die Lösung eine Grenzschicht bei $x = 0$ und es gilt

$$y \sim \tanh \frac{x}{\varepsilon}$$

d.h. Grenzschichten befinden sich nicht stets in der Nähe des Randes.



Graphische Darstellung der asymptotischen Lösung.

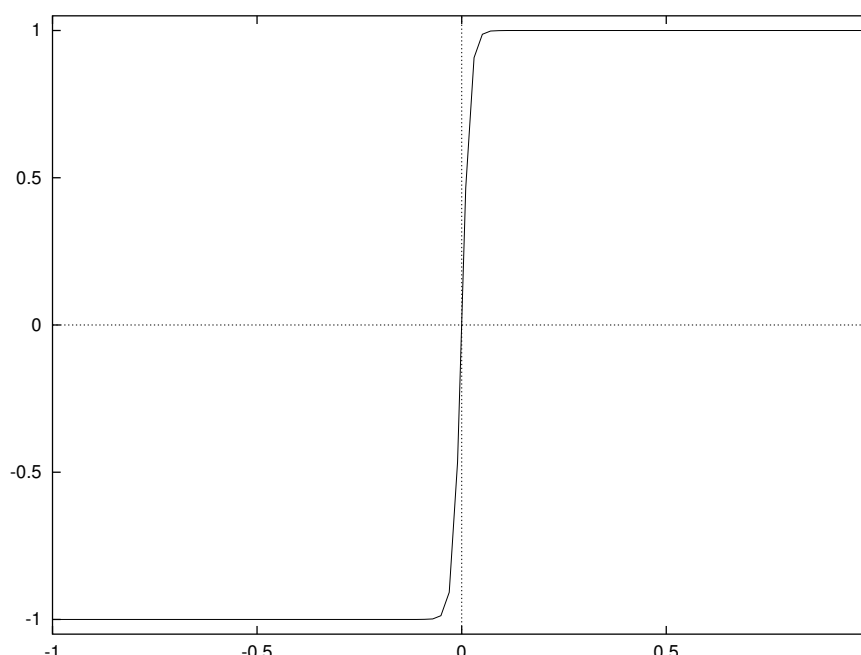


Abb. 6 Lösung des Modellproblems für $\varepsilon = 0.02$.



Und hier noch eine Aufgabe zum Üben (J.D. Cole).

Das auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte Randwertproblem

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + yy' - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

mit dem kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ besitzt bei $x = 0$ eine Grenzschicht.

Verwendet man nun die geänderten Randbedingungen

$$y(0) = -\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad y(1) = \frac{5}{4}$$

so wandert die Grenzschicht in das Innere des Intervalls $[0, 1]$.

Die Lage der Grenzschicht wird dadurch bestimmt, dass die Lösung innerhalb der Grenzschicht für einen bestimmten Wert ω von $-\omega$ nach ω springt.

Finden Sie eine zusammengesetzte asymptotische Entwicklung.

Kapitel 4. Mehrskalenmethoden

Wir betrachten wieder den **van-der-Pol Oszillator**

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

diesmal mit dem kleinen Parameter $\varepsilon \ll 1$ – ein regulär gestörtes Problem des **harmonischen Oszillators** – und schauen uns zunächst das ungestörte Problem bei $\varepsilon = 0$ an.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir offensichtlich

$$x_0(t) = \cos t$$

Naive Entwicklung beim van-der-Pol Oszillator.

Eine naive Vorgehensweise für kleine Parameter ε wäre damit die Suche nach einer **asymptotischen Entwicklung** – zum Beispiel erster Ordnung – der Form:

$$x(t; \varepsilon) \sim \cos t + \varepsilon x_1(t) \quad \text{mit } x_1 = \text{ord}(1)$$

Wir setzen daher die formale Entwicklung

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n x_n(t)$$

in die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0$$

ein und erhalten die Gleichung

$$\sum_{n=0}^p \left(\varepsilon^n \ddot{x}_n + \varepsilon^{n+1} \dot{x}_n \left(\left(\sum_{n=0}^p \varepsilon^n x_n(t) \right)^2 - 1 \right) + \varepsilon^n x_n(t) \right) = 0$$

Navigationssymbole

Koeffizientenvergleich in Potenzen von ε .

In nullter Ordnung gilt

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0$$

mit den beiden Anfangsbedingungen

$$x_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{x}_0(0) = 0$$

und die Lösung lautet wie erwartet

$$x_0(t) = \cos t$$

In erster Ordnung ergibt sich die Gleichung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\dot{x}_0(x_0^2 - 1)$$

Mit der Lösung $x_0(t)$ schreibt sich die rechte Seite als

$$\dot{x}_0(x_0^2 - 1) = \sin^3 t$$

und wir erhalten in erster Ordnung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\sin^3 t$$

Navigationssymbole

Erste Ordnung liefert erzwungene Schwingung.

Die Gleichung erster Ordnung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\sin^3 t$$

beschreibt eine **erzwungene Schwingung**, d.h. der ungestörte harmonische Oszillator auf der linken Seite der Gleichung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0$$

wird durch eine äußere Schwingung – die Inhomogenität auf der rechten Seite – in Anregung gebracht.

Dies führt im sogenannten **Resonanzfall**, d.h. eine Anregungsfrequenz der Inhomogenität fällt mit der Eigenfrequenz des ungestörten harmonischen Oszillator zusammen, zu einer in der Zeit **monoton steigenden** Amplitude in der angeregten Resonanzschwingung.

Es muss also überprüft werden, ob in der Gleichung erster Ordnung der Resonanzfall eintritt.



Naive asymptotische Entwicklung erster Ordnung.

Die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen liefern zunächst

$$-\sin^3 t = \frac{1}{4} \sin 3t - \frac{3}{4} \sin t$$

und die Gleichung erster Ordnung lautet damit

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{4} \sin 3t - \frac{3}{4} \sin t$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ erhalten wir

$$x_1(t) = \frac{3}{8} (t \cos t - \sin t) - \frac{1}{32} (\sin 3t - 3 \sin t)$$

Eine Näherungslösung für kleine ε lautet also

$$x(t; \varepsilon) \sim \cos t + \varepsilon \left[\frac{3}{8} (t \cos t - \sin t) - \frac{1}{32} (\sin 3t - 3 \sin t) \right]$$



Langzeitverhalten der Näherungslösung.

Im Langzeitverhalten bedeutet dies aber

$$\begin{aligned}x(1/\varepsilon, \varepsilon) &\sim \cos(1/\varepsilon) \\ &+ \varepsilon \left[\frac{3}{8} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cos(1/\varepsilon) - \sin(1/\varepsilon) \right) - \frac{1}{32} \left(\sin \left(\frac{3}{\varepsilon} \right) - 3 \sin(1/\varepsilon) \right) \right] \\ &\sim \frac{11}{8} \cos(1/\varepsilon) + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

Auf der Zeitskala $t = O(1/\varepsilon)$ ist dies **keine** asymptotische Entwicklung der exakten Lösung.

Als Näherungslösung erster Ordnung haben wir angenommen

$$x(t; \varepsilon) \sim \cos t + \varepsilon x_1(t)$$

d.h. es sollte gelten

$$x(1/\varepsilon; \varepsilon) \sim \cos(1/\varepsilon) + O(\varepsilon)$$

Naive Vorgehensweise versagt im Langzeitverhalten.

Die naive Vorgehensweise zur Herleitung einer asymptotischen Lösung bricht also zusammen und dies liegt daran, dass in der Gleichung

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0$$

simultan zwei Phänomene auf unterschiedlichen Zeitskalen aktiv sind.

Ein Ausweg ist die Verwendung einer **Mehrskalenentwicklung**, d.h. wir definieren **zwei** Zeitskalen:

$$\tau = t, \quad T = \varepsilon t$$

Die Zeitskala

- definiert durch τ ist eine **schnelle** Skala und beschreibt die Schwingungen des van-der-Pol Oszillators,
- definiert durch T ist eine **langsame** Skala und beschreibt Änderungen der Amplitude beziehungsweise eine Phasenverschiebung auf der langsamen Skala.

Mehrskalenansatz.

Wir verwenden daher den **Mehrskalenansatz**

$$x(t; \varepsilon) = x(\tau, T; \varepsilon)$$

mit $\tau = t$ und $T = \varepsilon t$ und suchen eine asymptotische Entwicklung der Form

$$x(t; \varepsilon) \sim x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T)$$

wobei die Entwicklung auch für $T = \text{ord}(1)$ bzw. $\tau = \text{ord}(1/\varepsilon)$ gültig bleiben soll, d.h. insbesondere, dass

$$x_1(1/\varepsilon, 1) = \text{ord}(1)$$

gelten soll.

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial T} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}$$

Navigationssymbole

Ausarbeitung des Mehrskalenansatzes.

Setzen wir den Mehrskalenansatz in unsere Gleichung ein, so erhalten zunächst in nullter Ordnung die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + x_0 = 0$$

Mit den beiden Anfangsbedingungen

$$x_0(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial \tau}(0, 0) = 0$$

ergibt sich die Lösung als

$$x_0(\tau, T) = R(T) \cos(\tau + \Phi(T))$$

wobei

$$R(0) = 1 \quad \text{und} \quad \Phi(0) = 0$$

gelten muss.

Navigationssymbole

Bestimmungsgleichung erster Ordnung.

In erster Ordnung erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial T} = -\frac{\partial x_0}{\partial \tau} (x_0^2 - 1)$$

und unter Verwendung der Lösung x_0 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 &= 2R \cos(\tau + \theta) \frac{d\theta}{dT} + 2 \frac{dR}{dT} \sin(\tau + \theta) \\ &+ \left(\frac{1}{4} R^3 - R \right) \sin(\tau + \theta) + \frac{R^3}{4} \sin 3(\tau + \theta) \end{aligned}$$

Nun folgt der entscheidende Schritt bei der Verwendung einer Mehrskalenerwicklung für den van-der-Pol Oszillator.

Um Resonanzen und damit einen Anstieg der Amplitude in der Funktion $x_1(\tau, T)$ zu vermeiden, müssen alle Terme der Inhomogenität auf der rechten Seite, die Resonanzen erzeugen können, unterdrückt werden.



Unterdrückung von Resonanzen in der ersten Ordnung.

Die Gleichung für x_1 beschreibt eine **erzwungene Schwingung**.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 &= 2R \cos(\tau + \theta) \frac{d\theta}{dT} + 2 \frac{dR}{dT} \sin(\tau + \theta) \\ &+ \left(\frac{1}{4} R^3 - R \right) \sin(\tau + \theta) + \frac{R^3}{4} \sin 3(\tau + \theta) \end{aligned}$$

Wollen wir Resonanzen unterdrücken, so müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein.

$$\frac{d\theta}{dT} = 0, \quad 2 \frac{dR}{dT} + \left(\frac{R^3}{4} - R \right) = 0,$$

Mit den Randbedingungen $R(0) = 1$ und $\theta(0) = 0$ ergeben sich die beiden Lösungen

$$\theta(T) = 0, \quad R(t) = 2 (1 + 3e^{-T})^{-1/2},$$

und damit die asymptotische Entwicklung nullter Ordnung

$$x(t; \varepsilon) \sim 2 (1 + 3e^{-\varepsilon t})^{-1/2} \cos t$$



Bestimmungsgleichung erster Ordnung.

Entsprechend lautet die Gleichung erster Ordnung jetzt

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = \frac{R^3}{4} \sin 3\tau$$

Die Lösung dieser Gleichung berechnet sich zu

$$x_1(\tau, T) = -\frac{1}{32} R^3(T) \sin 3\tau + S(T) \sin(\tau + \varphi(T))$$

wobei S and φ wiederum unbekannte Funktionen der langsamen Zeitskala T sind. Die Anfangsbedingungen für $S(T)$ und $\varphi(T)$ lassen sich folgendermaßen angeben:

$$x_1(0, 0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau}(0, 0) = -\frac{dR}{dT}(0) = -\frac{3}{8} \Rightarrow S(0) = -\frac{9}{32}$$

In der Gleichung der nächsten Ordnung wird wiederum versucht Resonanzen zu vermeiden.



Mehrskalalentwicklungen höherer Ordnung.

Es kann passieren, dass bei höheren Termen einer Mehrskalентwicklung keine Bedingungen zur Vermeidung von Resonanzen bestimmt werden können.

Das deutet darauf hin, dass weitere Zeitskalen berücksichtigt werden müssen, d.h. man erweitert die Asymptotik um eine Skala $\tilde{T} = \varepsilon^2 t$.

Im Allgemeinen kann eine Mehrskalентwicklung daher von der Form

$$x(t; \varepsilon) = X(T_0, T_1, \dots, T_k; \varepsilon), \quad T_k = \varepsilon^k t$$

sein.

Alternativer Ansatz: Wir verwenden die beiden Zeitskalen

$$\xi = \varepsilon t$$

$$\eta = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots + \varepsilon^m \omega_m) t$$

und suchen eine asymptotische Lösung des van-der-Pol Oszillators in der Form

$$x(t; \varepsilon) = \hat{x}(\xi, \eta; \varepsilon)$$

