

## 2. Asymptotische Entwicklungen

**2.1. Skalierung, Entdimensionalisierung und kleine Parameter.** Mathematische Modelle enthalten in der Regel eine gewisse Zahl von Parameter, deren Zahlenwerte mehr oder weniger genau bekannt sind. Man sollte daher darauf achten, dass die Anzahl solcher Parameter möglichst klein gehalten wird. Durch geeignete *Skalierungen* läßt sich häufig die Zahl der Parameter reduzieren. Wir wollen uns dies am Beispiel des Lotka–Volterra Modells aus dem letzten Abschnitt genauer ansehen.

BEISPIEL 2.38. Das Lotka–Volterra Modell war gegeben durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{b} &= (\lambda - \gamma r)b \\ \dot{r} &= (-\mu + \delta b)r\end{aligned}$$

und besitzt die vier positiven Parameter  $\lambda, \gamma, \mu$  und  $\delta$ .

Die rechten Seite lassen sich auch folgendermaßen umschreiben

$$\begin{aligned}(\lambda - \gamma r)b &= \lambda\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda}r\right)b \\ (-\mu + \delta b)r &= \mu\left(\frac{\delta}{\mu}b - 1\right)r\end{aligned}$$

Dies motiviert die Einführung neuer Variablen der Form

$$u(t) = \frac{\delta}{\mu}b(t) \quad v(t) = \frac{\gamma}{\lambda}r$$

Die beiden neuen Funktionen  $u = u(t)$  und  $v = v(t)$  erfüllen das vereinfachte System

$$(2.27) \quad \dot{u} = \frac{\delta}{\mu}\dot{b} = \frac{\delta}{\mu}\lambda\left(1 - v\right)\frac{\mu}{\delta}u = \lambda(1 - v)u$$

$$(2.28) \quad \dot{v} = \frac{\gamma}{\lambda}\dot{r} = \frac{\gamma}{\lambda}\mu(u - 1)\frac{\lambda}{\gamma}v = \mu(u - 1)v$$

Das Differentialgleichungssystem für  $u$  und  $v$  enthält also nur noch die beiden Parameter  $\lambda$  und  $\mu$ .

Durch die Einführung einer neuen (skalierten) Zeitvariablen  $\tau = \lambda \cdot t$  läßt sich das System weiter auf zwei Gleichungen mit nur einem einzigen Parameter vereinfachen: setzen wir nämlich

$$\tilde{u}(\tau) = u(\tau/\lambda)$$

so ergibt sich aus der Kettenregel

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{du}{dt}$$

Damit ergeben sich aus (2.27), (2.28) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}} &= (1 - \tilde{v})\tilde{u} \\ \dot{\tilde{v}} &= \alpha(\tilde{u} - 1)\tilde{v}\end{aligned}$$

mit dem einzigen Parameter  $\alpha = \mu/\lambda$ .

Die Einführung von Skalierungen oder skalierten Variablen hat einen weiteren Aspekt: die betrachteten Modelle können damit in einer *dimensionslosen Form* geschrieben werden. Man nennt diesen Schritt der Skalierung daher auch die *Entdimensionalisierung* des Modells.

Typischerweise werden mathematische Modelle mit Hilfe dimensionsbehafteter Variablen definiert. Physikalische Größen werden häufig in dem sogenannten *cgs-Einheitensystem* ausgedrückt, d.h. man verwendet die Maßeinheiten Zentimeter (*cm*), Gramm (*g*) und Sekunde (*s*). Solche dimensionsbehafteten Größen lassen sich mittels *Referenzgrößen* (charakteristischen Größen) des Problems skalieren und damit in dimensionsloser Form schreiben. Insgesamt wird das zugrundeliegende Modell entdimensionalisiert. Wir wollen uns diese Vorgehensweise wieder anhand eines einfachen Beispiele klarmachen.

BEISPIEL 2.39. Wir wollen die Frage beantworten: nach welcher Zeit prallt ein Gegenstand, den man nach oben geworfen hat, wieder auf der Erde auf? Zur Herleitung eines mathematischen Modells kann man auf grundlegende physikalische Gesetzmäßigkeiten zurückgreifen. Zunächst besagt das Newtonsche Gesetz, dass die auf einen Körper wirkende Kraft  $F$  gleich dem Produkt aus der Masse  $m$  und der Beschleunigung  $a$  des Gegenstandes ist, also  $F = m \cdot a$ . Nach dem Gravitationsgesetz ist die auf zwei Körper wirkende Gravitationskraft gegeben durch

$$F = Gm_1m_2 \frac{x}{|x|^3}$$

Hierbei bezeichnen  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der beiden Körper,  $x$  den Abstandsvektor zwischen den beiden und  $G$  die universelle Gravitationskonstante.

Mit Hilfe dieser beiden physikalischen Gesetze können wir ein mathematisches Modell in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung aufstellen: wir konkretisieren die Fragestellung und gehen davon aus, dass der Gegenstand von der Erdoberfläche aus senkrecht nach oben geworfen wird und bezeichnen mit  $x = x(t)$  den Abstand des Gegenstands von der Erdoberfläche zur Zeit  $t$ . Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(x(t) + R)^2}$$

wobei  $R$  den Radius und  $M$  die Masse der Erde bezeichnet. Wir suchen nun eine Zeit  $T > 0$ , nämlich den Zeitpunkt des Aufpralls auf der Erdoberfläche, sodass  $x(T) = 0$  gilt. Mit Hilfe der Gravitationskonstanten  $g$  der Erde,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

erhalten wir schließlich die Gleichung zweiter Ordnung

$$(2.29) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x(t) + R)^2}$$

die wir als ein Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen

$$(2.30) \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v$$

untersuchen wollen.

Das Anfangswertproblem (2.29), (2.30) besitzt die Variablen  $x$  und  $t$  sowie drei (physikalische) Parameter  $g$ ,  $R$  und  $v$ , wobei allen Größen zunächst dimensionsbehaftet sind, siehe Tabelle 1.

	Dimension	
Variable	$x$	$cm$
	$t$	$s$
Parameter	$g$	$cm/s^2$
	$R$	$cm$
	$v$	$cm/s$

Tabelle 1 : Variablen, Parameter und Dimensionen im cgs-Einheitensystem

Es bietet sich nun an, den Erdradius  $R$  als Referenzlänge zu verwenden und wir setzen daher

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{R}x(t)$$

Weiter ist der Quotient  $R/v$  eine Zeitskala und wir setzen

$$\tau = \frac{tv}{R}$$

und dementsprechend

$$y(\tau) = \tilde{y}(R\tau/v)$$

Damit läßt sich eine dimensionslose Differentialgleichung für die Funktion  $y = y(\tau)$  herleiten:

$$y'' = \frac{d^2y}{d\tau^2} = \left(\frac{R}{v}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{v^2} \frac{gR^2}{(Ry + R)^2} = -\frac{gR}{v^2} \frac{1}{(y + 1)^2}$$

Für die Anfangsbedingung  $y'(0)$  errechnet man

$$y'(0) = \frac{dy}{d\tau}(0) = \frac{R}{v} \frac{x(0)}{R} = 1$$

Schließlich führen wir den dimensionslosen Parameter  $\varepsilon$  mittels

$$\varepsilon = \frac{v^2}{gR}$$

und erhalten das Anfangswertproblem

$$(2.31) \quad \varepsilon y'' = -\frac{1}{(y + 1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Die Wahl der Referenzgrößen, also etwa eine charakteristische Länge oder Zeit, ist in gewissem Sinne willkürlich. Daher existiert auch nie eine einzige dimensionslose Form des Modells. Das skalierte (dimensionslose) Problem sollte aber so gewählt werden, dass die dimensionslosen Variablen von der Größenordnung Eins sind. Wie man leicht sieht ist dies beim letzten Beispiel nicht der Fall: werfen wir einen Gegenstand nach oben, so erwarten wir  $x = 10 \dots 10^3 m$  und  $t = 1 \dots 100 s$ . Dann gilt aber

$$y = \frac{x}{R} \approx \frac{10^5}{5 \cdot 10^8} = 0.0002, \quad \tau = \frac{vt}{R} \approx 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10^8 = 0.002$$

und beide Größen sind *nicht* von der Größenordnung Eins. Eine Konsequenz aus dieser Skalierung mit Hilfe unter Umständen ungeeigneten Referenzgrößen wollen wir im weiter unten untersuchen.

Wie wir am Beispiel 2.38 gesehen haben kann durch eine Entdimensionalisierung die Zahl der Modellparameter reduziert werden. Dimensionslose Modelle enthalten aber auch häufig *sehr kleine* und/oder *sehr große* Parameter, die wir wahlweise mit  $\varepsilon$  bzw.  $1/\varepsilon$  kennzeichnen. Die Existenz kleiner oder großer Parameter deutet häufig darauf hin, dass Phänomene auf unterschiedlichen Zeit- oder Ortsskalen beschrieben werden müssen.

Enthält ein dimensionsloses Modell einen kleinen Parameter  $\varepsilon$  (oder aber einen großen Parameter  $1/\varepsilon$ ), so kann es sinnvoll sein, mit  $\varepsilon = 0$  ein vereinfachtes Modell zu untersuchen und den Fall  $\varepsilon \neq 0$  mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung in  $\varepsilon$  zu beschreiben. Wir wollen diese Vorgehensweise an unserem letzten Beispiel 2.39 anwenden.

BEISPIEL 2.40. Das am Ende von Beispiel 2.39 hergeleitete dimensionslose Modell war gegeben durch die Gleichung (2.31). Um die Größenordnung des Parameters  $\varepsilon$  zu untersuchen, betrachten wir typische Werte für die (physikalischen) Parameter des Problems:

$$\begin{aligned} v &= 10^2 \dots 10^4 \text{ cm/s} \\ g &\approx 980 \text{ cm/s}^2 \\ R &\approx 6500 \text{ km} = 6.5 \cdot 10^8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\varepsilon \approx \frac{(10^4)^2}{1000 \cdot 5 \cdot 10^8} = 0.0002 \ll 1$$

und die Gleichung (2.31) enthält einen kleinen Parameter  $\varepsilon$ .

Vereinfachen wir das Modell durch die Wahl  $\varepsilon = 0$ , so erhalten wir

$$0 = -\frac{1}{(y+1)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

– ein Problem, das offensichtlich *keine* Lösung besitzt. Dies deutet darauf hin, dass die im Beispiel 2.39 gewählte Skalierung, also die Wahl der Referenzgrößen nicht sinnvoll ist, da sowohl  $y$  als auch  $\tau$  nicht von der Größenordnung Eins sind.

Eine möglicherweise geeignetere Skalierung ergibt sich aus der Annahme  $x \ll R$ . Daraus folgt, dass die Beschleunigung  $x''$  die Größenordnung

$$|x''| = \frac{gR^2}{(x+R)^2} \approx \frac{gR^2}{R^2} = g$$

hat. Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, können wir mit Hilfe der Geschwindigkeit  $v$  eine typische Zeit  $\theta$  bestimmen:

$$g = \frac{v}{\theta} \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{v}{g}$$

Die typische Beschleunigung ist aber auch gleich der typischen Länge dividiert durch das Quadrat der Zeit, also

$$g = \frac{L}{\theta^2} \quad \text{oder} \quad L = g\theta^2 = \frac{v^2}{g}$$

Setzen wir nun für  $g$  und  $v$  typische Werte ein so ergibt sich

$$\theta = \frac{v}{g} \approx \frac{10^4}{10^3} s = 10s \quad L = \frac{v^2}{g} \approx \frac{(10^4)^2}{10^3} cm = 10^5 cm = 1km$$

Setzen wir nun die skalierten Variablen als

$$y = \frac{x}{L} \quad \tau = \frac{t}{\theta}$$

so ist gewährleistet, dass beide von der Größenordnung Eins sind.

In dieser neuen Skalierung erhalten wir die dimensionslose Gleichung

$$y'' = \frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{\theta^2}{L} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{g} \frac{gR^2}{(v^2 y/g + R)^2} = -\frac{1}{(\varepsilon y + 1)^2}$$

und nun macht es durchaus Sinn, die Modellvereinfachung  $\varepsilon = 0$  zu untersuchen.

Das Anfangswertproblem

$$y'' = -1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

besitzt die (eindeutige) Lösung

$$y(\tau) = \tau - \frac{\tau^2}{2}$$

und der Aufprallzeitpunkt definiert durch  $y(\tau^*) = 0$  ist gegeben durch  $\tau^* = 2$ . Eine Rücktransformation auf die dimensionsbehaftete Variable  $T = \theta \cdot \tau^* = 2v/g$  ergibt, dass der Aufprallzeitpunkt proportional zur Anfangsgeschwindigkeit ist und typische Werte für  $T$  sind

$$T \approx \frac{2 \cdot 10^2}{10^3} \dots \frac{2 \cdot 10^4}{10^3} s = 0.2 \dots 20s$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass Modelle, die einen kleinen Parameter  $\varepsilon > 0$  enthalten, vereinfacht werden können, in dem man das gegebene Modell für  $\varepsilon = 0$  näher untersucht. Häufig lassen sich im Rahmen dieser Modellvereinfachung *explizite* Näherungslösungen angeben, die ausreichend genau sind, die gestellte Frage zu beantworten. In einem weiteren Schritt kann man nun untersuchen, ob man mit Hilfe *asymptotischer Entwicklungen* im Parameter  $\varepsilon$  weitere explizite Näherungslösungen angeben kann. Diese Fragestellung wollen wir im weiteren Verlauf dieses Abschnittes näher behandeln, wobei wir zum Abschluß noch ein klassisches Beispiel aus der *asymptotischen Analysis* angeben wollen.

BEISPIEL 2.41. Der sogenannte Van-der-Pol Oszillator ist eine Schwingungsgleichung mit einem nichtlinearen Reibungsterm und wird beschrieben durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} (x^2 - 1) + x = 0$$

Für große Zeiten  $t$  ist die Lösung eine Schwingung mit einer von den Anfangsbedingungen unabhängigen Amplitude. Von Interesse ist dabei die Berechnung der Grenzperiode für große oder kleine Parameter  $k$ , also die beiden Fälle  $k \rightarrow \infty$  und  $k \rightarrow 0$ . Insbesondere

ergeben sich mit Hilfe von asymptotischen Entwicklungen folgende Näherungslösungen für die Grenzperiode:

$$\text{Grenzperiode} = \begin{cases} 2\pi(1 + \frac{1}{16}k^2 + O(k^4)) & : k \rightarrow 0 \\ k(3 - 2 \ln 2) + 7.0143k^{-1/3} + O(k^{-1} \ln k) & : k \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ohne die Anwendung asymptotischer Entwicklungen lassen sich diese Grenzperioden näherungsweise nur mit Hilfe numerischer Simulationen für feste Parameterwerte von  $k$  bestimmen, wobei die numerischen Simulationen für die Fälle  $k \rightarrow 0$  und  $k \rightarrow \infty$  sehr aufwendig werden.

## 2.2. Formale asymptotische Entwicklungen bei algebraischen Gleichungen.

In diesem Abschnitt wollen wir als Einstieg in das Prinzip asymptotischer Entwicklungen den Fall einfacher algebraischer Gleichungen, die von einem kleinen Parameter  $\varepsilon > 0$  abhängen, näher untersuchen. Bevor wir aber ein erstes Beispiel einer parameterabhängigen algebraischen Gleichung behandeln, bringen wir uns zunächst die sogenannten *Landau-Symbole* oder auch *Ordnungsrelationen* in Erinnerung.

Wir schreiben für  $x \rightarrow x_0$ :

$$\begin{aligned} f(x) = o(g(x)) & :\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \\ f(x) = O(g(x)) & :\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ beschränkt} \\ f(x) = \text{ord}(g(x)) & :\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = O(1) \text{ und } \frac{g(x)}{f(x)} = O(1) \end{aligned}$$

Diese Ordnungsrelationen werden zum Beispiel bei der Taylor-Entwicklung einer hinreichend glatten Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  an einem Entwicklungspunkt  $x_0 \in (a, b)$  verwendet. Beim nächsten Beispiel betrachten wir die Nullstellenbestimmung einer quadratischen Gleichung, die von einem kleinen Parameter  $\varepsilon > 0$  abhängt.

BEISPIEL 2.42. Wir untersuchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(2.32) \quad x^2 + \varepsilon x = 1$$

mit dem kleinen Parameter  $\varepsilon \ll 1$ . Setzt man  $\varepsilon = 0$ , so ergibt sich die Gleichung

$$(2.33) \quad x^2 = 1$$

mit den beiden Lösungen  $x = \pm 1$ .

Wir erwarten nun, dass für kleine  $\varepsilon > 0$  die Lösungen der Ausgangsgleichung (2.32) nur wenig von den beiden Lösungen der reduzierten Gleichung (2.33) abweichen. Setzt man die Entwicklung

$$(2.34) \quad x_\varepsilon = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

als Lösungsansatz in die Gleichung (2.32) ein, erhält man zunächst die Beziehung

$$1 + 2\varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_1^2 + 2a_2) + \varepsilon^3(2a_1a_2 + 2a_3) + \dots + \varepsilon + \varepsilon^2 a_1 + \varepsilon^3 a_2 + \dots = 1$$

Damit diese Gleichung unabhängig vom Parameter  $\varepsilon > 0$  erfüllt ist, liefert ein *Koeffizientenvergleich* nach Potenzen in  $\varepsilon$  die folgenden Bedingungen an die nach unbekanntem Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3, \dots$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 &: 1 = 1 \\ \varepsilon^1 &: 2a_1 + 1 = 0 \\ \varepsilon^2 &: a_1^2 + 2a_2 + a_1 = 0\end{aligned}$$

Aus der Lösung dieser Bedingungsgleichungen ergibt sich direkt

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{8}$$

und wir erwarten daher, dass die *asymptotische* Lösung zur Ausgangsgleichung (2.32) in der Form

$$x_\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2$$

nur wenig von der Lösung  $x = 1$  der reduzierten Modellgleichung (2.33) abweicht. Tatsächlich lautet eine der exakten Lösungen von (2.32)

$$x_e = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$$

und eine Taylor-Entwicklung um  $\varepsilon = 0$  ergibt

$$x_e = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{124}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$$

Daher gilt

$$x_e = x_\varepsilon + O(\varepsilon^4)$$

BEISPIEL 2.43. Wir betrachten nun die Gleichung

$$(2.35) \quad \varepsilon x^2 + x = 1$$

Für  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , besitzt diese Gleichung zwei Lösungen; eine der beiden wird von der Größenordnung  $O(1)$  sein, d.h.  $x \approx 1$  und  $\varepsilon x^2 = O(\varepsilon)$ .

Für die zweite Lösung erwarten wir, dass der Term  $\varepsilon x^2$  in (2.35) dominant wird, d.h. groß wird. Dementsprechend ist die Lösung  $x$  selbst groß und man kann den konstanten Term 1 in (2.35) vernachlässigen:

$$\varepsilon x^2 + x \approx 0$$

Dann gilt aber

$$x \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

Machen wir daher den Ansatz

$$x_\varepsilon = a_{-1} \frac{1}{\varepsilon} + a_0 + a_1 \varepsilon + \dots$$

und setzen diesen in die Gleichung (2.35) ein, so liefert ein Koeffizientenvergleich nach Potenzen in  $\varepsilon$  die asymptotische Lösung

$$x_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon$$

Die exakte Lösung lautet

$$x_e = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

Eine Taylor-Entwicklung des Nenners ergibt

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{1}{2\varepsilon} \left( -2 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

und es folgt

$$x_e = x_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Wir sehen, dass sich im ersten Beispiel das Lösungsverhalten der gegebenen Gleichung beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  nicht verändert: auch für  $\varepsilon = 0$  haben wir weiterhin eine quadratische Gleichung, die zwei Lösungen besitzt. Man spricht daher von einem *regulär gestörten Problem*.

Das zweite Beispiel ist dagegen der Prototyp eines *singulär gestörten Problems*, da im Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  aus einer quadratischen Gleichung mit zwei Lösungen eine lineare Gleichung entsteht, die nur eine Lösung besitzt. Zudem erkennt man, dass eine der beiden Lösungen für  $\varepsilon \rightarrow 0$  divergiert.

Bei regulär gestörten Problemen kann man eine asymptotische Lösung in der Regel mit Hilfe einer zu (2.34) analogen Potenzreihenentwicklung in  $\varepsilon$  berechnen.<sup>7</sup> Ein singulär gestörtes Problem kann dagegen häufig mit Hilfe einer *Reskalierung* in ein regulär gestörtes Problem überführt werden: setzt man die Transformation  $X = \varepsilon x$  in die Gleichung (2.35) ein, so ergibt sich die *reskalierte* Gleichung

$$(2.36) \quad X^2 + X = \varepsilon$$

und dies ist ein regulär gestörtes Problem, denn für  $\varepsilon = 0$  erhalten wir:

$$X^2 + X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 0, \quad X_2 = -1$$

Beide Lösungen von (2.36) lassen sich wieder mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Form

$$X_\varepsilon = X_{1/2} + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

asymptotisch berechnen.

Die Frage nach einer geeigneten Reskalierung, die ein singulär gestörtes in ein regulär gestörtes Problem umwandelt, kann man zumindest in unserem einfachen Beispiel systematisch beantworten. Wir verwenden dazu eine Reskalierung der Form

$$x = \delta(\varepsilon)X$$

wobei die Funktion  $\delta(\varepsilon)$  so gewählt ist, dass im Grenzfalle  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Beziehung  $X = \text{ord}(1)$  erfüllt ist, d.h. sowohl  $X$  als auch  $1/X$  bleiben für  $\varepsilon \rightarrow 0$  beschränkt.

Die reskalierte Gleichung lautet dann

$$\varepsilon\delta(\varepsilon)X^2 + \delta(\varepsilon)X - 1 = 0$$

---

<sup>7</sup>Das dies nicht immer der Fall sein muss, sehen wir weiter unten.

und man betrachtet nun *formal* die möglichen Größenordnung von  $\delta(\varepsilon)$ :

- 1) Ist  $\delta \ll 1$ , so erhalten wir

$$\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1 \approx \text{“klein”} + \text{“klein”} - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Vernachlässigen wir die kleinen Terme, so folgt  $-1 \stackrel{!}{=} 0$  und diese Skalierung liefert offensichtlich keine Lösung.

- 2) Für  $\delta \approx 1$  ergibt sich

$$\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1 \approx \text{“klein”} + X - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad X = 1 + \text{“klein”}$$

Diese Lösung approximiert die exakte Lösung von (2.35), die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  beschränkt bleibt.

- 3) Für  $1 \ll \delta \ll 1/\varepsilon$  erhalten wir

$$\frac{\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1}{\delta} \approx \text{“klein”} + X + \text{“klein”} \stackrel{!}{=} 0$$

Dies widerspricht der Annahme, dass  $X = \text{ord}(1)$  gelten soll.

- 4) Mit  $\delta \approx 1/\varepsilon$  folgt

$$\frac{\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1}{\varepsilon\delta^2} \approx X^2 + X + \text{“klein”} \stackrel{!}{=} 0$$

Dies ist eine zulässige Skalierung, denn aus  $X^2 + X = 0$  erhalten wir als eine Lösung  $X = -1$ .

- 5) Für  $1/\varepsilon \ll \delta$  erhalten wir

$$\frac{\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1}{\varepsilon\delta^2} \approx X^2 + \text{“klein”} + \text{“klein”} \stackrel{!}{=} 0$$

und dies widerspricht wie bei 3) der Annahme  $X = \text{ord}(1)$ .

*Sinnvolle* Skalierungen ergeben sich also in den beiden Fällen  $\delta = 1$  und  $\delta = 1/\varepsilon$  und diese beiden Skalierungen liefern gerade die asymptotischen Entwicklungen aus Beispiel 2.2.

Wir haben oben geschrieben, dass reguläre gestörte Probleme in der Regel auf asymptotische Lösungen in Form von Potenzreihenentwicklungen im Parameter  $\varepsilon$  führen, die in der Literatur auch als *Poincaré-Entwicklungen* bezeichnet werden.

Das dies nicht immer der Fall sein muss, auch wenn die Ausgangsgleichung nur ganzzahlige Potenzen in  $\varepsilon$  beinhaltet, demonstrieren wir in den beiden nachfolgenden Beispielen.

BEISPIEL 2.44. Wir betrachten die algebraische Gleichung

$$(2.37) \quad (1 - \varepsilon)x^2 - 2x + 1 = 0$$

Handelt es sich dabei um ein regulär oder ein singular gestörtes Problem? Für  $\varepsilon = 0$  ergibt sich die Gleichung  $x^2 - 2x + 1 = 0$ , d.h. die Gleichung besitzt eine doppelte Nullstelle; für  $\varepsilon \neq 0$  haben wir zwei unterschiedliche Nullstellen.

Im Sinne eines regulär gestörten Problems starten wir mit dem Entwicklungsansatz

$$(2.38) \quad x_\varepsilon = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Gleichung (2.37) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 - \varepsilon x^2 - 2x + 1 &= 1 + 2a_1\varepsilon + \varepsilon^2(2a_2 + a_1) + \dots \\ &\quad - \varepsilon - 2\varepsilon^2 a_1 - \dots \\ &\quad - 2 - 2a_1\varepsilon - 2a_2\varepsilon^2 - \dots + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$(2.39) \quad \varepsilon^0 : 1 - 2 + 1 = 0$$

$$(2.40) \quad \varepsilon^1 : 2a_1 - 1 - 2a_1 = 0$$

Gleichung (2.39) ist also automatisch erfüllt; dagegen läßt sich (2.40) bei konstantem  $a_1$  nicht lösen d.h. der Entwicklungsansatz (2.38) liefert keine Lösung.

Würde man allerdings zulassen, dass der Koeffizient  $a_1$  nicht konstant ist, sondern von  $\varepsilon$  abhängt –  $a_1 = a_1(\varepsilon)$  – und würde gelten  $a_1(\varepsilon) \rightarrow \infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so wäre Gleichung (2.40) im Grenzfall automatisch erfüllt. Damit aber eine Entwicklung der Form  $x_\varepsilon = 1 + a_1(\varepsilon)\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  tatsächlich gegen die ungestörte Lösung konvergiert, muss ebenfalls die Beziehung  $a_1(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow 0$  erfüllt sein.

Lassen wir also zu, dass der Koeffizient  $a_1$  von  $\varepsilon$  abhängt, müssen die beiden folgenden Grenzverhalten gelten:

$$a_1(\varepsilon) \rightarrow \infty, \quad a_1(\varepsilon)\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Dies legt nahe eine asymptotische Entwicklung der Form

$$x_\varepsilon = 1 + b_1\sqrt{\varepsilon} + b_2\varepsilon + b_3\varepsilon^{3/2} + \dots$$

anzusetzen, wobei nun die Koeffizienten  $b_1, b_2, \dots$  als konstant angenommen werden.

Setzt man diesen Ansatz in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt ein Koeffizientenvergleich bei  $\sqrt{\varepsilon}$  eine Bedingung, die automatisch erfüllt ist. Bei der Ordnung  $\varepsilon$  erhalten wir eine Bedingung an  $b_1$ , nämlich

$$b_1^2 = 1$$

und eine asymptotische Entwicklung der exakten Lösungen von (2.37) ist gegeben durch

$$x_\varepsilon = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$$

Die zugehörigen exakten Lösungen lauten

$$x_e = \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon}$$

Die exakten Lösungen lassen sich um  $\varepsilon = 0$  nicht mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung approximieren, da sie als Funktionen von  $\varepsilon$  im Ursprung nicht differenzierbar sind.

Es können auch asymptotische Entwicklungen auftreten, die nicht aus (gebrochenen) Potenzen in  $\varepsilon$  bestehen, So besitzt die Gleichung

$$xe^{-x} = \varepsilon$$

mit  $\varepsilon \ll 1$  zwei Lösungen. Da aus  $\varepsilon \ll 1$  die Beziehung  $e^{-\varepsilon} \approx 1$  folgt, wird eine der beiden Lösungen in der Nähe von  $\varepsilon$  liegen. Aus dem Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$$

folgt, dass die zweite Lösung für  $\varepsilon \rightarrow 0$  divergiert. Eine asymptotische Entwicklung dieser divergenten Lösung ist

$$x_\varepsilon = \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Man sollte sich hier anschaulich klarmachen, wie langsam  $\ln 1/\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  im Vergleich zu  $1/\varepsilon$  divergiert.

Wir kommen nun zu einigen grundlegenden Begriffen aus der Theorie asymptotischer Entwicklungen.

DEFINITION 2.45. Eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^n f_k(x)$  heißt asymptotische Entwicklung von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls für alle  $m \leq n$  gilt

$$(2.41) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^m f_k(x)}{f_m(x)} = 0$$

Wir schreiben dann

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

BEMERKUNG 2.46. Man kann auch unendliche Reihe betrachten und fordert dann, dass die Bedingung (2.41) für alle  $m \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.

Eine spezielle Klasse von asymptotischen Entwicklungen sind solche, die auf Ordnungsfunktionen basieren.

DEFINITION 2.47. Eine Folge  $\{\delta_n(\varepsilon)\}$  nennt man Folge von Ordnungsfunktionen, falls  $\delta_n(\varepsilon)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  in einer Umgebung des Ursprungs definiert und stetig ist und zusätzlich die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_{n+1}(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} = 0$$

erfüllt ist.<sup>8</sup>

Eine asymptotische Entwicklung auf der Basis von Ordnungsfunktionen lautet dann

$$(2.42) \quad f(x) \sim \sum_{k=0}^n a_k \delta_k(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

Die (konstanten) Koeffizienten sind dabei eindeutig bestimmt und ergeben sich aus der Formel

$$a_k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{l=0}^{k-1} a_l \delta_l(x - x_0)}{\delta_k(x - x_0)}$$

<sup>8</sup>Wir können dafür auch schreiben:  $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$ .

Eine Funktion  $f(x)$  kann durchaus mehrere unterschiedliche Entwicklungen besitzen. So gilt etwa für  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\tan x &\sim x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \tan x &\sim \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin^5 x\end{aligned}$$

Im ersten Fall beziehen wir uns auf die Ordnungsfunktionen  $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^{2n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2$ ; im zweiten Fall verwendet man

$$\delta_n(\varepsilon) = \sin^{2n+1} \varepsilon$$

Mehrere unterschiedliche Funktionen können identische asymptotische Entwicklungen besitzen: es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned}\exp(\varepsilon) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} & (\varepsilon \rightarrow 0) \\ \exp(\varepsilon) + \exp(-1/\varepsilon) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} & (\varepsilon \searrow 0)\end{aligned}$$

Weiter gilt: Asymptotische Entwicklungen kann man bezüglich des Parameters  $\varepsilon$  integrieren, um eine asymptotische Entwicklung bezüglich des entsprechenden Integrals zu berechnen. Dagegen lassen sich asymptotische Entwicklungen aber im allgemeinen *nicht* differenzieren.

Zum Abschluß dieses Abschnittes geben wir noch ein klassisches Beispiel zur Approximationsgüte und Effektivität asymptotischer Entwicklungen.

BEISPIEL 2.48. Die sogenannte *Fehlerfunktion*  $\operatorname{erf}(x)$  ist definiert über das Integral

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Die Fehlerfunktion ist von zentraler Bedeutung für Berechnungen in der *Statistik*, da sie die Verteilungsfunktion der *Gaußverteilung*, also das Integral der *Glockenkurve* ist und sie wird zum Beispiel zur statistischen Beschreibung von Meßungenauigkeiten verwendet.

Die Funktionswerte der Fehlerfunktion lassen sich nur approximativ mit Hilfe von Reihenentwicklungen berechnen. Für kleine Werte von  $x$  kann man etwa den Integranden in eine Taylor-Reihe entwickeln und anschließend die einzelnen Terme der Taylor-Reihe integrieren. Damit erhält man die klassische (konvergente) Reihenentwicklung

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{219}x^9 - \dots \right)$$

Da sich eine *alternierende* Potenzreihe ergibt, benötigt man zur Approximation der Funktionswerte für  $x \geq 1$  eine große Zahl von Entwicklungstermen: um eine Genauigkeit von  $10^{-5}$  einzuhalten sind dies für  $x = 1$  acht Terme, für  $x = 3$  bereits 31 Terme und für  $x = 5$  sogar 75 Terme.

Eine *divergente* asymptotische Entwicklung, die für  $x > 1$  wesentlich genauer ist, ist gegeben durch

$$(2.43) \quad \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + O(x^{-8}) \right)$$

Bei dieser asymptotischen Entwicklung benötigt man für  $x = 5/2$  *nur* drei Terme, um eine Genauigkeit von  $10^{-5}$  zu erreichen. Die Herleitung der asymptotischen Entwicklung geschieht dabei über partielle Integration: zunächst schreiben wir

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

und verwenden folgende partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2} dt &= \int_x^\infty \frac{(-2t)e^{-t^2}}{(-2t)} dt = \frac{e^{-t^2}}{(-2t)} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x^2}}{(-2x)} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \end{aligned}$$

Eine wiederholte Anwendung der partiellen Integration liefert dann die asymptotische Entwicklung (2.43).

### 2.3. Grenzsichtverhalten bei singular gestörten Differentialgleichungen.

In diesem Abschnitt wollen wir das Prinzip asymptotischer Entwicklungen auf die näherungsweise Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ausdehnen, wobei wir uns insbesondere mit sogenannten *singular-gestörten* Gleichungen beschäftigen werden.

Solche Modelle treten zum Beispiel in der Biochemie bei der Modellierung des Stoffwechsels lebender Organismen auf und werden dort als die sogenannte *Michaelis-Menten Kinetik* bezeichnet. Der Hintergrund dieser Modelle ist folgender: in jedem lebenden Organismus finden ständig biochemische Reaktionen, also Stoffumwandlungen, statt. Dabei sind häufig spezielle Proteine (Eiweißverbindungen), sogenannte *Enzyme* involviert. Enzyme sind hochmolekulare Eiweißverbindungen die biochemische Vorgänge als *Biokatalysatoren* beschleunigen oder erst ermöglichen. Ein Bestandteil des menschlichen Stoffwechsels ist etwa der Abbau von Glukose zum Zwischenprodukt Brenztraubensäure (Glykolyse) und diese Form der Stoffumwandlung benötigt 10 unterschiedliche Enzyme.

In der Biochemie wird nun das folgende grundlegende Modell einer Enzymreaktion betrachtet: ein Enzym  $E$  reagiert mit einer anderen chemischen Verbindung, einem sogenannten Substrat  $S$ , und bildet einen chemischen Komplex  $C$ , der anschließend in ein Molekül  $P$  (Produkt) umgewandelt wird, wobei wieder ein Enzym  $E$  freigesetzt wird. Schematisch läßt sich diese Reaktionskette in der Form



schreiben. In der Reaktionskette (2.44) drückt der Doppelpfeil aus, das die angegebene chemische Reaktion in beide Richtungen ablaufen, kann, der Einzelpfeil gibt entsprechend

die einzig vorhandene Reaktionsrichtung an.

Ein mathematische Modell für die Enzymreaktion (2.44) läßt sich unter Zuhilfenahme des *Massenwirkungsgesetzes* (englisch: law of mass action) herleiten, welches angibt, dass die Rate, mit der bei einer Reaktion neue Stoffe gebildet werden, stets proportional zum Produkt der Konzentrationen der Stoffe ist, die die Reaktion auslösen.

Bezeichnen wir also im folgenden mit  $e = e(t)$ ,  $s = s(t)$ ,  $c = c(t)$  und  $p = p(t)$  die (zeitabhängigen) Konzentrationen der Spezies  $E$ ,  $S$ ,  $C$  und  $P$ , so ergibt sich aus dem Massenwirkungsgesetz das Differentialgleichungssystem

$$(2.45) \quad \frac{ds}{dt} = -\alpha e(t)s(t) + \delta c(t)$$

$$(2.46) \quad \frac{de}{dt} = -\alpha e(t)s(t) + \delta c(t) + \kappa c(t)$$

$$(2.47) \quad \frac{dc}{dt} = \alpha e(t)s(t) - \delta c(t) - \kappa c(t)$$

$$(2.48) \quad \frac{dp}{dt} = \kappa c(t)$$

wobei die (konstanten) Parameter  $\alpha$ ,  $\delta$  und  $\kappa$  die Ratenkonstanten bezeichnen.

Aus der Struktur des Differentialgleichungssystems (2.45)–(2.48) erkennt man leicht, dass das System eine Reihe einfacher erster Integrale (siehe Abschnitt 1.3) besitzt: addiert man die beiden Gleichungen (2.46) und (2.47), so folgt die Beziehung

$$(2.49) \quad \frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0$$

und daher gilt  $e(t) + c(t) = \text{const.}$  Gleichzeitig ergibt die Addition von (2.45), (2.47) und (2.48) die Gleichung  $s(t) + c(t) + p(t) = \text{const.}$

Aufgrund dieser beiden ersten Integrale läßt sich das System (2.45)–(2.48) auf ein System von nur zwei Gleichungen reduzieren, wobei im Prinzip bis auf die in (2.49) vorkommenden Konzentrationen jeweils zwei Konzentrationen aus dem System (2.45)–(2.48) beliebig kombiniert werden können. Wir betrachten im weiteren Verlauf die beiden Gleichungen

$$(2.50) \quad \frac{ds}{dt} = -\alpha(e_0 - c(t))s(t) + \delta c(t)$$

$$(2.51) \quad \frac{dc}{dt} = \alpha(e_0 - c(t))s(t) - (\delta + \kappa)c(t)$$

Ein in der Biochemie gängige Modellvereinfachung für das nichtlineare System (2.50), (2.51), die allerdings für eine große Klasse von Parametern  $\alpha$ ,  $\delta$  und  $\kappa$  eigentlich unzulässig ist, ist die sogenannte *Michaelis–Menten Kinetik*. Bei dieser Vereinfachung geht man davon aus, dass sich die Konzentration  $c(t)$  in einem Gleichgewichtszustand befindet, d.h. man postuliert  $dc/dt = 0$  und erhält aus der Gleichung (2.51) die Beziehung

$$(2.52) \quad c(t) = \frac{e_0 s(t)}{K_M + s(t)}$$

wobei

$$K_M = \frac{\delta + \kappa}{\alpha}$$

die sogenannte *Michaelis–Menten Konstante* bezeichnet. Summiert man nun die beiden Gleichungen (2.50) und (2.51) und setzt die Beziehung (2.52) ein, so ergibt sich das als Michaelis–Menten Kinetik bezeichnete Modell

$$(2.53) \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{v_{\max}s}{K_M + s}$$

mit  $v_{\max} = \kappa e_0$ .

Die Unterschiede zwischen dem exakten Modell (2.50), (2.51) und der in der Biochemie häufig verwendeten Michaelis–Menten Kinetik (2.53) können je nach Wahl der Parameter  $\alpha$ ,  $\delta$  und  $\kappa$  sowie den Anfangsbedingungen sehr groß werden. Im Anhang findet man einige mit MAPLE durchgeführten Testrechnungen für einige typischen, in der Literatur verwendeten Parameterwerte.

In den Fällen, in denen die Modellvereinfachung (2.53) große Abweichungen von den vollen Gleichungen (2.50) und (2.51), besitzt sowohl die Konzentration des Substrats  $S$  als auch des Komplexes  $C$  in der Nähe der Zeit  $t = 0$  ein sogenanntes Grenzschichtverhalten, bei dem sich auf kleinen Zeitintervallen signifikante Konzentrationsänderungen einstellen. Dieses Grenzschichtverhalten besitzt die Modellvereinfachung offensichtlich nicht und kann damit den Konzentrationsverlauf nur unzureichend wiedergeben.

Typischerweise zeigen singular–gestörte Differentialgleichungen ein solches Grenzschichtverhalten – also solche Differentialgleichungen bei denen die höchste Ableitung der Gleichung mit einem kleinen Parameter  $\varepsilon > 0$  multipliziert wird, so dass sich die Ordnung der Differentialgleichung im Grenzfall  $\varepsilon = 0$  um Eins verringert.

Wir wollen uns dies wiederum an einem (einfachen) Beispiel veranschaulichen und uns in diesem Beispiel ebenfalls mit der Herleitung einer asymptotischen Entwicklung für die Lösung der Differentialgleichung beschäftigen.

Gegeben sei das auf dem Intervall  $(0, 1)$  formulierte Randwertproblem zweiter Ordnung

$$(2.54) \quad \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}(x) + \frac{dy}{dx}(x) = \frac{dh}{dx}(x)$$

$$(2.55) \quad y(0) = 0$$

$$(2.56) \quad y(1) = 1$$

mit dem kleinen Parameter  $\varepsilon > 0$ .

Im Grenzwert  $\varepsilon = 0$  geht das obige Randwertproblem in eine Differentialgleichung erster Ordnung über, für die nur *eine* Randbedingung (besser Anfangsbedingung) vorgeschrieben werden kann. Wir entscheiden uns jetzt zunächst für die rechte Randbedingung, d.h. im Grenzwert  $\varepsilon = 0$  betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x) &= \frac{dh}{dx}(x) \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Für dieses Problem lautet die exakte Lösung

$$y(x) = h(x) - h(1) + 1$$

Wir versuchen nun analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 2.2 eine asymptotische Entwicklung der Lösung für  $\varepsilon > 0$  herzuleiten, d.h. wir suchen eine Reihendarstellung der

Form

$$y(x; \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^p \varepsilon^n f_n(x)$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung (2.54) ein, ergibt sich

$$\sum_{n=0}^p (\varepsilon^{n+1} f_n''(x) + \varepsilon^n f_n'(x)) = h'(x)$$

Berücksichtigen wir zudem (nur) die rechte Randbedingung, so muss die Beziehung

$$\sum_{n=0}^p \varepsilon^n f_n(1) = 1$$

gelten. Diese Gleichungen für die Entwicklungsfunktionen  $f_n(x)$  lassen sich nun sukzessiv auflösen, in dem man einen Koeffizientenvergleich in Potenzen von  $\varepsilon$  durchführt.

Zunächst ergibt sich in nullter Ordnung für die Funktion  $f_0$  die Gleichung

$$f_0' = h', \quad f_0(1) = 1$$

Die höheren Ordnungen ergeben die Gleichungen

$$f_{n-1}'' + f_n' = 0, \quad f_n(1) = 0$$

und man erhält damit

$$\begin{aligned} f_0(x) &= h(x) - h(1) + 1 \\ f_n(x) &= (-1)^n \left( h^{(n)}(x) - h^{(n)}(1) \right) \end{aligned}$$

Die Darstellung für  $f_n(x)$  läßt sich dabei direkt per Induktion beweisen. Daraus folgt die asymptotische Entwicklung

$$(2.57) \quad y(x; \varepsilon) \approx 1 + \sum_{n=0}^p (-\varepsilon)^n \left( h^{(n)}(x) - h^{(n)}(1) \right)$$

Man sollte sich hier klarmachen, dass die asymptotische Entwicklung (2.57) die Randbedingung (2.55) nicht erfüllt, die ja gerade bei der Herleitung der Entwicklung nicht berücksichtigt wurde. Wir erwarten vielmehr, dass die Lösung des Problems (2.54)–(2.56) ein Grenzschichtverhalten bei  $x = 0$  aufweist, d.h. die Lösung fällt dort in einer Umgebung von  $x = 0$  rapide auf Null ab und dieses Verhalten wird durch die asymptotische Entwicklung (2.57) nicht erfaßt. Wir sprechen daher auch von einer *äußeren asymptotischen Entwicklung*, die nur außerhalb einer Grenzschicht um  $x = 0$  gültig ist.

Wir versuchen nun, eine asymptotische Beschreibung des Grenzschichtverhaltens der Lösung von (2.54)–(2.56) um  $x = 0$  herzuleiten. Unter der Annahme, dass die Grenzschichtdicke von der Ordnung  $\varepsilon$  ist, erscheint es sinnvoll eine *Skalierung* der Grenzschicht vorzunehmen und das Problem (2.54)–(2.56) in der skalierten Variablen  $\xi$  mit

$$(2.58) \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

auszudrücken. Mit dieser Skalierung wird die Grenzschicht auf einen Bereich der Länge  $O(1)$  gestreckt und die Randbedingung (2.56) für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nach  $\xi \rightarrow \infty$  verschoben.

Wir definieren nun mit Hilfe der Skalierung (2.58) eine neue Funktion  $\bar{y}(\xi; \varepsilon)$  über die Beziehung

$$y(x; \varepsilon) = y(\varepsilon \cdot \xi; \varepsilon) = \bar{y}(\xi; \varepsilon)$$

und erhalten unter Verwendung der Kettenregel

$$\frac{d\bar{y}}{d\xi} = \varepsilon \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Damit transformiert sich die Gleichung (2.54) zu

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2}(\xi) + \frac{d\bar{y}}{d\xi}(\xi) = \varepsilon \frac{dh}{dx}(\varepsilon \cdot \xi)$$

In der skalierten Variablen  $\xi = x/\varepsilon$  ist dies nun eine *regulär gestörte* Differentialgleichung, da sich die Ordnung der Gleichung für  $\varepsilon = 0$  *nicht* reduziert.

Wir betrachten also nun das regulär gestörte Problem innerhalb der Grenzschicht

$$(2.59) \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2}(\xi) + \frac{d\bar{y}}{d\xi}(\xi) = \varepsilon \frac{dh}{dx}(\varepsilon \cdot \xi)$$

wobei wir nur die Randbedingung  $\bar{y}(0) = 0$  am linken Rand vorschreiben und suchen nun nach einer asymptotischen Entwicklung von  $\bar{y}$  der Form

$$\tilde{y}(x; \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^q \varepsilon^n g_n(x)$$

Bevor wir diesen Ansatz in die Gleichung (2.59) einsetzen, entwickeln wir die rechte Seite von (2.59) in einer Taylor-Entwicklung um den Entwicklungspunkt  $\varepsilon = 0$ :

$$h_x(\varepsilon\xi) = \sum_{n=1}^M \varepsilon^{n-1} \xi^{n-1} \frac{h^{(n)}(0)}{(n-1)!} + o(\varepsilon^{M-1} \xi^{M-1})$$

Durch einen Koeffizientenvergleich ergeben sich dann die folgenden Bestimmungsgleichungen der asymptotischen Entwicklung

$$(2.60) \quad g_0'' + g_0' = 0, \quad g_0(0) = 0$$

$$(2.61) \quad g_n'' + g_n' = \frac{h^{(n)}(0)}{(n-1)!} \xi^{n-1}, \quad g_n(0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

Die Gleichungen (2.60) und (2.61) lassen sich explizit lösen:

$$g_0(\xi) = A_0 (1 - e^{-\xi})$$

und

$$g_n(\xi) = A_n (1 - e^{-\xi}) + (-1)^n h^{(n)}(0) \sum_{k=1}^n \frac{(-\xi)^k}{k!}$$

und eine asymptotische Entwicklung der Lösung innerhalb der Grenzschicht lautet damit

$$(2.62) \quad \tilde{y}(\xi, \varepsilon) \sim \left(1 - e^{-\xi}\right) \sum_{n=0}^q A_n \varepsilon^n + \sum_{n=1}^q (-\varepsilon)^n h^{(n)}(0) \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-\xi)^k}{k!} \right)$$

Weiter gilt die Beziehung

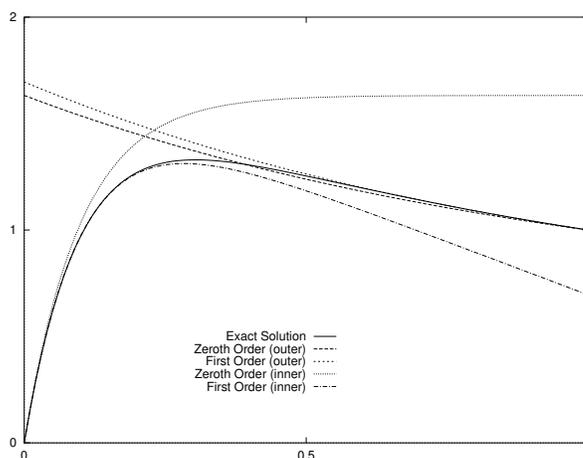
$$y(x; \varepsilon) = \tilde{y}\left(\frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon\right)$$

wobei die Integrationskonstanten  $A_0, \dots, A_q$  noch unbekannt sind.

Wir haben jetzt zwei unterschiedliche asymptotische Lösungen für das Modellproblem (2.54)–(2.56) berechnet:

- eine *äußere Entwicklung* (2.57), die außerhalb der Grenzschicht bei  $x = 0$  gültig ist und
- eine *innere Entwicklung* (2.62), die das Lösungsverhalten innerhalb der Grenzschicht beschreibt.

In der Abbildung 2.2 sind die exakte Lösung sowie jeweils die ersten beiden Terme der inneren und äußeren Entwicklung für einige typische Werte von  $A_0$  und  $A_1$  und die Funktion  $h(x) = e^{-x}$  dargestellt.



**Abbildung 2.2:** Exakte Lösung für  $\varepsilon = 0.1$  und die beiden führende Terme der inneren und äußeren Entwicklung.

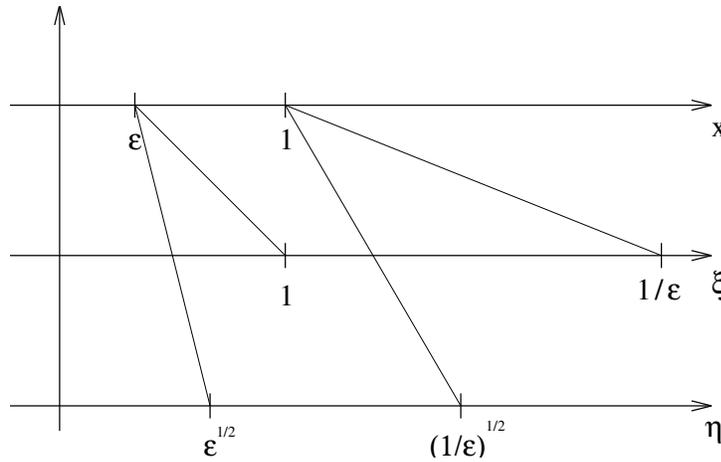
Man erkennt, dass bereits die ersten Terme der asymptotischen Entwicklungen (2.57) und (2.62) in ihren jeweiligen Gültigkeitsbereichen die tatsächliche Lösung gut approximieren. Es bleibt nun die Frage, wie die Konstanten  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  der inneren Entwicklung (2.62) bestimmt werden können. Diese Frage ist verknüpft mit einer *Kopplungsprozedur* zwischen der inneren und äußeren Entwicklung zu einer *einzigsten* asymptotischen Entwicklung, die die tatsächliche Lösung auf dem gesamten Intervall  $[0, 1]$  hinreichend genau approximiert.

Hierzu formulieren wir zunächst die Kopplung beider Entwicklungen mit Hilfe einer Zwischenvariablen  $\eta$  (englisch: *intermediate variable*): sei dazu  $\eta$  gegeben durch

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^\alpha} = \xi \varepsilon^{\alpha-1}$$

wobei  $0 < \alpha < 1$  gelten soll. Wir stellen nun beide Entwicklung (2.57) und (2.62) in der neuen Variablen  $\eta$  dar und verlangen, dass beide Entwicklungen asymptotisch gesehen identisch sind.

Die Bedeutung der neuen Variablen  $\eta$  kann man sich wie in Abbildung 2.3 für  $\alpha = 1/2$  veranschaulichen:



**Abbildung 2.3:** Innere Variable  $\xi$ , äußere Variable  $x$  und zugehörige Zwischenvariable  $\eta$ .

Für festes  $\eta$  gelten im Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Beziehungen  $x \rightarrow 0$  und  $\xi \rightarrow \infty$  und

$$\varepsilon \ll x \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^{1-\alpha} \ll \eta \ll \varepsilon^{-\alpha},$$

Für die Darstellung der äußeren Entwicklung in der Zwischenvariablen  $\eta$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} y(x; \varepsilon) &= y(\varepsilon^\alpha \eta; \varepsilon) \\ &= 1 + h(x) - h(1) - \varepsilon (h'(x) - h'(1)) + \dots \\ &= 1 - h(1) + \varepsilon h'(1) + h(\varepsilon^\alpha \eta) - \varepsilon h'(\varepsilon^\alpha \eta) + \dots \\ &= 1 - h(1) + \varepsilon h'(1) + h(0) + \varepsilon^\alpha \eta h'(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^{2\alpha} \eta^2 h''(0) + \dots \\ &\quad - \varepsilon (h'(0) + \varepsilon^\alpha \eta h''(0) + \dots) \\ &= 1 - h(1) + h(0) + \varepsilon^\alpha \eta h'(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^{2\alpha} \eta^2 h''(0) + \dots \\ &\quad + \varepsilon (h'(1) - h'(0)) - \varepsilon^{1+\alpha} \eta h''(0) - \frac{1}{2} \varepsilon^{1+\alpha} \eta^2 h'''(0) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^2 (h''(0) - h''(1)) + \dots \end{aligned}$$

Die innere Entwicklung in der Variablen  $\eta$  lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\varepsilon^{\alpha-1}\eta, \varepsilon) &= \left(1 - e^{-\varepsilon^{\alpha-1}\eta}\right) \sum_{n=0}^Q A_n \varepsilon^n \\ &+ \sum_{n=1}^Q (-\varepsilon)^n h^{(n)}(0) \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-\varepsilon^{\alpha-1}\eta)^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir nun alle exponentiellen Terme, da diese schneller verschwinden als jede Potenz in  $\varepsilon$  und setzen wir beide Entwicklungen bezüglich der Variablen  $\eta$  gleich, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - h(1) + h(0) \\ A_1 &= h'(1) - h'(0) \\ A_2 &= h''(1) - h''(0) \end{aligned}$$

Eine andere Möglichkeit innere und äußere Entwicklungen aneinander anzupassen ist die *Kopplungsregel von van Dyke*, die häufig einfacher anzuwenden ist als die Kopplung über eine Zwischenvariable. Weiter liefert diese Methode eine einfache Möglichkeit eine einzelne asymptotische Entwicklung anzugeben, die im *gesamten* Definitionsbereich gültig ist. Wir schreiben zunächst die ersten  $p+1$  Terme der äußeren Entwicklung als

$$E_p f = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n f_n(x)$$

beziehungsweise die ersten  $q+1$  Terme der inneren Entwicklung

$$H_q f = \sum_{n=0}^q \varepsilon^n g_n(\xi)$$

Die *Regel von van Dyke* lautet dann

$$E_p H_q f = H_q E_p f$$

d.h. die inneren und äußeren Entwicklungen sollen *kommutieren*. Der Operator  $E_p H_q$  bedeutet dabei, dass wir zunächst die ersten  $q+1$  Terme der inneren Entwicklung nehmen, diese anschliessend mittels der Beziehung  $\xi = x/\varepsilon$  umschreiben und dann bei der entstehenden Entwicklung nur die ersten  $p+1$  Terme einer äußeren Entwicklung beibehalten. Wir veranschaulichen dies anhand unseres Modellproblems an zwei Beispielen.

**BEISPIEL 2.49.** Die jeweils ersten Terme der inneren und äußeren Entwicklung waren gegeben durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= h(x) - h(1) + 1 \\ g_0(\xi) &= A_0 \left(1 - e^{-\xi}\right) \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Regel von van Dyke mit  $p = q = 0$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E_0 H_0 f &= E_0 \left( A_0 \left( 1 - e^{-\xi} \right) \right) = E_0 \left( A_0 \left( 1 - e^{-x/\varepsilon} \right) \right) = A_0 \\ H_0 E_0 f &= H_0 (h(x) - h(1) + 1) = H_0 (h(\varepsilon\xi) - h(1) + 1) \\ &= h(0) - h(1) + 1 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung  $E_0 H_0 f = H_0 E_0 f$  ergibt sich

$$A_0 = h(0) - h(1) + 1$$

also das identische Resultat wie bei der Kopplung mit einer Zwischenvariablen.

BEISPIEL 2.50. Für  $p = q = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} E_1 H_1 f &= E_1 \left( A_0 \left( 1 - e^{-\xi} \right) + \varepsilon \left( A_1 \left( 1 - e^{-\xi} \right) + h'(0)\xi \right) \right) \\ &= E_1 \left( A_0 \left( 1 - e^{-x/\varepsilon} \right) + \varepsilon \left( A_1 \left( 1 - e^{-x/\varepsilon} \right) + h'(0)\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= A_0 + xh'(0) + \varepsilon A_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H_1 E_1 f &= H_1 (h(x) - h(1) + 1 - \varepsilon(h'(x) - h'(1))) \\ &= H_1 (h(\varepsilon\xi) - h(1) + 1 - \varepsilon(h'(\varepsilon\xi) - h'(1))) \\ &= h(0) - h(1) + 1 - \varepsilon\xi h'(0) - \varepsilon h'(0) + \varepsilon h'(1) \\ &= h(0) - h(1) + 1 - xh'(0) + \varepsilon(h'(1) - h'(0)) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sie die beiden Bedingungsgleichungen

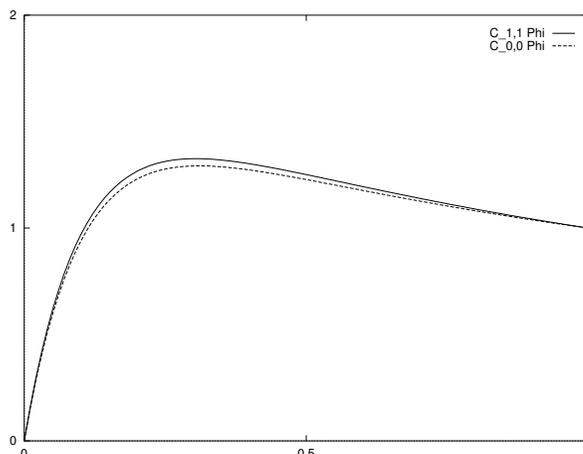
$$\begin{aligned} A_0 &= h(0) - h(1) + 1 \\ A_1 &= h'(1) - h'(0) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Regel von van Dyke kann man nun auch direkt eine kombinierte asymptotische Entwicklung angeben, die auf dem ganzen Definitionsbereich gültig ist

$$C_{p,q} f = E_p f + H_q f - E_p H_q f$$

Wir erhalten etwa für unser Modellproblem die kombinierte asymptotische Entwicklung (siehe auch Abbildung 2.4)

$$\begin{aligned} C_{0,0} f &= E_0 f + H_0 f - E_0 H_0 f \\ &= h(x) - h(1) + 1 + A_0 \left( 1 - e^{-x/\varepsilon} \right) - A_0 \\ &= h(x) - h(1) + 1 - (1 - h(1) + h(0)) e^{-x/\varepsilon} \end{aligned}$$



**Abbildung 2.4:** Zusammengesetzte asymptotische Entwicklung  $C_{0,0}f$  und  $C_{1,1}f$ .

Bei der asymptotischen Behandlung des Randwertproblems (2.54)–(2.56) haben wir einige Dinge vorausgesetzt, die im allgemeinen Fall nicht *a-priori* bekannt sind. Dies betrifft vor allem die Frage nach der Lage und der Größe oder Dicke von Grenzschichten. Beide Fragen können häufig analog zu der asymptotischen Behandlung algebraischer Gleichungen mit Hilfe einer *Reskalierung* beantwortet werden und dies wollen wir wiederum für unser Modellproblem exemplarisch vorstellen. Wir setzen dazu

$$x = \delta(\varepsilon)\xi$$

mit einer speziellen Funktion  $\delta(\varepsilon)$  und betrachten im Folgenden nur den Spezialfall

$$x = \varepsilon^\alpha \xi \quad (\alpha > 0)$$

Die *reskalierte* Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.54) lautet dann

$$(2.63) \quad \tilde{y}_{\xi\xi} + \varepsilon^{\alpha-1} \tilde{y}_\xi = \varepsilon^{2\alpha-1} h_x(\varepsilon^\alpha \xi),$$

Für verschiedene Werte von  $\alpha$  erhält man damit eine Balance unterschiedlicher Terme der Gleichung (2.63). Die interessanten Reskalierungen ergeben sich stets, wenn *mindestens* zwei Terme miteinander balanciert sind:

- für  $\alpha = 0$  haben wir eine Balance zwischen den beiden Termen  $y'$  und  $h'$ ,
- für  $0 < \alpha < 1$  ist allein der Term  $y'$  dominant,
- für  $\alpha = 1$  sind die beiden Terme  $y''$  und  $y'$  balanciert,
- für  $\alpha > 1$  ist der Term  $y''$  dominant

Anschaulich gesehen erhalten wir also

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon \Phi_{xx} & + & \Phi_x & = & h_x \\ \alpha = 0 & & & & \text{Balance} \\ 0 < \alpha < 1 & & & & \text{dominant} \\ \alpha = 1 & & & & \text{Balance} \\ 1 < \alpha & & & & \text{dominant} \end{array}$$

Die interessanten Skalierungen der Gleichung sind also

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = 1$$

die man im Englischen auch als *distinguished limits* bezeichnet und die gerade unsere reskalierten Gleichungen zur Herleitung einer inneren und äußeren Entwicklung lieferten. Die Reskalierung mit  $\alpha = 1$  bedeutet, dass die Grenzschicht eine Dicke der Ordnung  $O(\varepsilon)$  hat. Mit Hilfe einer Reskalierung kann auch entschieden werden, dass bei  $x = 1$  kein Grenzschichtverhalten vorliegt, wobei wir hier nicht auf die näheren Details eingehen wollen. Wir schliessen nun den Abschnitt zum Grenzschichtverhalten bei singular gestörten Differentialgleichungen mit drei weiteren Modellproblemen ab.

BEISPIEL 2.51. Wir betrachten auf dem Intervall  $[0, 1]$  das singular gestörte Randwertproblem

$$\varepsilon^2 y'' - y = 1$$

mit den beiden Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0$$

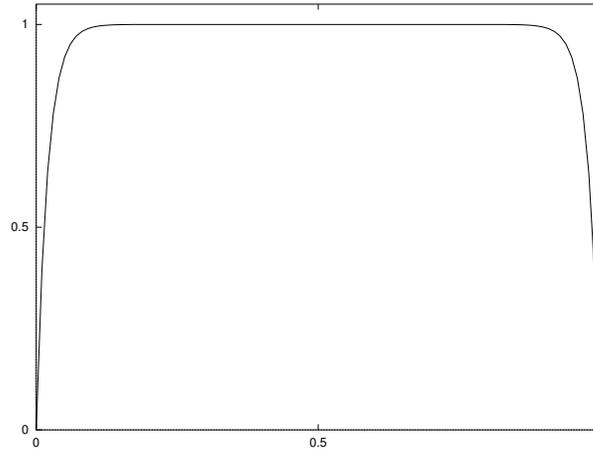
Die Reskalierungen

$$x = \varepsilon \xi \quad \text{und} \quad 1 - x = \varepsilon \xi$$

ergeben exponentiell abfallende Lösung bei  $x = 0$  und  $x = 1$ .

Das bedeutet, dass das singular gestörte Problem zwei Grenzschichten besitzt, nämlich bei  $x = 0$  und  $x = 1$ :

$$y(x) \sim 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}$$



**Abbildung 2.5:** Lösung des Modellproblems für  $\varepsilon = 0.02$ .

BEISPIEL 2.52. Wir betrachten auf dem Intervall  $[-1, 1]$  die Gleichung

$$\varepsilon^2 y'' + 2y(1 - y^2) = 0$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$y(-1) = -1 \quad y(1) = 1$$

Im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich die algebraische Gleichung

$$y(1 - y^2) = 0$$

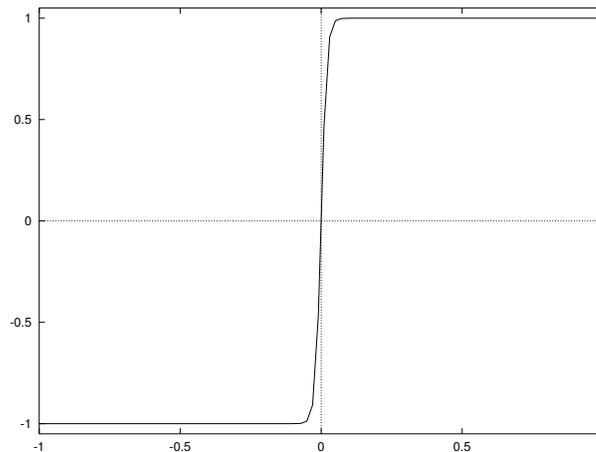
mit den drei Lösungen

$$y = 0, \quad y = 1 \quad \text{und} \quad y = -1$$

Für  $\varepsilon \ll 1$  besitzt die Lösung eine Grenzschicht bei  $x = 0$  und es gilt

$$y \sim \tanh \frac{x}{\varepsilon}$$

d.h. Grenzschichten befinden sich nicht stets in der Nähe des Randes.



**Abbildung 2.6:** Lösung des Modellproblems für  $\varepsilon = 0.02$ .

**2.4. Mehrskalene Phänomene bei Differentialgleichungen.** Bei dem im letzten Abschnitt 2.3 diskutierten Grenzschichtverhalten von singular gestörten Differentialgleichungen hatten wir Modelle untersucht, die Phänomene auf unterschiedlichen Skalen beschreiben, wobei die Skalen aber stets räumlich (oder zeitlich) voneinander getrennt sind. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem Modellproblem, bei dem unterschiedliche Skalen simultan in Raum oder Zeit auftreten.

Gegeben sei der (nichtlineare) van-der-Pol Oszillator. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem folgenden Modellproblem:

$$(2.64) \quad \ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0$$

$$(2.65) \quad x(0) = 1$$

$$(2.66) \quad \dot{x}(0) = 0$$

mit dem kleinen Parameter  $\varepsilon \ll 1$ . Zur Erinnerung sei erwähnt, dass der Fall  $\varepsilon \rightarrow \infty$  auf ein singular gestörtes Problem mit Grenzschichten führt, das mit den Methoden aus Abschnitt 2.3 bearbeitet werden muß. Mit der Annahme  $\varepsilon \ll 1$  ist (2.64)–(2.65) ein nichtlineares, aber regulär gestörtes Problem des *harmonischen Oszillators*.

Wir wollen uns zunächst das ungestörte Problem mit  $\varepsilon = 0$  anschauen: das ungestörte Problem

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = 1, \quad \dot{x}_0(0) = 0$$

besitzt die Lösung  $x_0(t) = \cos t$ . Eine naive Vorgehensweise für kleine Parameter  $\varepsilon$  wäre damit die Suche nach einer asymptotischen Entwicklung – zum Beispiel erster Ordnung – der Form:

$$x(t; \varepsilon) \sim \cos t + \varepsilon x_1(t)$$

Wir setzen daher die formale Entwicklung

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n x_n(t)$$

in die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0$$

ein und erhalten die Gleichung

$$\sum_{n=0}^p \left( \varepsilon^n \ddot{x}_n + \varepsilon^{n+1} \dot{x}_n \left( \left( \sum_{n=0}^p \varepsilon^n x_n(t) \right)^2 - 1 \right) + \varepsilon^n x_n(t) \right) = 0$$

Der nächste Schritt ist wieder ein Koeffizientenvergleich in Potenzen von  $\varepsilon$ : für  $\varepsilon^0$  erhalten wir die Gleichung

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0$$

mit den beiden Anfangsbedingungen

$$x_0(0) = 1, \quad \dot{x}_0(0) = 0$$

und die Lösung lautet wie erwartet

$$x_0(t) = \cos t$$

Für  $\varepsilon^1$  ergibt sich für die Entwicklungsfunktion erster Ordnung die Gleichung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\dot{x}_0(x_0^2 - 1)$$

Unter Verwendung der nullten Näherung  $x_0(t) = \cos t$  berechnen wir die rechte Seite der obigen Gleichung

$$\dot{x}_0(x_0^2 - 1) = \sin^3 t$$

und erhalten demnach die Gleichung erster Ordnung

$$(2.67) \quad \ddot{x}_1 + x_1 = -\sin^3 t$$

Die Gleichung (2.67) beschreibt eine sogenannte *erzwungene Schwingung*, d.h. der ungestörte harmonische Oszillator auf der linken Seite der Gleichung wird durch eine äußere Schwingung – die Inhomogenität auf der rechten Seite – in Anregung gebracht. Dies führt im sogenannten *Resonanzfall*, d.h. eine Anregungsfrequenz der Inhomogenität fällt mit der Eigenfrequenz des ungestörten harmonischen Oszillator zusammen, zu einer in der Zeit *monoton steigenden* Amplitude in der angeregten Resonanzschwingung. Es muss also überprüft werden, ob in der Gleichung (2.67) der Resonanzfall eintritt.

Die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen liefern zunächst

$$-\sin^3 t = \frac{1}{4} \sin 3t - \frac{3}{4} \sin t$$

und wir erhalten aus Gleichung (2.67) die Darstellung

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{4} \sin 3t - \frac{3}{4} \sin t$$

Diese Gleichung läßt unter der Vorgabe der Anfangsbedingungen  $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$  lösen:

$$x_1(t) = \frac{3}{8} (t \cos t - \sin t) - \frac{1}{32} (\sin 3t - 3 \sin t)$$

Eine asymptotische Darstellung der Lösung von (2.64)–(2.66) lautet also

$$x(t; \varepsilon) \sim \cos t + \varepsilon \left[ \frac{3}{8} (t \cos t - \sin t) - \frac{1}{32} (\sin 3t - 3 \sin t) \right]$$

Im Langzeitverhalten bedeutet dies aber

$$\begin{aligned} x(1/\varepsilon, \varepsilon) &\sim \cos(1/\varepsilon) + \varepsilon \left[ \frac{3}{8} \left( \frac{1}{\varepsilon} \cos(1/\varepsilon) - \sin(1/\varepsilon) \right) - \frac{1}{32} \left( \sin \left( \frac{3}{\varepsilon} \right) - 3 \sin(1/\varepsilon) \right) \right] \\ &\sim \frac{11}{8} \cos(1/\varepsilon) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

d.h. dies ist für  $t = O(1/\varepsilon)$  *keine* asymptotische Entwicklung der exakten Lösung für kleine  $\varepsilon$ , denn eine solche Entwicklung müsste die Form  $x(1/\varepsilon; \varepsilon) \sim \cos(1/\varepsilon) + O(\varepsilon)$  haben.

Die naive Vorgehensweise zur Herleitung einer asymptotischen Lösung bricht also zusammen und dies liegt daran, dass in der Gleichung (2.64) *simultan* zwei Phänomene auf unterschiedlichen Zeitskalen aktiv sind. Ein Ausweg ist die Verwendung einer *Mehrskalentwicklung*, d.h. wir definieren zwei Zeitskalen:

$$\tau = t, \quad T = \varepsilon t$$

Die Zeitskala

- definiert durch  $\tau$  ist eine *schnelle* Skala und beschreibt die Schwingungen des van-der-Pol Oszillators,
- definiert durch  $T$  ist eine *langsame* Skala und beschreibt Änderungen der Amplitude beziehungsweise eine Phasenverschiebung auf der langsamen Skala.

Wir verwenden daher den *Mehrskalensatz*

$$x(t; \varepsilon) = x(\tau, T; \varepsilon)$$

und berechnen mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)_T + \left( \frac{\partial}{\partial T} \right)_\tau$$

Für die zweite Ableitung gilt dann:

$$\ddot{x} = x_{\tau\tau} + 2\varepsilon x_{\tau T} + \varepsilon^2 x_{TT}$$

Wir suchen nun nach einer asymptotischen Entwicklung der Form

$$(2.68) \quad x(t; \varepsilon) \sim x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T)$$

wobei diese asymptotische Entwicklung auch für  $T = ord(1)$  bzw.  $t = ord(1/\varepsilon)$  gültig bleiben soll, d.h. insbesondere, dass  $x_1(1/\varepsilon, 1) = ord(1)$  gelten soll.

Setzen wir den Mehrskalensatz (2.68) in die Gleichung (2.64) ein, so erhalten zunächst die Beziehung

$$(x_0)_{\tau\tau} + x_0 = 0$$

mit den Anfangsbedingungen  $x_0 = 1$  und  $(x_0)_\tau = 0$ , also

$$x_0(\tau, T) = R(T) \cos(\tau + \Phi(T))$$

mit  $R(0) = 1$  und  $\Phi(0) = 0$ . Für die Ordnung  $\varepsilon^1$  erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial T} = - \frac{\partial x_0}{\partial \tau} (x_0^2 - 1)$$

und unter Verwendung der Lösung  $x_0$  ergibt sich

$$(2.69) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 &= 2R \cos(\tau + \theta) \frac{d\theta}{dT} + 2 \frac{dR}{dT} \sin(\tau + \theta) \\ &+ \left( \frac{1}{4} R^3 - R \right) \sin(\tau + \theta) + \frac{R^3}{4} \sin 3(\tau + \theta) \end{aligned}$$

Nun folgt der entscheidende Schritt bei der Verwendung einer Mehrskalentwicklung für den van-der-Pol Oszillator: um Resonanzen und damit einen Anstieg der Amplitude in der Funktion  $x_1(\tau, T)$  zu vermeiden, müssen alle Terme auf der rechten Seite von (2.69), die Resonanzen erzeugen können, unterdrückt werden. Das bedeutet aber, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:<sup>9</sup>

$$\frac{d\theta}{dT} = 0, \quad 2 \frac{dR}{dT} + \left( \frac{R^3}{4} - R \right) = 0,$$

<sup>9</sup>im Englischen bezeichnet man Bedingungen, die Resonanzen vermeiden, auch als *secularity conditions*

Mit den Randbedingungen  $R(0) = 1$  und  $\theta(0) = 0$  ergeben sich die beiden Lösungen

$$\theta(T) = 0, \quad R(t) = 2(1 + 3e^{-T})^{-1/2},$$

und damit die asymptotische Entwicklung

$$x(t; \varepsilon) \sim 2(1 + 3e^{-\varepsilon t})^{-1/2} \cos t$$

Entsprechend lautet die Gleichung erster Ordnung jetzt

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = \frac{R^3}{4} \sin 3\tau$$

Die Lösung dieser Gleichung berechnet sich zu

$$x_1(\tau, T) = -\frac{1}{32} R^3(T) \sin 3\tau + S(T) \sin(\tau + \varphi(T))$$

wobei  $S$  and  $\varphi$  wiederum unbekannte Funktionen der langsamen Zeitskala  $T$  sind. Die Anfangsbedingungen für  $S(T)$  und  $\varphi(T)$  lassen sich folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} x_1(0, 0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau}(0, 0) &= -\frac{dR}{dT}(0) = -\frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad S(0) = -\frac{9}{32} \end{aligned}$$

In der Gleichung der nächsten Ordnung wird wiederum versucht Resonanzen zu vermeiden, was wiederum auf Bestimmungsgleichungen für die unbekannt Funktionen  $S(T)$  und  $\varphi(T)$  in Form von Differentialgleichungen führt.

Es kann passieren, dass bei höheren Termen einer Mehrskalentwicklung keine Bedingungen zur Vermeidung von Resonanzen bestimmt werden können. Das deutet darauf hin, dass weitere Zeitskalen berücksichtigt werden müssen, d.h. man erweitert die Asymptotik um eine Skala  $\tilde{T} = \varepsilon^2 t$ . Im Allgemeinen kann eine Mehrskalentwicklung daher von der Form

$$x(t; \varepsilon) = X(T_0, T_1, \dots, T_k; \varepsilon), \quad T_k = \varepsilon^k t$$

sein.

**BEISPIEL 2.53.** Die Schwingungsgleichung  $\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0$  besitzt die Lösung

$$x = e^{-\varepsilon T} \cos\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2 t}\right)$$

und das Problem besitzt daher die folgenden drei, simultan agierenden Zeitskalen:

- 1) eine ungestörte Oszillator auf der Zeitskala  $t = \text{ord}(1)$ ,
- 2) einen Anstieg der Amplitude auf der Skala  $\varepsilon t = \text{ord}(1)$  und
- 3) eine Phasenverschiebung auf der Skala  $\varepsilon^2 t = \text{ord}(1)$ .

Man benötigt demnach eine Mehrskalentwicklung der Form

$$x(t; \varepsilon) = X(\tau, T, \tilde{T}; \varepsilon)$$