

Partielle Differentialgleichungen
– Eine Einführung –

Wintersemester 2005/06

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
20146 Hamburg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
1. Partielle Differentialgleichungen	1
2. Mathematische Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen	2
3. Grundlegende Problemstellungen	9
Kapitel 2. Fundamentale lineare partielle Differentialgleichungen	11
1. Die Transportgleichung	11
2. Die Laplacegleichung	12
3. Die Wärmeleitungsgleichung	29
4. Die Wellengleichung	40
Kapitel 3. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	53
1. Die Methode der Charakteristiken	53
2. Nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen	61
3. Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	73
4. Analytische Lösung einfacher quasilinearer Systeme	81

KAPITEL 1

Einleitung

1. Partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung (englisch: partial differential equation, oder auch kurz PDE) ist eine Gleichung, in der als Variablen eine unbekannte Funktion in mehreren Veränderlichen sowie deren Ableitungen auftreten. Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung, die eine Funktion einer Veränderlichen beschreibt, tauchen also bei einer partiellen Differentialgleichung **partielle Ableitungen** auf.

Formal definieren wir eine partielle Differentialgleichung folgendermaßen: sei $k \geq 1$ und U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n .

DEFINITION 1.1. *Ein Ausdruck der Form*

$$(1.1) \quad F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

heißt **partielle Differentialgleichung k -ter Ordnung**, wobei

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}$$

die Unbekannte ist.

Wir suchen nun eine Lösung der Gleichung (1.1) in einer Klasse von Funktionen, die zusätzlich gewisse Randbedingungen auf Teilen Γ des Randes δU erfüllen.

Neben der allgemeinen Definition von oben betrachtet man spezielle Klassen von partiellen Differentialgleichungen.

DEFINITION 1.2.

- 1) Die partielle Differentialgleichung (1.1) nennt man **linear**, wenn sie von der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

ist, wobei a_α ($|\alpha| \leq k$) und f . Sie ist **homogen**, falls $f = 0$.

- 2) Die partielle Differentialgleichung (1.1) nennt man **semilinear**, wenn sie von der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = f(x)$$

ist.

- 3) Die partielle Differentialgleichung (1.1) nennt man **quasilinear**, wenn sie von der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = f(x)$$

ist.

- 4) Die partielle Differentialgleichung ist **nichtlinear**, wenn sie nichtlinear von den höchsten Ableitungen abhängt.

Ein System von partiellen Differentialgleichungen ist entsprechend definiert.

DEFINITION 1.3. Ein Ausdruck der Form

$$(1.2) \quad \mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1} \mathbf{u}(x), \dots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = \mathbf{0} \quad (x \in U)$$

heißt System von partiellen Differentialgleichung k -ter Ordnung, wobei

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine gegebene Funktion und

$$\mathbf{u} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$$

die Unbekannte ist.

2. Mathematische Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen

Es existiert keine allgemeine Theorie zur Lösung von partiellen Differentialgleichung. Dafür sind partielle Differentialgleichungen für sich genommen zu reichhaltig. Sie bilden die Basis der Mathematischen Modellierung etwa bei

- der Beschreibung physikalischer Phänomene oder
- bei naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen

Stattdessen untersucht man spezielle Gleichungen, die bei Anwendungen innerhalb und ausserhalb der Mathematik wichtig sind, und erhofft sich dadurch einen tieferen Einblick in die Lösungstheorie der Gleichungen.

In dem Buch von Evans findet man eine Liste von wichtigen partiellen Differentialgleichungen, angefangen bei den klassischen linearen Gleichungen, wie etwa der Laplacegleichung oder der Wellengleichung, über spezielle nichtlineare Gleichungen (etwa die Eikonalgleichung, die Hamilton–Jacobi–Gleichung) bis hin zu Systemen von partiellen Differentialgleichungen (die Maxwell–Gleichungen, Euler– und Navier–Stokes–Gleichungen).

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz auf den Aspekt der mathematischen Modellierung mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen eingehen und dabei einige klassischen Gleichungen kennenlernen. Dabei formulieren wir zuerst ein fundamentales Theorem zur Beschreibung von allgemeinen Transportprozessen, das **Transporttheorem**:

Wir betrachten eine physikalische Grösse, die zur Zeit $t = 0$ das beliebige Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega = \mathbb{R}^n$ einnimmt, wobei Ω_0 offen und beschränkt sei.

Weiter beschreibe die Funktion $\Phi(x, t)$ die Veränderung eines Punktes $y \in \Omega_0$ in der Zeit, also

$$\Phi : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \Omega_t \subset \Omega$$

sodass

$$\Omega_t = \{\Phi(y, t) : y \in \Omega_0\}$$

Die Trajektorie des Punktes $y \in \Omega_0$ sei beschrieben durch die Abbildung $t \rightarrow \Phi(y, t)$ und die Geschwindigkeit der Grösse an einem festen Ort $x = \Phi(y, t) \in \Omega_t$ sei gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(y, t) = \mathbf{v}(\Phi(y, t), t)$$

SATZ 1.4. Transporttheorem

Für eine differenzierbare, skalare Funktion $f : \Omega_t \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(f \mathbf{v}) \right\} (x, t) dx$$

BEWEIS. Das Problem ist, dass Ω_t selbst von der Zeit abhängt und man daher nicht direkt unter dem Integral differenzieren kann. Also: Transformiere Ω_t auf Ω_0

$$\int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_0} f(\Phi(x, t), t) J(x, t) dx$$

wobei $J(x, t)$ die Jacobi-Determinante der Abbildung $\Phi(x, t)$ bezüglich x ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega_0} \left\{ \operatorname{div}(f(\Phi(x, t), t)) \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} J(x, t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(x, t), t) J(x, t) + f(\Phi(x, t), t) \frac{\partial J(x, t)}{\partial t} \right\} dx \end{aligned}$$

und wir benötigen die Ableitung der Jacobi-Determinante $J(x, t)$.

Hier gilt

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} = J(x, t) \operatorname{div}(\mathbf{v}(\Phi(x, t), t))$$

was man durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung von

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = \mathbf{v}(\Phi(x, t), t)$$

verifiziert. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx &= \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi(x, t), t) + \operatorname{div}(f \mathbf{v})(\Phi(x, t), t) \right\} J(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{v})(x, t) \right\} dx \end{aligned}$$

mittels Rücktransformation $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$. □

Aus dem Transporttheorem lassen sich die sogenannten **Erhaltungsgleichungen** ableiten, die häufig zur Modellierung von Transportvorgängen verwendet werden:

Für die physikalische Grösse ‘‘Masse‘‘, die durch die Funktion $u(x, t)$ beschrieben ist, gelte: während des Transportprozesses wird keine Masse erzeugt oder vernichtet, d.h.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} u(x, t) dx = 0$$

Aus dem Transporttheorem folgt damit

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(u\mathbf{v})(x, t) \right\} dx = 0$$

Da $\Omega_t \subset \Omega$ beliebig ist, folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(uv)(x, t) = 0$$

die als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet wird. Die Grösse $\mathbf{q}(x, t) = (uv)(x, t)$ definiert den Fluss .

Die Kontinuitätsgleichung allein beschreibt kein abgeschlossenes physikalisches System, d.h. wir benötigen eine Abschlussrelation für den Fluss in der Form

$$\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{q}(u(x, t), \nabla u(x, t), \dots)$$

und das Finden einer Abschlussrelation ist Teil der **Modellierung**.

Die einfachste partielle Differentialgleichung die sich aus der Kontinuitätsgleichung ableiten lässt ist die **Transportgleichung**,

$$(1.3) \quad u_t + b \cdot \nabla u = 0$$

die wir im zweiten Kapitel näher untersuchen werden. Hier wählen wir also für den Fluss $\mathbf{q}(x, t)$ den einfachsten Ansatz, nämlich

$$\mathbf{q}(x, t) = b \cdot u(x, t), \quad b \in \mathbb{R}^n$$

Eine Beispiel zur Modellierung mit der Transportgleichung wird in den Übungen besprochen.

Ein weiteres Beispiel zur Anwendung des Transporttheorems bei der Modellierung ist die **Wärmeleitungsgleichung**: nehmen wir an, dass die Funktion $u(x, t)$ eine der drei folgenden Grössen beschreibt

- chemische Konzentration
- Temperatur
- elektro-statisches Potential

Da alle drei Grössen einem Erhaltungsprinzip unterliegen, lässt sich das dynamische Verhalten von u mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung beschreiben,

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0$$

Man muss nun also die Abhängigkeit des Flusses \mathbf{q} von der Ausgangsgrösse u beschreiben: aus physikalischen Gründen ist es sinnvoll anzunehmen, dass der Fluss proportional zum Gradienten von u ist, allerdings in die entgegengesetzte Richtung des Gradienten zeigt,

$$(1.4) \quad \mathbf{q} = -a\nabla u, \quad a > 0$$

da die Grösse u immer aus Bereichen höherer Werte in Bereiche mit niedrigeren Werten fliesst. Wir erhalten damit aus der Kontinuitätsgleichung durch Einsetzen

$$u_t + \operatorname{div}(-a\nabla u) = 0$$

und mit $a = 1$ die klassische Wärmeleitungsgleichung in der Form

$$(1.5) \quad u_t = \Delta u$$

Die Beziehung (1.4) heisst dabei je nach Anwendungsfall

- das Ficksche Gesetz der Diffusion
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Leitung

Man nennt die Gleichung (1.5) deshalb auch *Diffusionsgleichung*.

Für den Fall, dass die Funktion $u(x, t)$ nicht von der Zeitvariablen t abhängt, d.h. die Grösse $u(x, t)$ befindet sich in einem Gleichgewicht und somit einem stationären Zustand, erhält man aus (1.5) die *Laplacegleichung*,

$$(1.6) \quad \Delta u = 0$$

deren Lösungen auch *harmonische Funktionen* genannt werden.

Neben den drei Gleichungen (1.2), (1.5) und (1.6) ist die sogenannte *Wellengleichung*

$$u_{tt} = \Delta u$$

eine fundamentale lineare Differentialgleichung, die wir näher im zweiten Kapitel untersuchen wollen.

Die klassischen Gleichungen der Strömungsdynamik

Die wohl wichtigste Anwendung des Transporttheorems kommt aus dem Bereich der Strömungsdynamik: Strömungen von Flüssigkeiten oder Gasen lassen sich prinzipiell in die folgenden Klassen unterteilen

- laminare oder turbulente Strömungen,
- kompressible oder inkompressible Strömungen,
- reibungsfreie oder reibungsbehaftete (viskose) Strömungen

Die bei der Beschreibungen von Strömungen am häufigsten verwendeten Modelle sind dabei

- laminare, inkompressible, viskose Strömungen, beschrieben durch die Navier–Stokes Gleichungen,
- kompressible, reibungsfreie Strömungen, beschrieben durch die Euler–Gleichungen, ein System von sogenannten Erhaltungsgleichungen.

Die beiden Gleichungen wollen wir allein aus dem Transporttheorem ableiten. Dabei werden wir die folgenden physikalischen Grössen verwenden:

- die Dichte $\rho(x, t)$, die Geschwindigkeit $u(x, t)$, der Druck $p(x, t)$ und unter Hinzunahme von Energietransport eine Temperatur $T(x, t)$ oder Energie $E(x, t)$.

Der Begriff *inkompressibel* lässt sich am einfachsten unter Hinzunahme des Transporttheorems erklären: in der Formulierung des Transporttheorems hatten wir das zeitabhängige Gebiet Ω_t betrachtet, das das von einer physikalischen Grösse zur Zeit t ausgefüllte Gebiet des \mathbb{R}^d beschreibt. Ein Fluid heißt *inkompressibel*, wenn für jedes gegebene $\Omega_0 \subset \Omega$ gilt

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dx = \text{konstant in } t$$

Anschaulich heißt das: bei den durch einen Strömungsvorgang auftretenden Kräften wird ein gegebenes Fluidvolumen nicht verändert. Beispiele sind moderate Strömungen von Flüssigkeiten.

Unter Verwendung des Transporttheorems erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} J(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \text{div}(u) J dx = \int_{\Omega_t} \text{div}(u) dx$$

und damit ergeben sich die folgenden äquivalenten Aussagen

- a) ein Fluid ist inkompressibel
- b) $\text{div } u = 0$
- c) $J = 1$

Bedingung b) sagt, daß das Geschwindigkeitsfeld *divergenz-frei* ist; die *Volumenerhaltung* entlang von Partikeltrajektorien ist durch die Bedingung c) garantiert.

Aus der *Massenerhaltung* hatten wir im vorhergehenden Abschnitt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0$$

hergeleitet, die zur Beschreibung des Massentransports von kompressiblen Strömungen verwendet wird. Bei inkompressiblen Strömungen wird diese durch die *Inkompressibilitätsbedingung* b) von oben ersetzt, also

$$\text{div } u = 0$$

Für die Dichte $\rho(x, t)$ erhält man dann

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div } u = 0$$

und somit unter Verwendung von $d/dt = \partial/\partial t + u \cdot \nabla$ die Gleichung

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0$$

d.h. die Dichte bleibt entlang von Stromlinien konstant.

Eine Unterscheidung zwischen reibungsfreien und reibungsbehafteten Strömungen wird

über die Erhaltungsgleichung für den Impuls gesteuert: der Impuls eines Fluids im Gebiet Ω_t ist gegeben durch das Integral über das Produkt von Masse und Geschwindigkeit

$$m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx$$

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist die zeitliche Änderung von $m(t)$ gerade gleich der Summe der auf das Fluid wirkenden Kräfte, die zum einen durch Volumenkräfte (z.B. Gravitation, Coriolis-Kraft, magnetische Kraft) zum anderen durch Oberflächenkräfte gegeben sind. Die Oberflächenkräfte lassen sich mit Hilfe des Spannungstensors $\sigma(x, t)$ in der Form $\int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) n d\omega$ ausdrücken, wobei

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Vernachlässigt man die Volumenkräfte, so lautet das Newtonsche Gesetz damit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx = \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) n d\omega$$

Verwenden wir komponentenweise das Transporttheorem und transformieren wir das Oberflächenintegral auf der rechten Seite mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, so erhält man die Impulsgleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + (u \nabla)(\rho u) + (\rho u) \operatorname{div} u - \operatorname{div} \sigma = 0$$

Ob das Fluid viskos oder nicht-viskos ist wird allein über die Modellierung des Spannungstensors σ gesteuert.

Reibungsfreie Strömungen: in diesem Fall vernachlässigt man die inneren Reibungskräfte in einer Strömung, sodass der Spannungstensor allein durch den Druck $p(x, t)$ bestimmt ist,

$$\sigma(x, t) = -p(x, t)I = -p(x, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reibungsbehaftete Strömungen: hier werden innere Reibungskräfte einer zähen Flüssigkeit berücksichtigt, z.B. bei sogenannten Newtonschen Fluiden in der Form

$$\sigma(x, t) = -pI + \tau = (-p + \lambda \operatorname{div} u)I + 2\mu\delta$$

wobei der viskosen Anteil τ mit Hilfe der Konstanten λ und μ und des Deformationstensors δ modelliert ist (Stokessches Postulat),

$$\delta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]_{i,j=1,2,3}$$

Lassen wir den Energietransport unberücksichtigt, so erhalten wir die beiden folgenden Modelle:

Die inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen

Das Fluid wird mit Hilfe des Geschwindigkeitsfeldes $u(x, t)$ und des Drucks $p(x, t)$ beschrieben und die Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= -\nabla p + \nu \Delta u \end{aligned}$$

wobei ν die kinematische Viskosität bezeichnet und der Druck mit der Dichte $\rho(x, t) = \rho_\infty$ skaliert ist. Die zweite Gleichung erhält man direkt aus obiger Impulsgleichung unter Verwendung des Spannungstensors für Newtonsche Flüssigkeiten und der Kontinuitätsgleichung.

Die inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen werden gewöhnlich als Anfangs–Randwertproblem auf dem räumlichen Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gestellt. Dabei sind die folgenden Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld $u(x, t)$ gebräuchlich: wir bezeichnen mit n die äußere Normale an $\partial\Omega$

- a) Haftbedingung (no–slip)

$$\langle u, n \rangle = 0, \quad u_{tang} = 0$$

d.h. das Fluid kann keine Wände durchdringen und das Fluid haftet an der Wand,

- b) Rutschbedingung (free–slip)

$$\langle u, n \rangle = 0, \quad \frac{\partial u_{tang}}{\partial n} = 0$$

d.h. das Fluid erfährt keine Reibungsverluste an der Wand,

- c) Einströmbedingung (inflow)

Beide Geschwindigkeitskomponenten in Normal– und Tangentialrichtung sind als Dirichlet–Daten vorgeschrieben,

- c) Ausströmbedingung (outflow)

$$\frac{\partial \langle u, n \rangle}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_{tang}}{\partial n} = 0$$

d.h. beide Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in der Richtung senkrecht zum Rand nicht,

- e) Periodische Randbedingungen

Für das reine Dirichletproblem haben die Navier–Stokes Gleichungen in 2–D für alle $t \geq 0$ eine eindeutige Lösung (eindeutig bis auf eine additive Konstante beim Druck), für den dreidimensionalen Fall gilt Eindeutigkeit nur in einem gewissen Zeitintervall $[0, T]$.

Die kompressiblen Euler–Gleichungen

Die (isentropen) Euler–Gleichungen beschreiben die Strömung durch die Kontinuitäts– und die Impulsgleichung, wobei der Spannungstensor durch die Beziehung $\sigma = -pI$ gegeben ist. Isentrop bedeutet, dass der Druck p allein über eine Beziehung der Form $p = p(\rho)$, z.B. bei idealen Gasen durch $p(\rho) = A\rho^\gamma$, mit dem adiabaten Exponenten γ .

Die Euler–Gleichungen lassen sich in den primitiven Variablen ρ und u oder den konservativen Variablen ρ und ρu (Impuls) darstellen. In primitiver Form lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= -\frac{1}{\rho} \nabla p\end{aligned}$$

Führt man die Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{p'(\rho)}$ ein, so gilt

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = c^2 \frac{\nabla \rho}{\rho}$$

sodass sich die zweite Gleichung auch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -c^2 \frac{\nabla \rho}{\rho}$$

schreiben lässt.

In konservativer Form schreibt man die Gleichungen als

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(u \otimes u) + p \cdot I) &= 0\end{aligned}$$

Die Euler–Gleichungen werden in der Regel durch eine Energiegleichung erweitert, die wieder aus einer Erhaltungseigenschaft abgeleitet ist,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}((e + p)u) = 0$$

wobei e die totale Energie bezeichnet. Dies scheint auf den ersten Blick die Situation komplizierter zu machen, ist aber aus physikalischen Gründen gerechtfertigt, da die isentropen Euler–Gleichungen zu unphysikalischen Phänomenen führen können.

3. Grundlegende Problemstellungen

Ein zentraler Begriff bei der Untersuchung partieller Differentialgleichungen ist der eines sachgemäss gestellten Problems. Man versteht darunter, dass das Problem die folgenden Eigenschaften besitzt:

- es existiert eine Lösung des Problems,
- diese Lösung ist eindeutig,
- die Lösung hängt stetig von der gegebenen Daten des Problems ab.

Die beiden ersten Forderungen sind aus mathematischer Sicht naheliegend, die letzte Bedingung lässt sich eher aus der zugrundeliegenden Anwendung motivieren: man verwendet partielle Differentialgleichungen zur Beschreibung von naturwissenschaftlich–technischen Problemen. Dabei ist es einleuchtend, dass die Gleichungen nur als mathematische Modelle gesehen werden können, die auf eine einfache Weise komplizierte Prozesse beschreiben. Damit ist auch klar, dass kleine Änderungen oder Ungenauigkeiten in der Beschreibung keine beliebig grossen Änderungen in den Lösung des Problems bewirken sollen.

Kehren wir zu der ersten Forderung zurück: wir hatten gesagt, dass eine Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung existieren soll. Diese Frage natürlich ungenau formuliert, denn zuerst müssen wir definieren, was wir unter einer Lösung tatsächlich verstehen. Wir könnten etwa nach einer analytischen oder unendlich oft differenzierbaren Funktion suchen, die die Gleichung löst. Dies wird im allgemeinen aber nicht möglich sein, wie wir auch später sehen werden. Statt dieser starken Einschränkung an die Lösung könnten wir etwa verlangen, dass eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung der Ordnung k auch k -mal differenzierbar ist. Eine solche Lösung werden wir als eine klassische Lösung der Differentialgleichung bezeichnen: zum Beispiel besitzt die Laplace-Gleichung eine klassische Lösung in dem oben genannten Sinne.

Daneben werden wir auch Gleichungen untersuchen, bei denen der Begriff einer klassischen Lösung nicht sinnvoll ist: betrachten wir die nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung der Form

$$u_t + F(u)_x = 0$$

so werden wir später sehen, dass auch bei der Vorgabe einer beliebig glatten, d.h. beliebig oft differenzierbaren Funktion, die wir zur Zeit $t = 0$ vorschreiben können, die Lösung der Gleichung Unstetigkeitsstellen entwickelt. Damit müssen wir den Begriff der klassischen Lösung zum Begriff einer verallgemeinerten oder schwachen Lösung erweitern. Dies werden Lösungen sein, die nicht notwendigerweise differenzierbare Funktionen darstellen, sondern vielmehr die gegebene Gleichung etwa nur in Integralform lösen.

Damit ist es auch sinnvoll, die Frage nach der Existenz einer Lösung von der Frage nach der Glattheit oder Regularität einer Lösung zu trennen.

Evans gibt in seinem Buch eine Reihe von Faustregeln an, die die typischen Schwierigkeiten bei partiellen Differentialgleichungen kurz festhalten:

- nichtlineare partielle Differentialgleichungen sind komplizierter als lineare Gleichungen, je mehr höhere Ableitungen in der Nichtlinearität vorkommen, desto schwieriger wird es,
- partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung sind schwieriger als partielle Differentialgleichungen niedriger Ordnung,
- Systeme von partiellen Differentialgleichungen sind ungleich komplizierter im Vergleich mit einer partiellen Differentialgleichung,
- partielle Differentialgleichungen in vielen Veränderlichen sind komplizierter als Differentialgleichungen in wenigen Variablen,
- im Allgemeinen ist es unmöglich für partielle Differentialgleichungen explizite Lösungsformeln anzugeben.