KAPITEL 2

Mathematische Methoden der Modellbildung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einigen grundlegenden mathematischen Konzepten, die bei der Modellbildung häufig zum Einsatz kommen. Da beim Aufstellen eines Modells aber eigentlich alle bekannten mathematischen Theorien verwendet werden können und auch verwendet werden, können wir nur eine gewisse Auswahl treffen, die aus unserer Sicht für einen Einstieg in die Thematik unerläßlich sind.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1. Grundlegende Begriffe und Beispiele. In diesem Abschnitt stellen wir die grundlegenden Definition zu gewöhnlichen Differentialgleichungen vor und geben jeweils Beispiele für Gleichungen, die in der mathematischen Modellbildung bei verschiedenen Problemstellungen verwendet werden.

Definition 2.1. *Sei G eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und*

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung. *Eine Lösung von (2.1) ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.*

a) *Der Graph von φ ist in G enthalten, d.h.*

$$\Gamma_\varphi = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = \varphi(x)\} \subset G$$

b) *Für alle $x \in I$ gilt*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

Beispiel 2.2. Das am Ende von Kapitel 1 diskutierte Modell für eine Abmagerungskur besteht aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Wir haben dort insbesondere das zugehörige *Anfangswertproblem*

$$y' = f(x,y), \qquad y(0) = y_0 > 0$$

auf sein qualitatives Lösungsverhalten hin untersucht.

Aufgrund unserer Modellannahmen hatten wir eine Differentialgleichung abgeleitet, deren rechte Seite nicht explizit von der Zeit abhängt. Solche Gleichungen nennt man *autonom.*

Definition 2.3. *Eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form*

$$y' = f(y),$$

bei der die rechte Seite nicht explizit von x abhängt, heißt autonome Differentialgleichung erster Ordnung.

Um Hinweise über das qualitative Lösungsverhalten zu gewinnen, ist es häufig hilfreich sich folgender *geometrischer Intepretation* von Differentialgleichungen zu bedienen: ist eine Differentialgleichung der Form $y' = f(x, y)$ vorgegeben, so bedeutet dies auch, dass in jedem Punkt $(x, y) \in G$ eine Steigung vorgegeben ist. Diese vorgegebenen Steigungen definieren ein *Richtungsfeld* und eine Lösung der Differentialgleichung ist also eine Funktion, deren Graph in jedem Punkt die vorgegebene Steigung besitzt.
Bei Differentialgleichungen erster Ordnung können natürlich auch vektorwertige Funktionen auftreten.

Definition 2.4. *Sei G eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und*

$$\begin{array}{rcl} f : G & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(x, y)$$

ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung. *Eine Lösung ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.*

a) *Der Graph von φ ist in G enthalten.*
b) *Für alle $x \in I$ gilt*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

Setzen wir

$$\begin{array}{rcl} y & = & (y_1, \ldots, y_n)^T \\ f & = & (f_1, \ldots, f_n)^T \end{array}$$

so lautet ein System von n Gleichungen in ausgeschriebener Form

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

Beispiel 2.5. Typische Beispiele für Systeme von Differentialgleichungen sind die in der theoretischen Ökologie zur Anwendung kommenden *Räuber–Beute Modelle*: man betrachtet dabei die zeitliche Entwicklung der Population von zwei Spezies, bei denen eine der Spezies die Hauptnahrungsquelle der anderen ist, selbst aber über beliebig große Nahrungsresourcen verfügt.
Bezeichnen $r(t)$ und $b(t)$ die beiden Populationen zur Zeit t und gehen wir davon aus, dass

die Räuber die Beute *nicht* jagen, so ist ein einfaches Modell durch die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= \lambda b \\ \frac{dr}{dt} &= -\mu r \end{aligned}$$

gegeben. Das Modell besagt, dass die Population der Beutetiere abhängig vom Parameter $\lambda > 0$ exponentiell wächst; die Population der Räuber dagegen exponentiell mit $\mu > 0$ fällt.
Wird die Beute vom Räuber gejagt, so muss die Wachstumsrate λ in Abhängigkeit von der Räuberpopulation vermindert werden und entsprechend ein Wachstumsverhalten bei der Räuberpopulation berücksichtigt werden. Nehmen wir an, dass die jeweiligen Raten proportional zur Population der jeweils anderen Spezies ist, so erhalten wir das Modell

$$\frac{db}{dt} = (\lambda - \gamma r)b \tag{2.2}$$

$$\frac{dr}{dt} = (-\mu + \delta b)r \tag{2.3}$$

mit $\gamma, \delta > 0$.
Das System (2.2), (2.3) wird in der Literatur auch als *Lotka–Volterra–Modell* bezeichnet, da es unabhängig voneinander erstmalig von Lotka (1925)[1] und Volterra (1931)[2] aufgestellt wurde.

Neben Differentialgleichungen erster Ordnung und Systemen erster Ordnung treten bei der mathematischen Modellbildung auch Differentialgleichungen höherer Ordnung auf.

Definition 2.6. *Sei G eine Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine Differentialgleichung n–ter Ordnung.
Eine Lösung ist eine auf einem Intervall I definierte n–mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *Die Menge*

$$\{(x, y_o, \dots, y_{n-1} \in I \times \mathbb{R}^n \mid y_k := \varphi^{(k)}(x),\ 0 \leq k \leq n-1\}$$

ist in G enthalten.

b) *Für alle $x \in I$ gilt:*

$$\varphi^{(n)} = f(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$$

Beispiel 2.7. Der harmonische Oszillator ist der Prototyp einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und folgt aus dem zweiten Newtonschen Gesetz

[1] Alfred James Lotka, österreichisch–US–amerikanischer Mathematiker, Chemiker, Ökologe und Demograph, geb. 2. März 1880 in Lemberg, gest. 5. Dezember 1949 in New York

[2] Vito Volterra, italienischer Mathematiker und Physiker, geb. 3. Mai 1860 in Ancona, gest. 11. Oktober 1940 in Rom

Kraft = *Masse* × *Beschleunigung*.

Ein einfaches mechanisches Beispiel für einen harmonischen Oszillator ist eine Masse, die an einer Feder befestigt ist und in horizontaler oder vertikaler Lage um eine Ruhelage schwingt, das sogenannte *Federpendel*. Ein *Fadenpendel* kann bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage zumindest näherungsweise durch einen harmonischen Oszillator modelliert werden. Nach dem Hook'schen Gesetz ist bei einem Federpendel die Federkraft, die die Masse zurück in die Ruhelage treibt, proportional zur Auslenkung. Bewegt sich die Masse reibungsfrei, so ist die Federkraft die einzige an der Masse wirkende Rückstellkraft und wir erhalten die Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$m\ddot{x} = -kx$$

Hier bezeichnet $m > 0$ die Masse und $k > 0$ die Federkonstante. Setzen wir zusätzlich

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

so ergibt sich das Modell des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen n–ter Ordnung lassen sich stets als Systeme von n Gleichungen erster Ordnung schreiben: sei

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.4}$$

eine Gleichung der Ordnung n.
Wir betrachten nun ein System erster Ordnung der Form

$$Y' = F(x, Y) \tag{2.5}$$

mit

$$Y = (y_0, \ldots, y_{n-1})^T$$

und

$$F(x, Y) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, f(x, Y))^T$$

Komponentenweise ausgeschrieben lautet das System dann

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ y_{n-1}' &= f(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Man zeigt nun leicht, dass aus einer Lösung $\varphi(x)$ der Gleichung (2.4) mit Hilfe der Beziehungen

$$y_k = \varphi^{(k)}(x), \ 0 \le k \le n-1$$

eine Lösung des Systems (2.5) konstruiert werden kann und umgekehrt.

Beispiel 2.8. Die Gleichung des harmonischen Oszillators $x^{(2)} + \omega^2 x = 0$ läßt sich als ein lineares System mit konstanten Koeffizienten schreiben:

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= -\omega^2 y_0 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix A ist dann

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

und besitzt die beiden zueinander komplex konjugierten Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \pm iw$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_{1/2} = \begin{pmatrix} \mp i \\ \omega \end{pmatrix}$$

und damit läßt sich ein *komplexes* Fundamentalsystem angeben:

$$F(t) = \left(e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2 \right)$$

Die allgemeine komplexwertige Lösung ist dann gegeben durch

$$Y(t) = F(t) \cdot c$$

mit dem konstantem Vektor $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{C}^2$. Reellwertige Lösungen erhält man, wenn man aus der komplexen Fundamentalmatrix ein reelles System generiert:

$$\hat{F}(t) = \left(\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t} v_1), \mathrm{Im}(e^{\lambda_2 t} v_2) \right)$$

Da die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ und Eigenvektoren $v_{1/2}$ komplex konjugiert zueinander sind, gilt auch

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t} v_1) &= \frac{1}{2} \left(e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2 \right) \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t} v_1) &= \frac{1}{2} \left(e^{\lambda_1 t} v_1 - e^{\lambda_2 t} v_2 \right) \end{aligned}$$

Mit

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

erhält man schließlich das reelle Fundamentalsystem und die allgemeine reelle Lösung lautet

$$\hat{F}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & -\cos(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) & \omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Existenz– und Eindeutigkeitssätze bei Anfangswertproblemen, Abhängigkeit von Parametern. In diesem Abschnitt formulieren wir die grundlegenden theoretischen Aussagen zu Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, also Problemen der Form

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Hierbei sei $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, eine stetige Funktion und es gelte $(x_0, y_0) \in G$. Bei Anfangswertproblemen interessieren die folgenden Fragen:

- Existiert eine Lösung $y(x)$ in einer Umgebung des Anfangspunktes x_0?
- Falls eine Lösung existiert: ist die Lösung eindeutig bestimmt?
- Wie weit läßt sich eine solche Lösung fortsetzen?
- Wie verändert sich die Lösung bei kleinen Störungen der Anfangsdaten (x_0, y_0) oder der rechten Seite $f(x,y)$?

In der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt es zwei klassische Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bei Anfangswertproblemen erster Ordnung:

1) Der Existenzsatz von Peano (1890) besagt, dass ein Anfangswertproblem eine lokal um den Startpunkt x_0 definierte Lösung besitzt, sofern die rechte Seite der Differentialgleichung stetig ist.
2) Genügt die rechte Seite zudem lokal einer Lipschitz–Bedingung [3], so erhält man aus dem Satz von Picard–Lindelöf (1890/94) die Existenz *und* Eindeutigkeit einer lokalen Lösung.

Beispiel 2.9. Für das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & y^{2/3} \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

kann man direkt unendlich viele Lösungen angeben. Man sieht leicht, dass aufgrund der Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$ die Nulllösung eine Lösung ist. Eine andere Lösung lautet

$$\Psi_{x_0}(x) = \frac{1}{27}(x - x_0)^3$$

was man durch Einsetzen verifiziert. Auf Basis dieser Lösung lassen sich beliebig andere Lösungen kombinieren: für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_0 < x_2$ ist die Funktion

$$\Psi(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} \Psi_{x_1}(x) & : & x \leq x_1 \\ 0 & : & x_1 < x_0 < x_2 \\ \Psi_{x_2}(x) & : & x \geq x_2 \end{array} \right.$$

ebenfalls eine Lösung.

Der Grund weshalb das Anfangswertproblem aus dem letzten Beispiel keine eindeutige Lösung besitzt ist, dass die rechte Seite $f(y) = y^{2/3}$ in einer Umgebung von $y_0 = 0$ keiner Lipschitz–Bedingung genügt.

[3] Siehe dazu Definition 2.11

SATZ 2.10. *(Existenzsatz von Peano)*
Ist $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, eine stetige Funktion und gilt $(x_0, y_0) \in G$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass die Gleichung $y' = f(x, y)$ im Intervall $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ eine Lösung besitzt.

Wir wollen den Satz von Peano hier nicht beweisen – einen Beweis findet man etwa in dem Textbuch *Gewöhnliche Differentialgleichungen* von Wolfgang Walter. Man sollte aber erwähnen, dass man einen konstruktiven Beweis mit Hilfe des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* angeben kann: ausgehend vom Punkt $(x_0, y_0) \in G$ berechnet man die Ecken des Polygonzuges gemäß der Rekursion:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i \\ y_{i+1} &= y_i + h_i f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Danach zeigt man, dass jede Folge von Polygonzügen, für die die (maximale) Schrittweite h_i gegen Null konvergiert, eine Teilfolge besitzt, die gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.
Wir kommen nun zum Satz von Picard–Lindelöf.

DEFINITION 2.11. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Man sagt, f genüge in G einer* Lipschitz–Bedingung *mit der Lipschitz–Konstanten $L \geq 0$, wenn für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in G$ gilt*

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

Die Funktion f erfüllt in G lokal eine Lipschitz–Bedingung, falls jeder Punkt (x, y) eine Umgebung U besitzt, sodass f in $G \cap U$ einer Lipschitz–Bedingung mit einer gewissen Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ genügt.

BEMERKUNG 2.12. *Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und f eine auf G bzgl. der Variablen $(y_1, \ldots, y_n)$ stetig partiell differenzierbare Funktion, so genügt f in G lokal einer Lipschitz–Bedingung.*

SATZ 2.13. *(Eindeutigkeit von Lösungen)*
Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz–Bedingung genügt. Sind φ, ψ zwei auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und gilt

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \quad \textit{für ein } x_0 \in I$$

so folgt bereits

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \textit{für alle } x \in I$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass sich die Gleichheit $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ stets auf eine ε–Umgebung um den Punkt x_0 fortsetzen läßt, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{für alle } |x - x_0| \leq \varepsilon$$

Da die beiden Funktionen φ, ψ Lösungen der Differentialgleichung sind, folgt mit $\varphi(x_0) = \psi(x_0) =: y_0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt \\ \psi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\,dt\end{aligned}$$

Eine Substraktion beider Gleichungen ergibt

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \Big)\,dt \tag{2.7}$$

Da die Funktion f lokal einer Lipschitz–Bedingung genügt, gibt es zwei Konstanten $L \geq 0$, $\delta \geq 0$, sodass für alle $t \in I$ mit $|t - x_0| \leq \delta$ gilt

$$\|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\|$$

Daraus folgt aus (2.7) für $|x - x_0| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \|\varphi(t) - \psi(t)\|\,dt \right|$$

Sei nun

$$M(x) := \sup\{\|\varphi(t) - \psi(t)\| \ : \ |t - x_0| \leq |x - x_0|\}$$

Dann gilt für alle $\xi \in I$ mit $|\xi - x_0| \leq |x - x_0| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\|\varphi(\xi) - \psi(\xi)\| \leq L|\xi - x_0|M(\xi) \leq L|x - x_0|M(x)$$

Daraus ergibt sich aber

$$M(x) \leq L|x - x_0|M(x)$$

Wählen wir nun $\varepsilon := \min(\delta, \frac{1}{2}L)$, so folgt für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ die Beziehung

$$M(x) \leq \frac{1}{2}M(x)$$

also $M(x) = 0$. Dies bedeutet, dass die beiden Funktionen φ, ψ für $|x - x_0| \leq \varepsilon$ identisch sind.

Wir zeigen nun, dass die Gleichheit von φ und ψ auch für alle $x \in I$ mit $x \geq x_0$ gilt. Dazu sei

$$x_1 := \sup\{\, \xi \in I \ : \ \varphi\Big|_{[x_0,\xi]} = \psi\Big|_{[x_0,\xi]} \,\}$$

Falls $x_1 = \infty$ oder x_1 gleich dem rechten Intervallende von I ist, sind wir fertig. Anderenfalls gibt es ein $\delta > 0$, sodass $[x_1, x_1 + \delta] \subset I$. Da φ und ψ stetig sind, gilt $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$. Nach unserem ersten Schritt existiert dann ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_1| \leq \varepsilon$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von x_1 und es gilt daher $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq x_0$. Analog zeigt man die Gleichheit von φ und ψ für alle $x \in I$ mit $x \leq x_0$. □

SATZ 2.14. *(Satz von Picard–Lindelöf)*
Ist $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz–Bedingung genügt, so gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine auf dem Intervall $|x - x_0| \leq \varepsilon$ definierte Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ genügt.

BEWEIS. Da $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen ist, gibt es ein $r > 0$, sodass die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ : \ |x - x_0| \leq r, \ \|y - y_0\| \leq r\}$$

in G enthalten ist und gleichzeitig f in V einer Lipschitz–Bedingung mit einer Konstanten L genügt.
Da V eine kompakte Menge ist und f eine stetige Funktion, gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\|f(x, y)\| \leq M \quad \text{für alle } (x, y) \in V$$

Wir setzen daher $\varepsilon := \min(r, r/M)$ und $I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.
Aus dem Fundamentalsatz der Differential– und Integralrechnung folgt, dass eine stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ist, wenn gilt

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \tag{2.8}$$

Um die Integralgleichung (2.8) zu lösen, benutzen wir das sogenannte *Picard–Lindelöfsche Iterationsverfahren* (oder die *Methode der sukzessiven Iteration*): wir definieren Funktionen $\varphi_k : I \to \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, durch

$$\varphi_0(x) = y_0 \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\, dt \tag{2.9}$$

Es gilt nun zu zeigen, dass die durch (2.9) definierte Funktionenfolge (φ_k) wohldefiniert ist und gleichmäßig gegen eine Lösung φ von (2.8) konvergiert.
Um zu sehen, dass die rechte Seite von (2.9) wohldefiniert ist, genügt zu zeigen, dass

$$\|\varphi_k(x) - y_0\| \leq r \quad \text{für alle } x \in I,\ k \in \mathbb{N}$$

und man führt den Beweis durch Induktion. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Ist sie für k schon bewiesen, so folgt

$$\|\varphi_{k+1}(x) - y_0\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f(t, \varphi_k(t))\|\, dt \right| \leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \varepsilon \leq r$$

Wir zeigen jetzt, ebenfalls durch Induktion, dass

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \le ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für alle } x \in I. \tag{2.10}$$

Induktionsanfang $k = 0$:

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\, dt \right\| \le M \cdot |x - x_0|$$

Induktionsschritt $k - 1 \to k$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} \Big[f(t, \varphi_k(t)) - f(t, \varphi_{k-1}(t)) \Big]\, dt \right\| \\
&\le L \cdot \left| \int_{x_0}^{x} \|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\|\, dt \right| \\
&\le \frac{M \cdot L^k}{k!} \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^k\, dt \right| = M \cdot L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Aus der Abschätzung (2.10) können wir schließen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k-1})$$

auf dem Intervall I die konvergente Majorante

$$M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{k-1} \varepsilon^k}{k!}$$

besitzt und deswegen gleichmäßig konvergiert.
Deshalb ist der Grenzwert

$$\varphi := \lim_{k \to \infty} \varphi_k = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k-1})$$

eine stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. Weiter gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in I$

$$\|f(x, \varphi(x)) - f(x, \varphi_k(x))\| \le L \|\varphi(x) - \varphi_k(x)\|$$

Die Folge $(f(x, \varphi_k(x)))$ konvergiert deshalb gleichmäßig gegen $f(x, \varphi(x))$ und man kann in (2.9) unter dem Integral zum Grenzwert übergehen. Dadurch erhält man (2.8) und gleichzeitig eine Lösung des Anfangswertproblems. $\square$

In manchen Fällen kann man das Picard–Lindelöfsche Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= y_0 \\ \varphi_{k+1}(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\, dt \end{aligned}$$

auch dazu verwenden, explizite Lösungen zu berechnen.

Beispiel 2.15. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& 2xy \\ y(0) &=& y_0 \end{array} \right.$$

Mit $\varphi_0(x) = y_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= y_0 + 2y_0 \int\limits_0^x t\, dt = y_0(1 + x^2) \\ \varphi_2(x) &= y_0 + 2y_0 \int\limits_0^x t(1+t^2)\, dt = y_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right) \end{aligned}$$

Durch Induktion beweist man die Formel

$$\varphi_k(x) = y_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} \right)$$

Daraus folgt

$$\varphi(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = y_0 e^{x^2}$$

Jede durch die beiden Sätze 2.10 und 2.14 beschriebene Lösung eines Anfangswertproblems läßt sich auf ein maximales Existenzintervall $-\infty \leq x_{\min} < x < x_{\max} \leq \infty$ fortsetzen. Der Graph $(x, \varphi(x))$ der Lösung kommt dabei für $x \to x_{\min}$ bzw. $x \to x_{\max}$ dem Rand von G beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von $(x, \varphi(x))$ für $x \to x_{\min}$ oder $x \to x_{\max}$ liegt auf dem Rand ∂G.
Weiter läßt sich der Satz von Picard–Lindelöf folgendermaßen modifizieren: genügt die rechte Seite $f(x, y)$ auf $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitz–Bedingung, so besitzt das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& f(x, y) \\ y(x_0) &=& y_0 \end{array} \right.$$

mit $x_0 \in [a, b]$ eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $[a, b]$ definiert ist. Man spricht dann von *globaler Existenz.*

Beispiel 2.16. Ein lineares Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= A(x)y + h(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt ist.

Zur Untersuchung des qualitativen Lösungsverhaltens ist es oft hilfreich obere und untere Schranken für Lösungen zu bestimmen. Man spricht dann von einer *Einschließung durch Ober– und Unterlösungen*. Als Vorbereitung auf die Definition von Ober– und Unterlösungen starten wir mit folgender Beobachtung.

Lemma 2.17. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $[x_0, b)$, $b \leq \infty$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen, die im Inneren von I differenzierbar sind. Ist $f(x_0) < g(x_0)$ so gilt entweder*

$$f(x) < g(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

oder es existiert ein $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = g(x_1)$ und $f'(x_1) \geq g(x_1)$.

Beweis. Seien f, g zwei differenzierbare Funktionen, für die die Aussage des Lemmas nicht erfüllt ist. Aufgrund der Stetigkeit von f, g gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $f < g$ auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Da wir angenommen haben, dass für f, g die Aussage des Lemmas nicht gilt, existiert ein Punkt $y \in I$ mit $f(y) \geq g(y)$. Dann gibt es ein maximales Intervall $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in J$. Am rechten Endpunkt x_1 von J gilt dann aus Stetigkeitsgründen $f(x_1) = g(x_1)$. Wäre nun $f'(x_1) < g'(x_1)$, so wäre für ein $\delta > 0$ die Differenz $f - g$ auf dem Intervall $(x_1 - \delta, x_1)$ positiv, was im Widerspruch zur Definition von x_1 steht. □

Definition 2.18. *Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

wobei f eine Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Eine Funktion $v : I \to \mathbb{R}$ heißt Oberlösung *von (2.11), falls*

$$v(x_0) \geq y_0$$

und

$$v' > f(x, v)$$

gilt. Sind für eine Funktion w beide Ungleichungen gerade umgekehrt, so sprechen wir von einer Unterlösung.

Aufgrund von Lemma 2.17 verlaufen Unterlösungen unterhalb und Oberlösungen oberhalb der wahren Lösung des Anfangwertproblems. Ein gängiges Verfahren zur Bestimmung von Ober– und Unterlösungen besteht darin, obere und untere Schranken der rechten Seite,

$$f_1(x, v) > f(x, v) \quad \text{bzw.} \quad f_2(x, w) < f(x, w)$$

so zu bestimmen, dass die zugehörigen Anfangswertprobleme für die beiden Differentialgleichungen

$$v' = f_1(x, v) \quad \text{bzw.} \quad w' = f_2(x, w)$$

explizit gelöst werden können.

Beispiel 2.19. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= x^2 + y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Eine Unterlösung erhalten wir durch die Wahl $f_2(x,w) = w^2$ und das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} w' &= w^2 \\ w(0) &= 1 \end{cases}$$

besitzt die explizite Lösung

$$w(x) = \frac{1}{1-x}$$

die auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ definiert ist. Damit kann auch die Lösung des Ausgangsproblems nur bis zum Punkt $x = 1$ existieren. Eine Oberlösung kann dann für $0 \leq x < 1$ durch die Wahl $f(x,v) < 1 + v^2 =: f_1(x,v)$ bestimmt werden. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v' &= 1 + v^2 \\ v(0) &= 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

hat die Lösung

$$v(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

und auf dem Existenzintervall von $v(x)$ und für $x \geq 0$ gilt

$$w(x) < y(x) < v(x)$$

Die Lösung $v(x)$ existiert bis $x = \pi/4$ und das Intervall $[0, \pi/4)$ ist insbesondere im maximalen Existenzintervall von $y(x)$ enthalten.
Die über (2.12) berechnete Oberlösung liefert allerdings eine noch recht grobe Abschätzung für den rechten Endpunkt x_1 des maximalen Existenzintervalls von $y(x)$,

$$0.78 < \frac{\pi}{4} \leq x_1 \leq 1$$

Eine wesentlich bessere Oberlösung erhält man aus dem Ansatz

$$\hat{v}(x) = \frac{1}{1-ax}$$

mit $a > 1$. Aus der Ungleichung $\hat{v}' > x^2 + \hat{v}^2$ erhalten wir zunächst

$$a - 1 > (1-ax)^2 x^2$$

für $0 \leq x \leq 1/a$. Da das Maximum der rechten Seite bei $x = \frac{1}{2a}$ angenommen wird, folgt die Bedingung

$$16a^2(a-1) > 1$$

und man kann etwa $a = 17/16$ setzen. Damit erhalten wir die verbesserte Oberlösung

$$\hat{v}(x) = \frac{16}{16-17x}$$

und die Abschätzung

$$0.94 < \frac{16}{17} \le x_1 \le 1$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie sich die Lösung eines Anfangswertproblems ändert, wenn wir kleine Störungen des Anfangswertes $(x_0, y_0) \in G$ zulassen. Um die Abhängigkeit vom Punkt (x_0, y_0) deutlich zu machen, verwenden wir im Folgenden für die Lösung eines Anfangswertproblems die Bezeichnung $y = y(x; x_0, y_0)$.
Als technisches Hilfsmittel benötigen wir das folgende Lemma.

SATZ 2.20. *(Gronwall–Lemma)*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $u : I \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion, welche für zwei positive Konstanten α, β, für ein $x_0 \in I$ und für alle $x \in I$ der Abschätzung

$$u(x) \le \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} u(t)\, dt \tag{2.13}$$

genügt. Dann gilt für alle $x \in I$

$$u(x) \le \alpha e^{\beta |x - x_0|} \tag{2.14}$$

Setzt man in (2.13) die strikte Ungleichung voraus, so gilt auch in (2.14) die strikte Ungleichung.

BEWEIS. Sei

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} u(t)\, dt$$

Damit läßt sich (2.13) in der Form

$$v' \le \alpha + \beta v \tag{2.15}$$

schreiben.
Setzen wir

$$w(x) = e^{-\beta x} v(x)$$

und differenzieren nach x, so ergibt sich mit (2.15) die Abschätzung

$$\begin{aligned} w'(x) &= -\beta e^{-\beta x} v(x) + e^{-\beta x} v'(x) \\ &\le -\beta e^{-\beta x} v(x) + e^{-\beta x}(\alpha + \beta v(x)) \\ &= \alpha e^{-\beta x} \end{aligned}$$

Eine Integration dieser Ungleichung von x_0 nach x liefert unter Verwendung von $w(x) = 0$

$$w(x) \le \frac{\alpha}{\beta} \left| e^{-\beta x} - e^{-\beta x_0} \right|$$

Entsprechend folgt für $v(x)$ die Abschätzung

$$v(x) \le \frac{\alpha}{\beta} \left| 1 - e^{\beta (x - x_0)} \right|$$

oder

$$v(x) \leq \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta|x-x_0|} - \frac{\alpha}{\beta}$$

Für $u(x)$ erhält man daraus

$$u(x) \leq \alpha + \beta v(x) \leq \alpha + \alpha e^{\beta|x-x_0|} - \alpha$$

Man beachte, dass eine strikte Ungleichung in (2.13) zu einer echten Ungleichheit in jeder dieser Abschätzungen führt. □

Mit dem Gronwall–Lemma läßt sich nun leicht die folgende Fehlerabschätzung für die Lösung eines Anfangswertproblems beweisen.

SATZ 2.21. *Für die Anfangswerte $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ seien die beiden Lösungen $y(x; x_0, y_0)$ und $y(x; x_0, z_0)$ auf dem Intervall $|x - x_0| \leq \varepsilon$ definiert. Die Konstante $L > 0$ bezeichne eine Lipschitz–Konstante der rechten Seite $f(x, y)$ auf einer Teilmenge $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, die die Graphen der beiden Lösungen enthält. Dann gilt für $|x - x_0| \leq \varepsilon$:*

$$\|y(x; x_0, y_0) - y(x; x_0, z_0)\| \leq e^{L|x-x_0|} \cdot \|y_0 - z_0\| \tag{2.16}$$

BEWEIS. Aus der Lösungsdarstellung

$$y(x; x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t; x_0, y_0))\, dt$$

folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Lipschitz–Bedingung an $f(x, y)$ für $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} \|y(x; x_0, y_0) - y(x; x_0, z_0)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \left\| \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t; x_0, y_0)) - f(t, y(t; x_0, z_0))]\, dt \right\| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + L \cdot \int_{x_0}^{x} \|y(t; x_0, y_0) - y(t; x_0, z_0)\|\, dt \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} u(x) &:= \|y(x; x_0, y_0) - y(x; x_0, z_0)\| \\ \alpha &:= \|y_0 - z_0\| \\ \beta &:= L \end{aligned}$$

so erhalten wir aus der obigen Abschätzung

$$u(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} u(t)\, dt$$

und die Anwendung des Gronwall–Lemmas ergibt

$$u(x) \leq \alpha \cdot e^{\beta(x-x_0)}$$

also gerade

$$\|y(x; x_0, y_0) - y(x; x_0, z_0)\| \leq \|y_0 - z_0\| \cdot e^{L(x-x_0)}$$

Für $x \le x_0$ kann die Aussage mittels der Transformation

$$\tilde{u}(x) := u(2x_0 - x) \quad \text{mit } x \ge x_0$$

auf den obigen Fall zurückgeführt werden. □

Der Satz 2.21 besagt insbesondere, dass Lösungen von Anfangswertproblemen bezüglich der vorgegebenen Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}^n$ einer Lipschitz–Bedingung genügen. Außerdem erkennt man anhand des linearen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' &= Ly \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

mit $L > 0$ auch, dass sich die Abschätzung (2.16) in gewissem Sinne nicht verbessern läßt, denn für $x \ge x_0$ gilt in (2.16) gerade die Gleichheit. Für $x \le x_0$ wird jedoch der tatsächliche Fehler erheblich überschätzt.

Bemerkung 2.22. *In der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt es eine Reihe von weitergehenden Untersuchungen zur Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswertproblemen von den Anfangsdaten $(x_0, y_0) \in G$ und der rechten Seite $f(x, y)$ der Differentialgleichung, auf die wir hier allerdings nicht weiter eingehen wollen.*

1.3. Stabilität von Lösungen, ebene autonome Systeme. Im Satz 2.21 des letzten Abschnittes hatten wir bewiesen, dass Lösungen von Anfangswertproblemen bezüglich des vorgegebenen Anfangswertes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz–stetige Funktionen sind.
Diese Eigenschaft schließt aber nicht aus, dass sich zwei am Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ benachbarte Lösungen für $x > x_0$ beliebig weit voneinander entfernen können.

Beispiel 2.23. Das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

besitzt als eindeutige Lösung die Nulllösung $y^*(x) = 0$. Setzen wir statt $y(0) = 0$ die Anfangsbedingung $y(0) = \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, so lautet die eindeutige Lösung $y_\varepsilon(x) = \varepsilon e^x$ und es gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} y_\varepsilon(x) = \infty$$

d.h. die Lösung $y_\varepsilon(x)$ entfernt sich beliebig weit von der Nulllösung. Man sagt dann auch, dass die Nulllösung eine *instabile* Gleichgewichtslösung der Differentialgleichung $y' = y$ ist.
Die Nulllösung ist aber auch die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} y' &= -y \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

und in diesem Fall ist die eindeutige Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ gegeben durch $y_\varepsilon(x) = \varepsilon e^{-x}$. Hier gilt also

$$\lim_{x\to\infty} y_\varepsilon(x) = 0$$

und man sagt, dass die Nulllösung eine *asymptotisch stabile* Gleichgewichtslösung der Differentialgleichung $y' = -y$ ist.

Wir betrachten im Folgenden wiederum eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y) \tag{2.17}$$

mit $y(x) \in \mathbb{R}^n$ und hinreichend glatter rechter Seite $f(x, y)$. Weiter sei $y^*(x)$ eine spezielle Lösung von (2.17).

Definition 2.24.

a) *Die Lösung $y^*(x)$ heißt* stabil *auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0 - y^*(x_0)\| < \delta$ folgt*

$$\|y(x; x_0, y_0) - y^*(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I$$

Kann man δ unabhängig von x_0 wählen, so heißt $y^*(x)$ auch gleichmäßig stabil *auf I.*

b) *Ist $y^*(x)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ definiert, so heißt $y^*(x)$ dort* asymptotisch stabil, *falls es zu $x_0 \geq a$ ein $\delta(x) > 0$ gibt, sodass für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0 - y^*(x_0)\| < \delta$ folgt*

$$\lim_{x \to \infty} \|y(x; x_0, y_0) - y^*(x)\| = 0$$

Man nennt $y^*(x)$ strikt stabil, *falls $y^*(x)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.*

Stabilitätsuntersuchungen von speziellen Lösungen lassen sich stets auf den Fall der Nulllösung reduzieren: ist $y^*(x)$ eine spezielle Lösung von $y' = f(x, y)$, so setzen wir

$$z(x) := y(x) - y^*(x)$$

und erhalten damit die Differentialgleichung

$$z'(x) = g(x, z(x)) \tag{2.18}$$

mit

$$g(x, z) := f(x, z + y^*(x)) - f(x, y^*(x))$$

Insbesondere gilt $g(x, 0) = 0$ und dies bedeutet, dass die Nulllösung $z^*(x) = 0$ eine Gleichgewichtslösung von (2.18) ist. Wir untersuchen daher im Folgenden stets die Stabilitätseigenschaften der Nulllösung.

Bemerkung 2.25. *Stabilitätsuntersuchungen spezieller Lösungen von linearen inhomogenen Systemen der Form $y' = A(x)y + h(x)$ werden also stets zurückgeführt auf Untersuchungen der Nulllösung des linearen homogenen Systems $z' = A(x)z$.*

Bei linearen Differentialgleichungssystemen lassen sich die Stabilitätseigenschaften der Nulllösung allein durch die Eigenschaften des zugehörigen *Fundamentalsystems* ausdrücken.

Definition 2.26. *Gegeben sei das lineare homogene System*

$$y' = A(x)y \tag{2.19}$$

mit der stetigen Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$*. Sei* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $(v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^n$*. Die Funktionen* $y^k(x)$*,* $k = 1, \ldots, n$ *bezeichnen die Lösungen der Anfangswertprobleme*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y^k &= A(x) y^k \\ y^k(x_0) &= v^k \end{cases}$$

Dann nennt man die durch

$$Y(x) := (y^1(x), \ldots, y^n(x)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

definierte Matrix ein Fundamentalsystem *oder eine* Fundamentalmatrix *der Differentialgleichung (2.19).*

Man kann nun direkt zeigen, dass eine Fundamentalmatrix $Y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ regulär ist und sich jede Lösung der Gleichung (2.19) in der Form

$$y(x) = Y(x) \cdot c$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$ schreiben läßt.

Bemerkung 2.27. *Spezielle Lösungen einer inhomogenen Gleichung* $y' = A(x)y + h(x)$ *mit einer stetigen Funktion* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *lassen sich ebenfalls mit Hilfe eines Fundamentalsystems bestimmen. Man wählt dazu den Lösungsansatz:*[4]

$$y(x) = Y(x) \cdot c(x)$$

und setzt diesen in die inhomogene Gleichung ein, um eine Bestimmungsgleichung für die unbekannte Funktion $c(x)$ *aufzustellen. Jede Lösung der inhomogenen Gleichung läßt sich dann schreiben als*

$$y(x) = Y(x) \left(c + \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} h(t)\, dt \right) \qquad (c \in \mathbb{R}^n)$$

Bemerkung 2.28. *Bei linearen Systemen mit einer konstanten Koeffizientenmatrix, also Gleichungen der Form* $y' = Ay$*, kann man ein Fundamentalsystem stets explizit angeben, indem man die Eigenwerte von* A *und eine Basis des* $\mathbb{R}^n$ *aus zugehörigen Eigen– und Hauptvektoren betsimmt. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen und verweisen wiederum auf die Standardliteratur zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für den Fall von ebenen Systemen (*$n = 2$*) sind die dabei auftretenden Fälle weiter unten explizit angegeben.*

Wir formulieren nun unseren ersten Stabilitätssatz für ein lineares homogenes System aus Definition 2.26, wobei $Y(x)$ ein beliebiges Fundamentalsystem bezeichne.

Satz 2.29.

a) *Die Nulllösung ist genau dann stabil auf dem Intervall* $I = [a, \infty)$*, falls das Fundamentalsystem* $Y(x)$ *auf* I *beschränkt ist.*

[4]Man bezeichnet diese Vorgehensweise auch als *Variation der Konstanten*

b) *Die Nulllösung ist genau dann gleicchmäßig stabil auf I, falls eine Konstante $M > 0$ existiert, sodass für alle $x \geq x_0 \geq a$ gilt:*

$$\|Y(x)Y^{-1}(x_0)\| \leq M$$

c) *Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \|Y(x)\| = 0$$

Wir verzichten hier (wie im weiteren Verlauf dieses Abschnittes) auf den Beweis und verweisen wiederum auf die Standardliteratur.
Asymptotische Stabilität läßt sich auch mit Hilfe der folgenden Eigenschaft an die Systemmatrix A ausdrücken.

SATZ 2.30. *Sei $\lambda(x)$ der größte Eigenwert der (symmetrischen) Matrix $A(x)+A^T(x)$. Gilt*

$$\int_{x_0}^{\infty} \lambda(t)\,dt = -\infty$$

so erfüllt jede Lösung $y(x)$ das Grenzverhalten $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ d.h. die Nulllösung ist asymptotisch stabil.

Da bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten eine Fundamentalmatrix stets mit Hilfe der Eigenwerte und Eigen– bzw. Hauptvektoren der Matrix A ausgedrückt werden kann, läßt sich das Resultat aus Satz 2.29 weiter verfeinern.

SATZ 2.31. *Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit der konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Nulllösung ist genau dann*

a) *strikt stabil, falls für alle Eigenwerte λ von A gilt $Re(\lambda) < 0$.*

b) *gleichmäßig stabil, falls für alle Eigenwerte λ von A gilt $Re(\lambda) \leq 0$ und für alle Eigenwerte λ mit $Re(\lambda) = 0$ die geometrische und algebraische Vielfachheit von λ gleich sind.*

In allen anderen Fällen ist die Nulllösung instabil.

Für nichtlineare Systeme ist die Bestimmung der Stabilitätseigenschaften einer Lösung weitaus komplizierter. Wir formulieren im Folgenden zwei klassische Methoden für *autonome* Gleichungen, nämlich

- die Linearisierung einer gegebenen Gleichung um die Nulllösung.
- Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe von Ljapunov–Funktionen.[5]

Gegeben sei das autonome Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = f(y(x)) \tag{2.20}$$

[5]Alexander Michailovitsch Ljapunov, russischer Mathematiker, geb. 6. Juni 1857 in Yaroslavl, gest. 3. November 1918 in Odessa.

und die Nulllösung sei ein Gleichgewichtspunkt von (2.20), es gelte also $f(0) = 0$.
Wie schon bei unserem Modell zur Beschreibung einer Abmagerungskur aus dem ersten Kapitel angedeutet, basiert die *Linearisierung* der Gleichung (2.20) einer Taylor–Entwicklung der rechten Seite $f(y)$:

$$f(y) = f(0) + Df(0) \cdot y + g(y) = Df(0) + g(y)$$

mit $g(0) = 0$ und $g(y) = o(\|y\|)$. setzen wir $A := Df(0)$, so ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung in der Form

$$y' = Ay \tag{2.21}$$

und die strikte Stabilität bzw. Instabilität der Nulllösung von (2.21) überträgt sich auf das zugrundeliegende nichtlineare System.

Satz 2.32. *Gegeben sei die autonome nichtlineare Differentialgleichung $y' = Ay + g(y)$ mit der konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Funktion $g(y)$ sei für $\|y\| \leq \alpha$, $\alpha > 0$ erklärt und stetig und es gelte*

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0,$$

also insbesondere $g(0) = 0$.

a) *Gilt für jeden Eigenwert λ von A: Re$(\lambda) < 0$, so ist die Nulllösung ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $y' = Ay + g(y)$.*
b) *Existiert ein Eigenwert λ von A mit Re$(\lambda) > 0$, so ist die Nulllösung als Gleichgewichtspunkt von $y' = Ay + g(y)$ instabil.*

Bemerkung 2.33. *Die Aussage des Satzes läßt sich auf den Fall $y' = Ay + g(x, y)$ verallgemeinern. Dabei sei $g(x, y)$ eine für $x \geq 0$, $|y| \leq \alpha$, $\alpha > 0$ erklärte stetige Funktion und es gelte*

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|g(x,y)\|}{\|y\|} = 0 \qquad \text{gleichmäßig für } 0 \leq x < \infty$$

Durch den Satz 2.32 wird ein Fall nicht erfasst, der – wie wir weiter unten sehen werden – zum Beispiel bei der Stabilitätsuntersuchung der Gleichgewichtslösung im Räuber–Beute Modell aus Beispiel 2.5 auftritt: gilt für alle Eigenwerte $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$, gibt es jedoch einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, so überträgt sich die Stabilität bzw. Instabilität des linearisierten Systems nicht notwendigerweise auf die nichtlineare Gleichung.
Als Vorbereitung auf Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe von Ljapunov–Funktionen führen wir den Begriff des *ersten Integrals* ein.

Definition 2.34. *Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz–stetige Funktion. Eine Funktion $w : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt* erstes Integral, *falls w längs der Lösungen der Gleichung $y' = f(x, y)$ konstant bleibt*

Kennt man eine hinreichende Zahl von (linear unabhängigen) ersten Integralen, so kann man die Differentialgleichung als gelöst ansehen. Ljapunov–Funktionen stellen nun eine Verallgemeinerung erster Integrale dar, da sie entlang von Lösungen nicht konstant bleiben, aber mit einem Vorzeichen behaftet sind.

DEFINITION 2.35. *Fie Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei Lipschitz–stetig auf U und wir betrachten die autonome Differentialgleichung $y' = f(y)$. Eine stetige Funktion $V : W \to \mathbb{R}$, $W \subset U$ offen, nennt man* Ljapunov–Funktion *auf W zu $y' = f(y)$, falls alle partiellen Ableitungen von V existieren und für alle $w \in W$ gilt:*

$$\langle \nabla V(w), f(w) \rangle \leq 0$$

Ist $W = U$, so gilt insbesondere für jede Lösung von $y' = f(y)$

$$\frac{d}{dx} V(y(x)) \leq 0$$

Es gelte nun $f(0) = 0$, d.h. die Nulllösung $y^*(x) = 0$ sei ein Gleichgewichtspunkt von $y' = f(y)$.

SATZ 2.36. *Existiert eine Umgebung W von $w = 0$ und eine Ljapunov–Funktion V auf W zu $y' = f(y)$ mit $V \geq 0$ und $V(w) = 0$ genau dann, wenn $w = 0$, so ist die Nulllösung $y^*(x)$ gleichmäßig stabil.*
Ist V zusätzlich eine strenge *Ljapunov–Funktion auf W, d.h. es gilt sogar $\langle \nabla V(w), f(w) \rangle < 0$, so ist die Nulllösung asymptotisch stabil.*

BEMERKUNG 2.37. *Kann man eine Funktion $V : W \to \mathbb{R}$ mit $V \geq 0$ und $V(w) = 0$ genau dann, wenn $w = 0$, angeben, die für alle $w \in W$ der Bedingung*

$$\langle \nabla V(w), f(w) \rangle > 0$$

genügt, so ist die Nulllösung ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Die Stabilitätseigenschaften der Nulllösung lassen sich für den Fall linearer ebener Systeme mit konstanten Koeffizienten besonders anschaulich darstellen. Wir betrachten also Systeme der Form

$$y' = Ay$$

mit $y \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \ltimes \times \ltimes$. Es seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A, v_1 und v_2 die zugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigen– und Hauptvektoren.
Setzen wir $S := (v_1, v_2)$ und

$$\begin{aligned} J &:= S^{-1}AS = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 = \lambda_2,\ g(\lambda_2) = 2 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2,\ g(\lambda_2) = 1 \end{cases} \\ w(x) &:= S^{-1}y(x) \end{aligned}$$

so erhält man für $w(t)$ die Differentialgleichung

$$w' = Jw$$

und eine Fallunterscheidung ergibt die folgenden Situationen.

1) Für $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ergeben sich in der Phasenebene die Gleichungen

$$w_j(x) = w_{j0} e^{\lambda_j x}$$

und die Nulllösung in ein *instabiler Knotenpunkt 2. Art.*

2) Für $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ergeben sich in der Phasenebene die Gleichungen
$$w_j(x) = w_{j0}e^{\lambda_j x}$$
und die Nulllösung in ein *asymptotisch stabiler Knotenpunkt 2. Art.*
3) Für $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $g(\lambda_1) = 2$ ist die Nulllösung ein *instabiler Knotenpunkt 1.Art.*
4) Für $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $g(\lambda_1) = 2$ ist die Nulllösung ein *asymptotisch stabiler Knotenpunkt 1. Art.*
5) Für $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ist die Nulllösung ein *instabiler Sattelpunkt.*
6) Für $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ist die Nulllösung kein isolierter Gleichgewichtspunkt. Die Nulllösung ist *instabil* für $\lambda_2 > 0$ und *stabil* für $\lambda_2 \leq 0$.
7) Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $g(\lambda = 1)$ ergeben sich die Gleichungen
$$\begin{aligned} w_1(x) &= (w_{10} + w_{20}x)e^{\lambda x} \\ w_2(x) &= w_{20}e^{\lambda x} \end{aligned}$$
und die Nulllösung ist ein *Knotenpunkt 3. Art.* Der Nullpunkt ist *instabil* für $\lambda > 0$ und *asymptotisch stabil* für $\lambda < 0$.
8) Für $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ und $\alpha < 0$ ist die Nulllösung ein *asymptotisch stabiler Strudelpunkt.*
9) Für $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ und $\alpha > 0$ ist die Nulllösung ein *instabiler Strudelpunkt.*
10) Für $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = i\beta$, $\beta \neq 0$ ist die Nulllösung ein *stabiler Wirbelpunkt oder Zentrum.*

Wir kehren nun zum Lotka–Volterra Modell aus Beispiel 2.5 zurück. Dort hatten wir das ebene autonome System
$$\dot{b} = (\lambda - \gamma r)b \tag{2.22}$$
$$\dot{r} = (-\mu + \delta b)r \tag{2.23}$$
als Beispiel eines Räuber–Beute Modells formuliert. Für $b, r > 0$ ist der eindeutige Gleichgewichtspunkt gegeben durch
$$\tilde{b} = \frac{\mu}{\delta}, \qquad \tilde{r} = \frac{\lambda}{\gamma}$$
Wir transformieren zunächst das System auf eine Form, für die Nulllösung die entsprechende Gleichgewichtslösung ist. Sei dazu
$$\begin{aligned} y_0 &:= b - \tilde{b} = b - \frac{\mu}{\delta} \\ y_1 &:= r - \tilde{r} = r - \frac{\lambda}{\gamma} \end{aligned}$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_0 &= \dot{b} = (\lambda - \gamma(y_1 + \tilde{r}))(y_0 + \tilde{b}) \\ \frac{d}{dt}y_1 &= \dot{r} = (-\mu + \delta(y_0 + \tilde{b}))(y_1 + \tilde{r}) \end{aligned}$$

und wir erhalten das transformierte System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma y_1 \left(y_0 + \dfrac{\mu}{\delta}\right) \\ \delta y_0 \left(y_1 + \dfrac{\lambda}{\gamma}\right) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Um die Stabilität der Nulllösung zu untersuchen, verwenden wir zunächst eine Linearisierung der rechten Seite von (2.24). Mit $f(y_0, y_1) = (-\gamma y_1(y_0 + \mu/\delta), \delta y_0(y_1 + \lambda/\gamma))^T$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(y_0, y_1) &= f(0,0) + Df(0,0)(y_0, y_1)^T + g(y_0, y_1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\gamma\mu}{\delta} \\ \dfrac{\delta\lambda}{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + g(y_0, y_1) \end{aligned}$$

und die linearisierte Gleichung lautet

$$Y' = AY$$

mit der konstanten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\gamma\mu}{\delta} \\ \dfrac{\delta\lambda}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

die die beiden kompexen (und zueinander komplex konjugierten) Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\lambda\mu}$$

besitzt. Das bedeutet aber auch, dass wir mit Hilfe einer Linearisierung keine Aussage über die Stabilität bzw. Instabilität der Ruhelage des Lotka–Volterra Modells machen können. Wir hatten uns allerdings bereits in einer Übungsaufgabe klargemacht, dass das Lotka–Volterra Modell periodische Lösungen besitzt und daher die Nulllösung von (2.24) stabil sein wird.

Die Überlegungen zur Existenz periodischer Lösungen basierten darauf, in den *Phasenraum*, also die (b, r)–Ebene, überzugehen und aus den Ausgangsgleichungen eine Differentialgleichung für die Phasenkurve $r = r(b)$ abzuleiten. Eine Division der beiden Gleichungen (2.22), (2.23) ergibt die separable Differentialgleichung

$$\frac{dr}{db} = \frac{(-\mu + \delta b)r}{(\lambda - \gamma r)b}$$

und aus einer Integration der Gleichung folgt die implizite Darstellung

$$\lambda \ln r - \gamma r + \mu \ln b - \delta b = c \tag{2.25}$$

mit der Integrationskonstanten c, was man auch als

$$b^{\mu} e^{-\delta b} r^{\lambda} e^{-\gamma r} = c \tag{2.26}$$

schreiben kann.
Dies bedeutet aber gleichzeitig, dass die durch die linke Seite von (2.25) definierte Funktion $w(b,r)$ mit

$$w(b,r) = \lambda \ln r - \gamma r + \mu \ln b - \delta b$$

ein erstes Integral des Lotka–Volterra Modell ist.[6]
Analog dazu kann man auch für das transformierte System (2.24) ein erstes Integral berechnen: für die Phasenkurve erhält man gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dy_1}{dy_0} = \frac{\delta y_0(y_1 + \lambda/\gamma)}{-\mu y_1(y_0 + \mu/\delta)}$$

die wiederum durch einen Separationsansatz integriert werden kann. Dabei ergibt sich die implizite Darstellung der Lösung als

$$\mu \ln(\delta y_0 + \mu) - \delta y_0 + \lambda \ln(\gamma y_1 + \lambda) - \gamma y_1 = c$$

und ein erstes Integral für (2.24) ist gegeben durch

$$w(y_0, y_1) = \mu \ln(\delta y_0 + \mu) - \delta y_0 + \lambda \ln(\gamma y_1 + \lambda) - \gamma y_1$$

Man berechnet nun

$$\nabla w(y_0, y_1) = \left(\frac{\mu}{y_0 + \mu/\delta} - \delta, \frac{\lambda}{y_1 + \lambda/\gamma} - \gamma \right)^T$$

und dies bedeutet, dass der Punkt $(y_0, y_1) = (0,0)$ ein lokaler Extremwert ist. Für die Hesse–Matrix ergibt sich im Nullpunkt

$$(Hw)(0,0) = \begin{pmatrix} -\delta^2/\mu & 0 \\ 0 & \gamma^2/\lambda \end{pmatrix}$$

und daher besitzt das erste Integral $w(y_0, y_1)$ im Nullpunkt ein striktes lokales Maximum. Setzen wir also

$$V(y_0, y_1) = w(0,0) - w(y_0, y_1)$$

so ist $V(y_0, y_1)$ eine Ljapunov–Funktion nach Definition 2.35, die den im ersten Teil von Satz 2.36 geforderten Bedingungen genügt und das bedeutet, dass die Nulllösung von (2.24) ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

[6] Natürlich ist auch die durch die linke Seite von (2.26) definierte Funktion ein erstes Integral.