

## Das Mehrgitterverfahren

Mehrgitterverfahren kombinieren ein iteratives Lösungsverfahren mit einer Hierarchie unterschiedlicher Diskretisierungsgitter. Ausgehend von einer Näherungslösung auf einem feinen Gitter werden dabei sukzessiv Korrekturterme auf größeren Gittern berechnet, bis schließlich das resultierende lineare Gleichungssystem – ein zugehöriges Defektsystem – auf dem größten Gitter (theoretisch) exakt berechnet wird.

Dementsprechend benötigt man zur Herleitung eines Mehrgitterverfahrens die folgenden Bestandteile:

- a) einen *Glätter*. Darunter verstehen wir ein iteratives Lösungsverfahren, das den Fehler glättet, wobei grundsätzlich die hohen Frequenzen im Residuum deutlich schneller verschwinden als die niedrigen Frequenzen.
- b) geeignete *Prolongations- und Restriktionsoperatoren*. Diese Transferoperatoren werden benötigt, um eine vorgegebene Näherungslösungen von einem feinen bzw. groben auf das nächst gröbere bzw. nächst feinere Gitter zu verschieben.
- c) einen *Mehrgitteralgorithmus*. Dieser Algorithmus verknüpft auf geeignete Weise die Glättung mit der Prolongation bzw. Restriktion.
- d) eine *Konvergenzanalyse*. Damit werden die Vorteile des Mehrgitterverfahrens gegenüber klassischen iterativen Verfahren untersucht.

### 1. Glättungseigenschaft iterativer Lösungsverfahren

Der wesentliche Nachteil iterativer Lösungsverfahren besteht darin, dass hohe Frequenzen im Fehler rapide gedämpft werden, der globale Fehler bzw. niedrige Frequenzen nur langsam verschwinden. Diese Eigenschaft bezeichnet man gewöhnlich als die *Glättungseigenschaft* von iterativen Verfahren.

Als einführendes Beispiel betrachten wir im Folgenden die eindimensionale Poissongleichung in Kombination mit der gedämpften Richardson-Iteration: Das resultierende lineare Gleichungssystem besitzt eine Systemmatrix  $A$  der Form

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wesentlich bei der Untersuchung der Glättungseigenschaft eines iterativen Verfahrens ist die Kenntnis der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Systemmatrix  $A$ , d.h. wir

berechnen zunächst die Eigenvektoren von  $A$ : Mit dem Ansatz  $v^i = (v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)})$  und

$$v_j^{(i)} = \sqrt{2h} \sin(ijh\pi)$$

den man über eine Diskretisierung der Eigenvektoren des kontinuierlichen Problems  $u'' = 0$  erhält, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} (-\sin(j(j-1)h\pi) + 2\sin(ijh\pi) - \sin(i(j+1)h\pi)) \\ &= \frac{1}{h^2} (1 - \cos(ijh)) \sin(ijh\pi) \\ &= \underbrace{\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{ijh}{2}\right)}_{\lambda^{(i)}} \sin(ijh\pi), \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte von  $A$  gegeben durch

$$\lambda^{(i)} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{ih\pi}{2}\right)$$

und der minimale und maximale Eigenwert ist gegeben durch

$$\lambda_{min} = \|A^{-1}\|_2 = \frac{4}{h^2} \cos^2\left(\frac{h\pi}{2}\right) \quad \lambda_{max} = \|A^{-1}\|_2^{-1} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{h\pi}{2}\right)$$

Eine wichtige Beobachtung ist, dass der minimale bzw. maximale Eigenwert gerade das Verhalten der niedrigsten bzw. höchsten Frequenz beschreibt, denn wir erhalten

- für  $\lambda_{min}$  den Eigenvektor

$$v^{(1)} = (\sin(h\pi), \sin(2h\pi), \dots, \sin(nh\pi))$$

- sowie für  $\lambda_{max}$  den Eigenvektor

$$v^{(n)} = (\sin(nh\pi), \sin(2nh\pi), \dots, \sin(n^2h\pi))$$

Mit dieser Vorbetrachtung untersuchen wir nun das Verhalten der niedrigen und hohen Frequenzen, wobei wir als iteratives Lösungsverfahren die gedämpfte Richardson-Iteration verwenden:

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + w \left( f - Au^{(k-1)} \right)$$

Für den Fehler  $e^{(k)} = u^{(k)} - u$  ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{(k-1)} &= u^{(k)} - u = u^{(k-1)} - u + w \left( f - Au^{(k-1)} \right) \\ &= e^{(k-1)} + w \left( Au - Au^{(k-1)} \right) \\ &= (I - wA) e^{(k-1)} \end{aligned}$$

und wir entwickeln nun den Fehler in der Basis der oben berechneten Eigenvektoren des Problems:

$$e^{(k-1)} = \sum_{i=1}^n \xi_{k-1}^{(i)} v^{(i)}$$

Damit ergibt sich

$$e^{(k-1)} = (I - wA) \left( \sum_{i=1}^n \xi_{k-1}^{(i)} v^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^n \xi_{k-1}^{(i)} (1 - w\lambda^{(i)}) v^{(i)}$$

und unter Verwendung des Dämpfungsfaktors  $w = 1/\lambda_{max}$  erhalten wir

$$e^{(k)} = \sum_{i=1}^n \xi_{k-1}^{(i)} \left( 1 - \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda_{max}} \right) v^{(i)}$$

Entwickelt man den Anfangsfehler  $e^{(0)} = u^{(0)} - u$  in der Form

$$e^{(0)} = \sum_{i=1}^n \xi_0^{(i)} v^{(i)}$$

so ergibt sich schließlich

$$e^{(k)} = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda_{max}} \right)^k v^{(i)}$$

und als Resultat lassen sich die folgenden Aussagen ablesen:

- hochfrequente Fehler verschwinden deutlich schneller als niedrige
- der Fehler in der höchsten Frequenz verschwindet sofort
- der Fehler in der niedrigsten Frequenz verschwindet mit der Geschwindigkeit

$$\left( 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right)^k \quad \text{und} \quad \left( 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad h \rightarrow 0$$

Daher hängt die Konvergenzgeschwindigkeit der gedämpften Richardson-Iteration explizit von der Gitterweite  $h$  ab und ist von der Größenordnung  $O(h^2)$  für  $h \rightarrow 0$ .

Es läßt sich aber noch mehr sagen: Da die Beziehung

$$1 - \frac{\sin^2 \left( \frac{n\pi}{4(n+1)} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right)} \leq \frac{3}{4}$$

erfüllt ist, folgt, dass die Hälfte der Frequenzen, nämlich gerade die höheren, mit einer festen und von der Gitterweite  $h$  unabhängigen Geschwindigkeit von  $3/4$  gegen Null konvergieren.

## 2. Grundlegende Ideen zum Mehrgitterverfahren

Die grundlegende Idee des Mehrgitterverfahrens ist – wie bereits oben erwähnt – die Kombination eines iterativen Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme mit einer Hierarchie von Gitter, die bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen verwendet werden, wobei man ausgehend von einem gegebenen *feinen* Gitter sukzessiv *größere* Gitter durch das Auslassen einzelner Gitterpunkte generiert. Das lineare System  $Au = f$  mit der Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei also aus einer Diskretisierung der Differentialgleichung  $-u'' = f$  mit einer Gitterweite  $h = 1/(n+1)$  entstanden.

Dann existieren aufgrund der Eigenvektoren  $v^{(i)}, i = 1, \dots, n$  genau  $n$  Frequenzen, die

zu dem gegebenen (feinen) Gitter  $\Omega_h$  mit Gitterweite  $h$  gehören. Wir definieren nun das gröbere Gitter  $\Omega_H$  mit der Gitterweite  $H = 2h$ , indem wir jeden zweiten Gitterpunkt von  $\Omega_h$  auslassen. Damit sind auf  $\Omega_H$  nur die ersten  $(n-1)/2$  Frequenzen des  $h$ -Gitters aktive und die Hälfte dieser verschwindet auf  $\Omega_H$  schnell, d.h. unabhängig von der Gitterweite  $H = 2h$ .

Um vorhandene Näherungslösungen simultan auf den beiden Gitter  $\Omega_h$  und  $\Omega_H$  darzustellen, ist es notwendig sogenannte *Prolongations- und Restriktionsoperatoren* zu definieren:

- *Prolongation*: eine vorhandene Näherungslösung auf dem *groben* Gitter  $\Omega_H$  wird auf das feinere Gitter  $\Omega_h$  prolongiert
- *Restriktion*: eine vorhandene Näherungslösung auf dem *feinen* Gitter  $\Omega_h$  wird auf das gröbere Gitter  $\Omega_H$  restringiert

Wir betrachten zunächst wie oben nur zwei unterschiedliche Gitter:

- ein feines Gitter mit Gitterweite  $h$
- ein grobes Gitter mit Gitterweite  $H$

und erläutern die Idee im eindimensionalen Fall auf dem Intervall  $[0, 1]$ , d.h. wir suchen nach geeigneten Prolongations- und Restriktionsoperatoren

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{R}^{n_H} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_h} \\ R &: \mathbb{R}^{n_h} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_H} \end{aligned}$$

Sind die Operatoren linear, so gilt insbesondere

$$P \in \mathbb{R}^{n_h \times n_H} \quad \text{bzw.} \quad R \in \mathbb{R}^{n_H \times n_h}$$

Verwendet man zur Prolongation eine *lineare Interpolation*, so ergeben sich im Fall von homogenen Randbedingungen auf dem Intervall  $[0, 1]$  die Interpolationsformeln

$$\tilde{u} = P(u), \quad u \in \mathbb{R}^{n_H}, \quad \tilde{u} \in \mathbb{R}^{n_h}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{1}{2} u_1 \\ \tilde{u}_i &= \begin{cases} u_{i/2} & i \text{ gerade und } i = 2, \dots, n_h - 1 \\ \frac{1}{2} (u_{\frac{i-1}{2}} + u_{\frac{i+1}{2}}) & i \text{ ungerade und } i = 3, \dots, n_H - 2 \end{cases} \\ \tilde{u}_{n_H} &= \frac{1}{2} u_{n_h} \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrixdarstellung  $P \in \mathbb{R}^{n_h \times n_H}$  lautet dann

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Der Restriktionsoperator  $R : \mathbb{R}^{n_h} \rightarrow \mathbb{R}^{n_H}$  wird verwendet, um eine auf dem feinen Gitter gegebene Lösung auf das grobe Gitter einzuschränken. Bei der Wahl des Restriktionsoperators gibt es mehr Wahlmöglichkeiten als bei der Prolongation: Gegeben seien die diskreten Werte  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{n_h}$  auf dem feinen Gitter. Die einfachste Art der Restriktion ist es, die Werte des feinen Gitters einfach auf dem groben Gitter zu übernehmen, d.h. wir setzen

$$u_i = \tilde{u}_{2i}, \quad i = 1, \dots, n_H$$

Diese Vorgehensweise ist im Rahmen des Mehrgitterverfahrens allerdings – aus verschiedenen Gründen – nicht sinnvoll.

Eine besser geeignete Form ist die der *gewichteten Restriktion*, d.h. man definiert die diskreten Werte auf dem groben Gitter mittels

$$u_i = \frac{1}{4} (\tilde{u}_{2i-1} + 2\tilde{u}_{2i} + \tilde{u}_{2i+1}), \quad i = 1, \dots, n_H$$

Die zugehörige Matrixdarstellung des Operators  $R \in \mathbb{R}^{n_h \times n_H}$  mit  $u_H = R\tilde{u}_h$  lautet dann

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Bei der  $P$ -induzierten Restriktion wird der Operator  $R$  mittels eines gegebenen Prolongationsoperators  $P$  definiert, in dem man  $R$  als den zu  $P$  adjungierten Operator setzt:

$$R = P^*$$

Ist  $P$  ein linearer Operator, so folgt  $R = P^* = P^\top$ .

**BEISPIEL 3.1.** Als kurzes Beispiel betrachten wir wieder die eindimensionale Poissongleichung und untersuchen den Fall eines feinen Gitters in  $(0, 1)$  bestehend aus drei Gitterpunkten und dem zugehörigen groben Gitters, das genau einen Punkt enthält. Die Systemmatrix  $A_h$  auf dem feinen Gitter lautet dann

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{4} \implies \frac{1}{h^2} = 16$$

Der über lineare Interpolation definierte Prolongationsoperator ist gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} u_1/2 \\ u_1 \\ u_1/2 \end{pmatrix}$$

und der durch  $P$  induzierte Restriktionsoperator ist gerade

$$R = P^* = P^\top = (1/2, 1, 1/2) \implies$$

mit

$$u_1 = (1/2, 1, 1/2) \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_1 + 2\tilde{u}_2 + \tilde{u}_3)$$

Die eindimensionale Betrachtung der Prolongations- und Restriktionsoperatoren lässt sich direkt auf den mehrdimensionalen Fall übertragen, wobei nun die Gitterweiten  $h$  und  $H = 2h$  in jeder Koordinatenrichtung gewählt werden. Wir betrachten im Folgenden wiederum nur das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } [0, 1]^2$$

und bezeichnen wieder mit  $n_h$  bzw.  $n_H$  die Anzahl der Gitterpunkte pro Koordinatenrichtung. Die *lineare Interpolation* passiert auf der linearen Funktion

$$f(x, y) = a + bx + cy$$

deren Koeffizienten dadurch bestimmt werden, dass man ein gegebene quadratische Zelle mittels der Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegt und dann die Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  der oben stehenden linearen Funktion über die diskreten Werte an den Ecken des Dreiecks festlegt. Damit ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{11} &= u_{11} & \tilde{u}_{22} &= \frac{1}{2}(u_{11} + u_{22}) \\ \tilde{u}_{12} &= \frac{1}{2}(u_{11} + u_{12}) & \tilde{u}_{23} &= \frac{1}{2}(u_{12} + u_{22}) \\ \tilde{u}_{13} &= u_{12} & \tilde{u}_{33} &= u_{22} \end{aligned}$$

Bei der *bilinearen Interpolation* verwendet man die Funktion

$$f(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

die auf der ganzen quadratischen Zelle mittels der diskreten Werte an den Ecken der Zelle bestimmt wird. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{11} &= u_{11} & \tilde{u}_{21} &= \frac{1}{2}(u_{11} + u_{21}) & \tilde{u}_{31} &= u_{21} \\ \tilde{u}_{12} &= \frac{1}{2}(u_{11} + u_{12}) & \tilde{u}_{22} &= \frac{1}{4}(u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22}) & \tilde{u}_{32} &= \frac{1}{2}(u_{21} + u_{22}) \\ \tilde{u}_{13} &= u_{12} & \tilde{u}_{23} &= \frac{1}{4}(u_{21} + u_{22}) & \tilde{u}_{33} &= u_{22} \end{aligned}$$

Analog zu den Ausführungen im eindimensionalen Fall lässt sich dann wieder ein geeigneter Restriktionsoperator definieren.

Eine Aufteilung des Lösungsvektors  $u \in \mathbb{R}^n$  eines LGS  $Au = f$  in *grobe* und *feine Gittergitterpunkte* und die dazugehörigen Prolongations- und Restriktionsoperatoren lassen sich auch ohne Verwendung eines konkreten Diskretisierungsgitters definieren. Man spricht

dann von einem *algebraischen Mehrgitterverfahren*. Hierzu teilt man den Vektor  $u \in \mathbb{R}$  in zwei disjunkte Menge, die jeweils die groben bzw. feinen Punkte enthalten sollen, d.h.

$$u = (u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_{n_C}) \dot{\cup} (w_1, \dots, w_{n_F})$$

Dadurch wird gleichzeitig die gegebene Systemmatrix  $A$  als auch die rechte Seite  $f$  des LGS in die folgende Blockstruktur zerlegt:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{CC} & A_{CF} \\ \hline A_{FC} & A_{FF} \end{array} \right), \quad f = \begin{pmatrix} f_C \\ f_F \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Transformation

$$T = \left( \begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A_{FF}^{-1} A_{FC} & I \end{array} \right)$$

ergibt sich

$$A = T^\top \begin{pmatrix} S_C & O \\ O & A_{FF} \end{pmatrix} T$$

wobei die Matrix  $S_C$  durch

$$S_C = A_{CC} - A_{CF} A_{FF}^{-1} A_{FC}$$

gegeben ist. Die Matrix  $S_C$  nennt man auch das *Schur-Komplement* (von  $A_{CC}$  in  $A$ ), i.e. das Schur-Komplement der Punkte des feinen Gitters. Mit Hilfe des Schur-Komplement lassen sich die folgenden Prolongations- und Restriktionsoperatoren definieren:

$$(3.1) \quad P = \begin{pmatrix} I \\ -A_{FF}^{-1} A_{FC} \end{pmatrix}$$

und

$$(3.2) \quad R = (I, -A_{CF} A_{FF}^{-1})$$

Das folgende Lemma läßt sich durch einfaches Nachrechnen beweisen:

LEMMA 3.2. *Gegeben seien die Prolongations- und Restriktionsoperatoren (3.1) und (3.2). Dann gilt*

$$S_C = R A P$$

BEISPIEL 3.3. *Für die eindimensionale Poissongleichung und einem feinen Gitter mit drei Punkten ergibt sich somit*

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} I \\ -A_{FF}^{-1} A_{FC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Weiter berechnet man

$$A_{FF}^{-1} A_{FC} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad S_C = \frac{1}{h^2}$$

$$A_{CF} A_{FF}^{-1} = (-1, -1) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (-1/2, -1/2)$$

$$R = (I, -A_{CF} A_{FF}^{-1}) = (1, 1/2, 1/2)$$

### 3. Das Zweigitterverfahren

Bevor wir den Algorithmus des Mehrgitterverfahrens angeben, beschäftigen wir uns hier kurz mit der Darstellung des sogenannten *Zweigitterverfahrens* (*TGM*). Hierzu benötigen wir die folgenden Bestandteile der zurückliegenden Abschnitte:

- einen Glätter
- Prolongations- und Restriktionsoperatoren
- eine Zerlegung des Lösungsvektors  $u \in \mathbb{R}^n$  in grobe und feine Gitterpunkte.

Im Speziellen sei das LGS auf dem feinen Gitter gegeben durch das System

$$A_h u_h = f_h$$

mit der Dimension  $n_h \in \mathbb{N}$ , auf dem groben Gitter sei das System

$$A_H u_H = f_H$$

der Dimension  $n_H$  gegeben, wobei  $n_h > n_H$  gelte.

Auf dem feinen Gitter betrachten wir die Iteration

$$u_h^{(k)} = T_\omega u_h^{(k-1)} + M_h^{-1}$$

Dadurch werden die hohe Frequenzen im Fehler  $e_h^{(k)}$  beseitigt, d.h. zerlegen wir den Fehler in die hohe und niedrigen Frequenzen  $e_{smooth}^{(k)}$  und  $e_{osc}^k$ , so gilt offensichtlich nach einigen Glättungsschritten

$$\|e_{smooth}^{(k)}\| \gg \|e_{osc}^{(k)}\|$$

Die Idee ist nun, nach Durchführung dieser Glättungsschritte eine *Grobgitterkorrektur*  $v_h$  zu berechnen, die ihrerseits den Fehler in den niedrigen Frequenzen reduziert, i.e. wir setzen

$$u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + v_h$$

Zur Berechnung der Grobgitterkorrektur  $v_h$  betrachten wir den folgenden Algorithmus:

- a) Berechne den Defekt  $\tilde{d}_h$  der Näherungslösung  $u_h^{(k)}$ :

$$\tilde{d}_h = f_h - A_h u_h^{(k)}$$

Der Defekt enthält im Wesentlichen niedrige Frequenzen.

- b) Restringiere den Defekt  $\tilde{d}_h$  auf das grobe Gitter:

$$\tilde{d}_H = R \tilde{d}_h$$

und bestimme die exakte Lösung des nachfolgenden, auf dem groben Gitter definierten linearen Gleichungssystem

$$A_H v_H = \tilde{d}_H$$

- c) Es gilt

$$v_H = A_H^{-1} \tilde{d}_H = A_H^{-1} R \tilde{d}_h$$

und

$$v_H \approx w_{exact} = A_h^{-1} \tilde{d}_h$$



bis auf die hohen Frequenzen, die auf dem groben Gitter nicht aufgelöst werden können.

- d) Prolongiere  $v_H$  auf das feine Gitter, d.h.

$$v_H = Pv_H$$

Es gilt weiterhin (nur)  $v_H \approx w_{exact}$ , wobei wiederum die hohen Frequenzen nicht exakt wiedergeben werden.

- e) Addiere die Grobgitterkorrektur  $v_h$  auf die Näherungslösung  $u_h^{(k)}$ , d.h.

$$u_h^{(k+1)} = u_h^{(k)} + v_h$$

Damit ist  $u_h^{(k+1)}$  nach Konstruktion eine gute Näherungslösung für die niedrigen Frequenzen, aber die Grobgitterkorrektur  $v_h$  gibt die hohen Frequenzen, die in der rechten Seite  $f_h$  stehen können, nur ungenau wahr.

- f) Berechne weitere Glättungsschritte, d.h.

$$u_h^{(k+l+1)} = T_\omega u_h^{(k+l)} + M_h^{-1}, \quad l = 1, \dots, m$$

Damit läßt sich das *Zweigitterverfahren* folgendermaßen definieren: Gegeben sei das LGS

$$A_h u_h = f_h, \quad u_h \in \mathbb{R}^{n_h}$$

ein Glätter  $S$  (iteratives Lösungsverfahren), Prolongations- und Restriktionsoperatoren  $P$  und  $R$  sowie ein Grobgitter-LGS der Form

$$A_H u_H = f_H, \quad u_H \in \mathbb{R}^{n_H}, \quad n_H < n_h$$

- a) Bestimme eine Anfangsnäherung  $u_h^{(0)}$  für die Lösung des LGS

$$A_h u_h = f_h$$

- b) Führe für  $n = 1, 2, \dots$  die folgende Iteration durch:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h &= S^{\nu_1}(u_h^{(k-1)}, f_h), \quad \nu_1 \text{ Glättungsschritte} \\ \tilde{d}_h &= R(f_h - A_h \tilde{u}_h) \\ v_h &= P(A_H^{-1} \tilde{d}_h) \\ u_h^{(k)} &= S^{\nu_2}(\tilde{u}_h + v_h), \quad \nu_2 \text{ Glättungsschritte} \end{aligned}$$

**BEMERKUNG 3.4.** *Der Operator  $S$  steht für die Anwendung eines iterativen Lösungsverfahrens, zum Beispiel*

$$\tilde{u}_h = S(u_h, f_h) = T_\omega u_h + \omega M_h^{-1} f_h$$

Im Folgenden untersuchen wir die einzelnen Schritte des Zweigitterverfahrens etwas genauer: Ein wichtiger Schritt im Algorithmus ist die Berechnung der Grobgitterkorrektur  $v_H$ , d.h. die Berechnung der Lösung des LGS

$$A_H u_H = \tilde{d}_h = R\tilde{d}_h$$

Bis jetzt sind wir noch nicht darauf eingegangen, wie die Systemmatrix  $A_H$  auf dem groben Gitter berechnet werden soll, also insbesondere, wie die Matrix mit Hilfe des Ausgangssystems  $A_h u_h = f_h$  bestimmt werden kann.

Prinzipiell existieren hierzu zwei grundlegende Möglichkeiten:

- a) Resultiert die Systemmatrix  $A_h$  aus einer Diskretisierung einer (partiellen) Differentialgleichung, so läßt sich die Grobgitter-Matrix  $A_H$  durch Anwendung des identischen Diskretisierungsverfahrens nun aber auf dem groben Gitter bestimmen.
- b) Die Grobgitter-Matrix  $A_H$  läßt sich auf der Basis der Prolongations- und Restriktionsoperatoren  $P$  und  $R$  berechnen.

DEFINITION 3.5. *Gegeben seien die zur Feingitter-Matrix  $A_h$  gehörenden Prolongations- und Restriktionsoperatoren  $P$  und  $R$ . Dann bezeichnet man die Grobgitter-Matrix  $A_H$  definiert durch*

$$A_H = R A_h P$$

als Galerkin-Approximation von  $A_h$ .

Die Verwendung der Galerkin-Approximation ist natürlich insbesondere beim *algebraischen Mehrgitterverfahren* naheliegend. Dort verwendet man die Zerlegungen

$$A_h = \left( \begin{array}{c|c} A_{CC} & A_{CF} \\ \hline A_{FC} & A_{FF} \end{array} \right), \quad P = \left( \begin{array}{c} I \\ -A_{FF}^{-1} A_{FC} \end{array} \right)$$

und

$$R = (I, -A_{CF} A_{FF}^{-1})$$

Für die Galerkin-Approximation gilt dann offensichtlich

$$A_H = R A_h P$$

BEMERKUNG 3.6. *In vielen Fällen sind die resultierenden Grobgitter-Matrizen nach beiden Methoden identisch.*

Der Kern des Zweigitterverfahrens läßt sich auch als ein neuartiger Präkonditionierer darstellen: Wir nehmen an, dass  $\nu_1 = \nu_2 = 0$  gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h &= u_h^{(k-1)} \\ \tilde{d}_H &= R(f_h - A_h \tilde{u}_h) \\ v_h &= P(A_H^{-1} \tilde{d}_H) \\ u_h^{(k)} &= u_h^{(k-1)} + v_h \end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich damit das folgende iterative Lösungsverfahren

$$\begin{aligned} u_h^{(k)} &= u_h^{(k-1)} + P A_H^{-1} \tilde{d}_H \\ &= u_h^{(k-1)} + P A_H^{-1} R (f_h - A_h u_h^{(k-1)}) \\ &= (I - P A_H^{-1} R A_h) u_h^{(k-1)} + P A_H^{-1} R f_h \end{aligned}$$

Definiert man also den Prädiktionierer  $M_h$  mittels

$$(3.3) \quad M_h^{-1} = P A_H^{-1} R$$

so läßt sich der Kern des Zweigitterverfahrens auch als das folgende präkonditionierte iterative Verfahren formulieren

$$u_h^{(k)} = (I - M_h^{-1} A_h) u_h^{(k-1)} + M_h^{-1} f_h$$

wobei  $M_h^{-1}$  durch (3.3) gegeben ist.

**BEMERKUNG 3.7.** *Mit Hilfe des Zweigitterverfahrens und einer speziellen Nachglättung läßt sich das sogenannte exakte Zweigitterverfahren konstruieren. Wir kombinieren dabei*

- *den Prädiktionierer  $M_h^{-1} = P A_H^{-1} R$*
- *sowie die Galerkin-Approximation (dem Schur-Komplement)  $A_H = R A_h P$*
- *mit dem speziellen Nachglättungsoperator  $I - GA$ , wobei die Matrix  $G$  durch*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{FF}^{-1} \end{pmatrix}$$

*gegeben ist.*

*Ein direktes Nachrechnen ergibt, dass mit der Anwendung der Nachglättung die exakte Lösung des LGS  $A_h u_h = f_h$  bestimmt wird.*

#### 4. Der Mehrgitter-Algorithmus

Das (exakte) Zweigitterverfahren besitzt den entscheidenden Nachteil, dass das Grobgitter-Defektsystem gegeben durch  $A_H v_H = \tilde{d}_H$  exakt gelöst werden muss, ob eine geeignete Grobgitter-Korrektur zu bestimmen. Obwohl die Anzahl der Gitterpunkte gegenüber dem Ausgangssystem  $A_h u_h = f_h$  deutlich reduziert ist, ist die exakte Berechnung der Grobgitter-Korrektur weiter sehr rechenintensiv und damit das gesamte Zweigitterverfahren für praktische Anwendungen weniger geeignet.

Ein Ausweg ist die Verwendung einer Hierarchie von Gittern, sodass die direkte Lösung eines Grobgitter-Defektsystem auf dem größten Gitter vom Aufwand her vertretbar wird. Dies liefert der nachfolgend diskutierte *Mehrgitter-Algorithmus*.

Wir definieren dazu zunächst eine Hierarchie von Gittern gegeben durch

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subseteq \dots \subset \Omega_{l_{max}}$$

wobei  $\Omega_{l_{max}}$  das feinste (Ausgangs-)Gitter bezeichne. Desweiteren seien die folgenden Prolongations- und Restriktionsoperatoren zum Übergang zwischen zwei benachbarten Gittern gegeben:

$$\tilde{u}_h = P_{l,l-1} u_h, \quad u_h \in \mathbb{R}^{n_{l-1}}, \quad \tilde{u}_h \in \mathbb{R}^{n_l}$$

und

$$\tilde{u}_h = R_{l-1,l} u_h, \quad u_h \in \mathbb{R}^{n_l}, \quad \tilde{u}_h \in \mathbb{R}^{n_{l-1}},$$

wobei  $n_l$  und  $n_{l-1}$  die Größe der Gitter  $\Omega_l$  und  $\Omega_{l-1}$  bezeichnet. Schließlich bezeichnen wir im Folgenden mit  $A_l$  die Systemmatrizen und mit  $S_l$  die Glättungsverfahren auf den

Gittern  $\Omega_l$  mit  $l = 0, \dots, l_{max}$ .

Gelöst werden soll das LGS

$$(3.4) \quad A_h u_h = f_h,$$

wobei  $h$  die Gitterweite des feinsten Gitters  $\Omega_{l_{max}}$  bezeichnet, was wir im Folgenden auch in der Form

$$A_{l_{max}} u_{l_{max}} = f_{l_{max}}$$

schreiben können.

Die Idee des Mehrgitter-Algorithmus läßt sich dann einfach beschreiben: Wir ersetzen das Defektsystem des Zweigitterverfahrens in der Form  $A_H v_H = \tilde{d}_H$ , das in der Mehrgitter-Notation dem LGS

$$A_{l_{max}-1} u_{l_{max}-1} = \tilde{d}_{l_{max}-1}$$

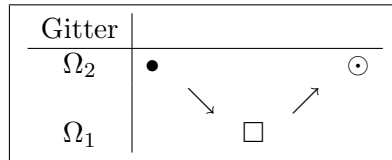
entspricht, durch die entsprechende  $\gamma$ -malige Anwendung der Zweigitter-Iteration auf den größeren Gittern  $\Omega_l$  und dies für  $l \leq l_{max} - 1$ .

Wir wollen uns die Vorgehensweise an einem einfachen Beispielen klarmachen: Wir nehmen an, dass wir mit drei unterschiedlichen Gittern arbeiten, die die Gitterweiten  $h, 2h$  und  $4h$  verwenden.

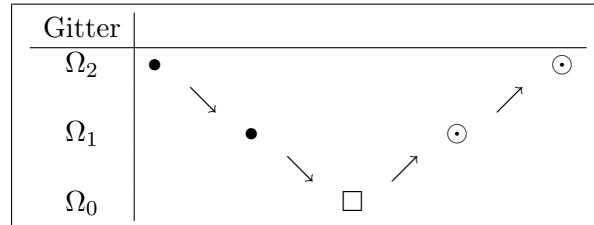
Dies bedeutet  $l_{max} = 2$  und das zugehörige Mehrgitterverfahren (MGM) läßt sich im Vergleich zum Zweigitterverfahren (TGM) wie folgt darstellen, wobei wir bei der Darstellung die folgenden Noationen verwendet haben:

- $\nu_1$ -malige der Vorglättung und Defektberechnung
- ◉ Grobgitterkorrektur und  $\nu_2$ -malige Nachglättung
- ⊙ Grobgitterkorrektur,  $\nu_2$ -malige Nachglättung,  $\nu_1$ -malige Vorglättung und Defektberechnung
- Berechnung der exakten Lösung
- ↘ Restriktion
- ↗ Prolongation

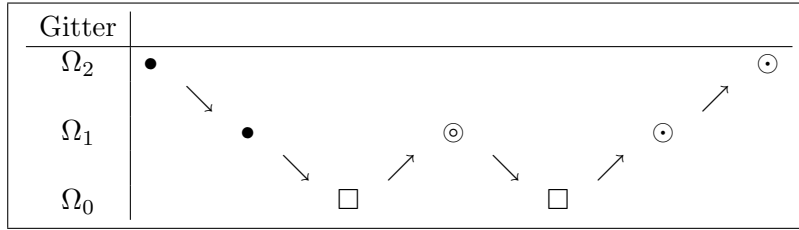
### Graphische Darstellung des TGM



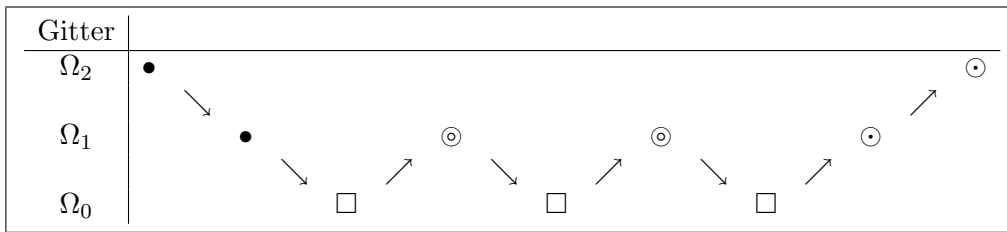
### Graphische Darstellung des MGM für $\gamma = 1$



**Graphische Darstellung des MGM für  $\gamma = 2$**



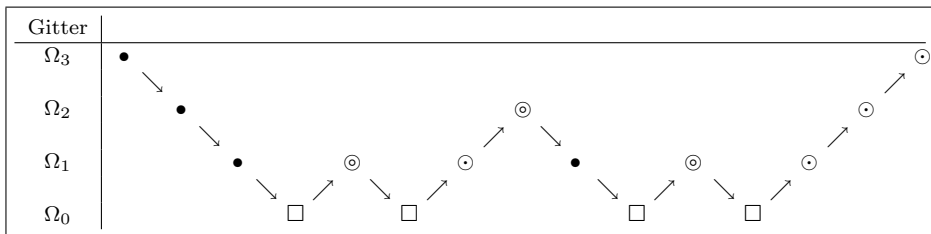
**Graphische Darstellung des MGM für  $\gamma = 3$**



Ausgehend von der graphischen Darstellung des Mehrgitter-Algorithmus für verschiedene Werte von  $\gamma$  bezeichnet man den Mehrgitter-Algorithmus für  $\gamma = 1$  als den sogenannten *V-Zykel* und entsprechend für  $\gamma = 2$  als *W-Zykel*.

**BEMERKUNG 3.8.** Um das Defektsystem auf dem Gitter  $\Omega_1$  iterativ mittels des Mehrgitter-Algorithmus zu starten, setzt man gewöhnlich als Startvektor des (iterativen) Verfahrens die Nulllösung.

**BEISPIEL 3.9. Graphische Darstellung des MGM für  $l_{max} = 3$  und  $\gamma = 3$**



Wir geben nun eine *rekursive Definition* des MGM-Algorithmus, wobei von den nachfolgenden Bestandteilen des Verfahrens ausgehen: Gegeben sei eine Hierarchie von Gittern  $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_{l_{max}}$  sowie die Gittertransfer-Operatoren  $P_{l,l-1}$  und  $R_{l,l-1}$  für  $l = 1, \dots, l_{max}$ . Desweiteren seien die Systemmatrizen  $A_l$  und die Glätter  $S_l$ ,  $l = 1, \dots, l_{max}$  auf den verschiedenen Gittern gegeben.

Wir definieren die MGM-Iteration

$$u_h^{(k+1)} = \text{MGM}(u_h^{(k)}, fh, l_{max})$$

wobei der Index  $h$  für das LGS auf dem feinsten Gitter steht, folgendermaßen:

**MGM** ( $u_l, f_l, l$ )

$$\begin{aligned}
 & \{ \\
 & \quad \text{if } (l = 0) \quad u_l = A_l^{-1} f_l; & (*)_0 \\
 & \quad \text{else} \\
 & \quad \{ \\
 & \quad \quad u_l = S^{\nu_1}(u_l, f_l); & (*)_1 \\
 & \quad \quad d_{l-1} = R_{l-1,l}(f_l) - A_l u_l; & (*)_2 \\
 & \quad \quad v_{l-1} = 0; & (*)_3 \\
 & \quad \quad \text{for } (j = 0; j < \gamma; j = j + 1) \quad \mathbf{MGM}(v_{l-1}, d_{l-1}, l - 1); & (*)_4 \\
 & \quad \quad u_l = u_l + P_{l,l-1} v_{l-1}; & (*)_5 \\
 & \quad \quad u_l = S^{\nu_2}(u_l, f_l); & (*)_6 \\
 & \quad \} \\
 & \}
 \end{aligned}$$

Dabei haben die einzelnen Schritte der MGM-Prozedur die folgende Bedeutung:

*Schritt*  $(*)_0$ : Haben wir das größte Gitter  $\Omega_0$  erreicht, so lösen wir das System

$$A_0 u_0 = f_0$$

exakt.

*Schritt*  $(*)_1$ : Führe  $\nu_1$  Vorglättungsschritte auf dem  $l$ -ten Gitterstufe durch, d.h. wir wenden  $\nu_1$ -mal auf das System  $A_l u_l = f_l$  ein iteratives Verfahren an.

*Schritt*  $(*)_2$ : Wir berechnen den Defekt aus Schritt  $(*)_1$  und restringieren den Defekt auf das nächst gröbere Gitter mit Index  $l - 1$ .

*Schritt*  $(*)_3$ : Wir setzen für das System  $A_{l-1} v_{l-1} = d_{l-1}$  den Startwert  $v_{l-1} =$ .

*Schritt*  $(*)_4$ : Wende die MGM-Prozedur  $\gamma$ -mal auf das System

$$A_{l-1} v_{l-1} = d_{l-1}$$

auf der Stufe  $l - 1$  an.<sup>1</sup> Dieser Schritt beinhaltet die rekursive Definition der MGM-Prozedur.

*Schritt*  $(*)_5$ : Prolongiere die Korrektur aus Schritt  $(*)_4$  vom Gitter  $\Omega_{l-1}$  auf das Gitter  $\Omega_l$  und addiere die Korrektur auf den aktuellen Wert  $u_l$  auf dem Gitter  $\Omega_l$ .

*Schritt*  $(*)_6$ : Führe  $\nu_2$  Nachglättungsschritte für das System

$$A_l u_l = f_l$$

auf dem Gitter  $\Omega_l$  durch.

Am Ende der MGM-Prozedur wird der aktuelle Werte aus Schritt  $(*)_6$  zurückgegeben

$$u_l = \mathbf{MGM}(u_l, f_l, l)$$

**DEFINITION 3.10.** *Der oben definierte Mehrgitteralgorithmus heißt*

$$V(\nu_1, \nu_2) - \text{Zykel}, \quad \text{if } \gamma = 1$$

<sup>1</sup>Beachte, dass für  $l = 1$  und  $\gamma > 1$  die FOR-Schleife nur einmal durchlaufen wird

bzw.

$$V(\nu_1, \nu_2) - \text{Zykel}, \quad \text{if } \gamma = 2$$

BEISPIEL 3.11. Als Beispiel reproduzieren wir den oben angegebenen Fall mit  $l_{max} = 3$  und  $\gamma = 2$  ( $W$ -Zykel):

$$u_h^{(k+1)} = \text{MGM}(u_h^{(k)}, f_h, l_{max})$$

Damit ergeben sich konkret die folgenden Schritte

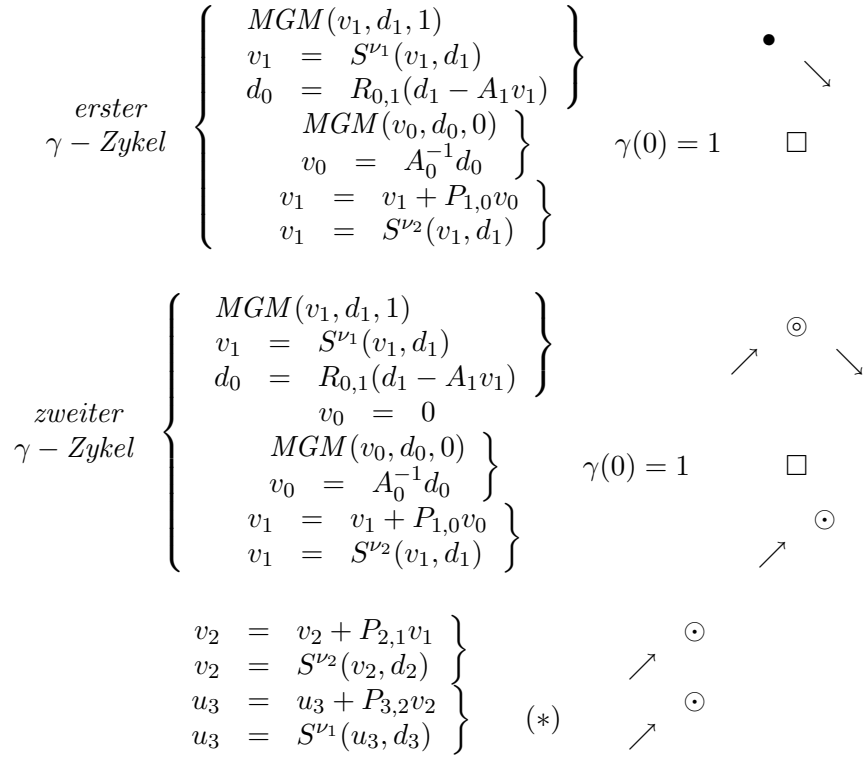
$$\left. \begin{array}{l} u_3 = S^{\nu_1}(u_3, f_3) \\ \quad = S^{\nu_1}(u_h^k, f_h) \\ d_2 = R_{2,3}(f_3 - A_3 u_3) \\ v_2 = 0 \end{array} \right\} \Omega_3 : h \quad \bullet \quad \searrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{MGM}(v_2, d_2, 2) \\ v_2 = S^{\nu_1}(v_2, d_2) \\ d_1 = R_{1,2}(d_2 - A_2 v_2) \\ v_1 = 0 \end{array} \right\} \Omega_2 : 2h \quad \bullet \quad \searrow$$

$$\text{erster } \gamma - \text{Zykel} \left\{ \begin{array}{l} \text{MGM}(v_1, d_1, 1) \\ v_1 = S^{\nu_1}(v_1, d_1) \\ d_0 = R_{0,1}(d_1 - A_1 v_1) \\ v_0 = 0 \\ \text{MGM}(v_0, d_0, 0) \\ v_0 = A_0^{-1} d_0 \\ v_1 = v_1 + P_{1,0} v_0 \\ v_1 = S^{\nu_2}(v_1, d_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Omega_1 : 4h \quad \bullet \quad \searrow \\ \gamma(0) = 1 \quad \square \end{array}$$

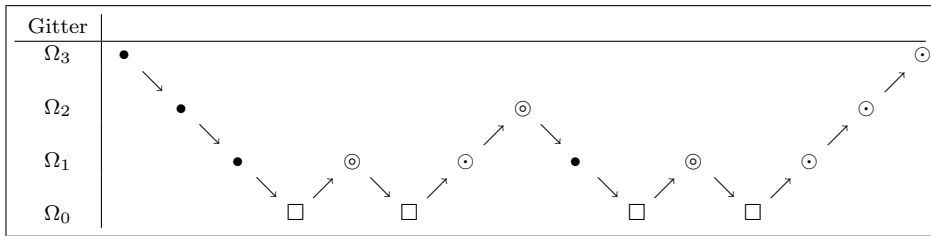
$$\text{zweiter } \gamma - \text{Zykel} \left\{ \begin{array}{l} \text{MGM}(v_1, d_1, 1) \\ v_1 = S^{\nu_1}(v_1, d_1) \\ d_0 = R_{0,1}(d_1 - A_1 v_1) \\ v_0 = 0 \\ \text{MGM}(v_0, d_0, 0) \\ v_0 = A_0^{-1} d_0 \\ v_1 = v_1 + P_{1,0} v_0 \\ v_1 = S^{\nu_2}(v_1, d_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gamma(0) = 1 \\ \begin{array}{c} \circledast \\ \nearrow \quad \searrow \\ \square \\ \nearrow \quad \circledast \end{array} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_2 = v_2 + P_{2,1} v_1 \\ v_2 = S^{\nu_2}(v_2, d_2) \\ \text{MGM}(v_2, d_2, 2) \\ v_2 = S^{\nu_1}(v_2, d_2) \\ d_1 = R_{1,2}(d_2 - A_2 v_2) \\ v_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \circledast \\ \nearrow \quad \searrow \end{array}$$



Danach kehrt man aus  $\text{MGM}(u_h^{(k), f_h, 3})$  mit dem durch (\*) definierten Wert  $u_h^{(k+1)} = u_3$  zurück. Der Übersichtlichkeit wegen ist noch einmal die graphische Darstellung angegeben.

**Graphische Darstellung des MGM für  $l_{max} = 3$  und  $\gamma = 3$**



Wir kommen zu einigen abschließenden Bemerkungen zum Mehrgitter-Algorithmus. Zunächst hängt das Verfahren entscheidend von den folgenden Bestandteilen ab:

- $R_{l,-1}$  den Prolongationsoperatoren
- $R_{l,-1}$  den Restriktionsoperatoren
- $S_l$  den Glätttern
- $A_l$  den Systemmatrizen, e.g.
  - $A_{l-1} = R_{l,l-1} A_l P_{l,l-1}$
  - beim Galerkin-Ansatz



sowie den Parametern

$\nu_1$	Anzahl der Vorglättungsschritte
$\nu_2$	Anzahl der Nachglättungsschritte
$\gamma$	Anzahl der Zweigitter-Iterationen

Einige in praktischen Anwendungen typische Werte für  $\nu_1$  und  $\nu_2$  sind

$$\begin{aligned}\nu_1 &= 1, 2, 3, \text{ or } 4 \\ \nu_2 &= 0, 1, 2, 3, \text{ or } 4\end{aligned}$$

mit den Standardwerten  $\nu_1 = 2$  and  $\nu_2 = 1$ .

Diese Parameter kann auch mit den Gitterstufen variieren, d.h.

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \nu_1(l) \\ \nu_2 &= \nu_2(l) \\ \gamma &= \gamma(l)\end{aligned}$$

wobei stets  $\gamma(0) = 1$  gilt, da wir dann das größte Gitter erreicht haben.

Im sogenannten *verallgemeinerten V-Zykel* wählt man zum Beispiel die Anzahl der Glättungsschritte folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned}\nu_1(l) &= 2\nu_1(l+1) \\ \nu_2(l) &= 2\nu_2(l+1)\end{aligned} \right\} \quad l = 1, \dots, l_{max} - 1$$

Wie bei anderen iterativen Verfahren beendet man die MGM-Prozedur

$$u_h^{(k+1)} = MGM(u_h^{(k)}, f_h, l_{max})$$

sobald eine *gewünschte Genauigkeit* erreicht ist. Zum Beispiel testet man das Defektsystem auf die Bedingung

$$\|f_h - A_h u_h^{(k)}\| \leq \|f_h - A_h u_h^{(0)}\|$$

wobei die Anzahl der Iterationen durch  $k_{max}^\varepsilon = O(\ln \varepsilon^{-1})$  gegeben ist.

Eine Variante des Mehrgitter-Algorithmus ist das sogenannte *volle Mehrgitterverfahren* (*full multigrid method, FMGM*). Die Idee ist dabei eine geeignete Startlösung  $u_h^{(0)}$  auf dem feinsten Gitter dadurch zu berechnen, dass man ausgehend von der exakten Lösung auf dem grobsten Gitter  $\Omega_0$  mit Hilfe des Mehrgitter-Algorithmus und dem Übergang auf die feineren Gitter eine effizient zu berechnende Näherungslösung erhält. Der zugehörige *FMGM*-Algorithmus läßt sich dann in der Form

$$\begin{aligned}u_0 &= A_0^{-1} f_0 \\ \text{for } &(l = 1; l < l_{max} + 1; l = l + 1) \\ &\{ \\ & \quad u_l = P_{l,l-1} u_{l,l-1}, \\ & \quad \text{for } (k = 1; k < k_l + 1; l = l + 1) \quad MGM(u_l, f_l, l) \\ & \}\end{aligned}$$

angeben.