# Inhaltsverzeichnis

# Die Gaußsche Integrationsmethode

Jan Hartmann

## 1 Die Gaußsche Integrationsmethode

### 1.1 Einführung

Die bisher verwendeten Newton-Cotes Quadraturformeln zur numerischen Integration von Funktionen hatten stets die Form

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{1}$$

Dabei waren die Knoten $x_i, i = 0, 1, ..., n$ im Intervall [a,b] beliebig gewählt. Die Gewichte $w_i$ waren dabei definiert als:

$$w_i = \int_a^b \ell_i(x)dx \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{2}$$

Wobei $\ell_i$ die Lagrange-Koeffizienten sind. Mit dieser Formel kann man die Newton - Cotes Formeln herleiten. So zum Beispiel die Trapezregel $I_1$. Man setzt dazu die Knoten an den Rand des Intervalls. Somit ist $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Jetzt bestimmt man die Gewichte $w_0$ und $w_1$ mit der Formel (2).

$w_0 = \int_a^b \ell_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} = \frac{1}{a-b} \int_a^b (x-b)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{a-b}\ |\frac{1}{2}x^2 - bx|_a^b$
$= \frac{1}{a-b}\ (\frac{-a^2}{2} + ab - \frac{b^2}{2}) = \frac{(b-a)}{2}$

Analog berechnet man das Gewicht $w_1 = \frac{(b-a)}{2}$. Daraus ergibt sich die sogenannte Trapezregel:

$$I_1(f) = \frac{(b-a)}{2}\ [f(a) + f(b)]. \tag{3}$$

Die Newton - Cotes Formel $I_n$ hatten stets die Ordnung n + 1, das heißt, dass das Integrall für alle Polynome bis zum Grad n exakt bestimmt werden konnte. Dies wirft die Frage auf, ob man durch eine bessere Wahl der n + 1 Knoten $x_i$ die Ordnung der Formeln noch erhöhen kann, so dass der Quadraturfehler für Polynome möglichst hohen Grades verschwindet.

# 2 Definition der Gaußquadratur

Sei $\gamma(x) : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ eine Gewichtsfunktion, für die gilt, daß sie im Intervall (a,b) nichtnegativ, integrierbar und nur endlich viele Nullstellen besitzt. Eine Quadraturformel der Form

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{4}$$

mit paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n$ die im Intervall [a,b] liegen und Gewichten

$$w_i = \int_a^b \gamma(x)\ell_i(x)dx \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{5}$$

heißt eine Gaußsche Quadraturformel zur Berechnung von $I(f) := \int_a^b \gamma(x)f(x)dx$, wenn die Quadraturformel $I_n(p)$ alle Polynome p $\in \Pi_{2n+1}$ exakt integriert.
Die Gaußquadratur hat also die selbe Form wie die Newton - Cotes Formeln, bis auf die neu eingeführte Gewichtsfunktion und die Forderung, daß die Integrationsformel von der Ordnung 2n + 1 ist. Desweiteren ist zu beachten, dass wir vom berechnen des Ingtegrals sprechen, stets das Integral $I(f) := \int_a^b \gamma(x)f(x)dx$ meinen.

## 2.1 Ordnung der gesuchten Formeln

Man kann zeigen das die definierten Gaußquadraturformeln höchstens die Ordnung 2n + 2 haben.

**Beweis:** Wir definieren dafür ein Polynom $w^2(x) = \Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)^2$ so, dass der Grad dieses Polynoms stets 2n + 2 ist. Integriert man dieses Polynom, dann sind die Funktionswerte an den Knoten Null, unabhängig von der Knotenwahl. Deshalb ist $I_n(w^2) = 0$. Der Quadraturfehler ist aber $I(w^2) - I_n(w^2) = \int_a^b \gamma(x)w^2(x)dx$. Und das Integral dieses konstruierten Polynoms ist sicher nicht Null. Unabhängig von der Wahl der Stützstellen kann also die Quadraturformel nicht die Ordnung 2n + 3 erreichen. □

Bei den Newton - Cotes Formeln haben wir die n + 1 Gewichte aus den n + 1 frei wählbaren Knoten berechnet. Die Ordnung dieser Formeln war n + 1. Bei der Gaußquadratur sind nun auch die n + 1 Gewichte durch die Formel (5) vorgegeben, zusätzlich müssen aber die n + 1 Knoten optimal gewählt werden. Dadurch erreicht die Formel die Ordnung 2n + 2, wie wir später noch sehen werden. Es entsteht aber die Frage, wie diese optimalen Knoten aussehen. Dazu vorerst ein paar Sätze:

# 3 Sätze über orthogonale Polynome

## 3.1 Eine einführende Schreibweise

Auf dem Vektorraum aller Polynome aus $\Pi_n$ im Intervall [a, b] führt man nun ein Skalarprodukt ein das folgendermaßen definiert ist:

$$< f, g >:= \int_a^b \gamma(x) f(x) g(x) dx \qquad mit\, f, g \in [a, b] \tag{6}$$

Wobei die Funktion $\gamma(x)$ die eingeführe Gewichtsfunktion ist. Wenn dieses Skalarprodukt Null ist, so sagt man, dass die beiden Polynome f und g senkrecht aufeinader stehen oder, dass f und g orthogonal zueinander sind. In Zeichen $f \perp g$. Zur Erleichterung kann man vorerst annehmen, daß die Gewichtsfunktion $\gamma(x)$ konstant 1 ist. Wir werden dann später wieder auf die Gewichtsfunktion zurückgreifen.

## 3.2 Korollar 1

Auf die folgende Bedingung werden wir im weiteren Verlauf noch öfter zurückgreifen. Ist $w$ ein Polynom aus dem Vektorraum $\Pi_{n+1}, n \geq 0$ und es gilt:

$$< w, p >= 0 \qquad f\ddot{u}r\, alle\, p \in \Pi_n \tag{7}$$

dann ist entweder $w = 0$ oder $w$ hat genau n+1 paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall (a,b).

**Beweis:** Ist $w$ trivialerweise Null, so ist auch das Skalarprodukt $< 0, p >$ stets Null, unabhängig vom Polynom p.
Ist nun $w \neq 0$, dann bezeichnen wir die Nullstellen, an denen $w$ das Vorzeichen wechselt mit $\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_l$. Zu dem Polynom $w$ setzen wir jetzt ein Polynom $s(x) = \Pi_{j=0}^{l}(x - \xi_j)$. Das Polynom s ist dann so konstruiert, daß das Produkt der beiden Polynome $p$ und $w$ im offenen Intervall (a, b) keine Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt. $< w, s >$ ist daher immer ungleich Null. Wenn es also ein Polynom $w$ gibt, so muß es in $(a, b)$ n+1 verschiedene Nullstellen haben. □

## 3.3 Korollar 2

Sei w $\in \Pi_{n+1}$ ein Polynom das nicht Null ist und senkrecht auf dem Polynomraum $\in \Pi_n$ steht, dann ist w bis auf einen multiplikativen Faktor eindeutig bestimmt ist.

**Beweis:** Nehmen wir an, es gäbe zwei Polynome $w_1$ und $w_2 \in \Pi_{n+1}$, die beide die Bedingung (7) erfüllen. Dann erfüllen auch alle vielfachen dieser Polynome die Bedingung. Wir definieren jetzt ein $\Delta w = w_1 - w_2$. Dann folgt aus der Bilinearität des Skalarproduktes: $< \Delta w, p > = < w_1, p > - < w_1, p > = 0$ Also erfüllt auch $\Delta w$ die Bedingung (7). Da $w_1, w_2$ den gleichen Grad und nach Korollar 1 gleich viele Nullstellen mit Vorzeichenwechsel haben, kann man sie durch Multiplikation mit einem Zahlenfaktor auf den gleichen Höchstkoeffizienten bringen. Damit wäre $\Delta w$ nicht mehr Element aus $\Pi_{n+1}$, sondern aus $\Pi_n$. Nach Korollar 1 muß $\Delta w$ das Nullpolynom sein. Damit ist das auf dem Polynomraum $\Pi_n$ stehendes Polynom bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. $\square$

Zusammenfassend kann man aus den beiden Sätzen sagen, das ein senkrecht auf dem Polynomraum $\Pi_n$ stehendes Polynom $w$ das nicht Null ist n+1 einfache Nullstellen im Intervall (a, b) hat und bis auf einen Faktor eindeutig bestimmbar ist.

# 4 Bestimmung der Knoten

Nun folgt der entscheidende Satz, um die optimalen Knoten zu bestimmen, damit die Quadraturformel die höchst mögliche Ordnung 2n + 2 erhält.

## 4.1 Wahl der optimalen Knoten

Die Quadraturformel (1) hat die Ordnung 2n + 2 genau dann, wenn die Knoten $x_i$, $i = 0, 1, ..., n$ im Intervall (a,b) so gewählt werden, daß für $w(x) = \Pi_{j=0}^{n}(x - x_j) \in \Pi_{n+1}$ die Bedingung (7) gilt.

**Beweis:** Zuerst die eine Richtung. Sei $I_n$ eine Formel mit der Ordnung 2n + 2. Dann gilt $I_n(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_{2n+1}$. Das gilt insbesondere für alle $wp \in \Pi_{2n+1}$ mit p $\in \Pi_n$.
Nun in die andere Richtung. Sein nun $w(x)$ das oben definierte Polynom das senkrecht auf $\Pi_n$ steht und sei $f \in \Pi_{2n+1}$. Allgemein kann man $f$ schreiben als: $f = wp + r$ mit $p, r \in \Pi_n$. Integrieren wir nun $f$ erhalten wir $I(f) = I(r)$, da die Gewichte von $wp$ immer verschwinden. Von den Newton - Cotes Formeln wissen wir aber, das sie von der Ordnung n+1 sind. Deshalb ist $I_n(f) = I(f)$ $\square$

## 4.2 Anwendungsbeispiel zur Legendre-Gaußquadratur

Wie man zeigen kann sind die Legendre-Polynome der Ordnung n gerade die Polynome, die auf dem Intervall [-1, 1] senkrecht zu allen Polynomen des Vektorraumes $\Pi_{n-1}$ bezüglich des definierten Skalarproduktes (5) stehen, wobei die Gewichtsfunktion $\gamma(x) = 1$ ist. Die Legendre-Polynome können wie folgt definiert werden:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

Wir wollen nun die Quadraturformel $I_2$ der Ordnung 5 bestimmen. Wie man leicht nachrechnen kann ist $P_3(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$. Die Nullstellen dieses Polynoms sind: $x_0 =$

$-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Für das erste Gewicht ergibt sich nach Formel(5):

$$\ell_0(x) = \frac{x(x-\sqrt{\frac{3}{5}})}{-\sqrt{\frac{3}{5}}(-\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{3}{5}})} = \frac{5}{6}x^2 - \sqrt{\frac{5}{12}}x$$

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x) = F(1) - F(-1) = [\frac{5}{18} - \sqrt{\frac{5}{48}}] - [-\frac{5}{18} - \sqrt{\frac{5}{48}}] = \frac{5}{9}$$

Die anderen beiden Gewichte berechnet man analog ($w_1 = \frac{8}{9}$, $w_2 = \frac{5}{9}$). Da man nun alle Knoten und Gewichte bestimmt hat kann man nun die Quadraturformel aufstellen:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

Mit dieser Quadraturformel möchten wir nun das Integral der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall [0,1] errechnen. Da die Quadraturformel nur auf dem Intervall [-1, 1] gilt, muß man die Intervallgrenzen auf ein allgemeines Intervall [a, b] transformieren: $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$. Durch diese Transformation ergibt sich folgende Formel:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i f(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2})$$

Errechnet man das Integral mit Hilfe der Simpson Regel, so erhält man:

$$\int_0^1 sin(x)dx \approx 0.4598621899$$

Wendet man analog die Gausßquadratur an, das heißt man optimiert die Knotenwahl, so ist:

$$\int_0^1 sin(x)dx \approx 0.4596979301$$

Der Prozentuale Fehler beträgt im ersten Fall 0,036%, bei der Gaußquadratur aber nur 0,00005%.

# 5 Die Dreitermrekursion

Um nun die Knoten für die Gaußquadraturformel $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ im Intervall [a, b]zu finden muß man also die Nullstellen des Polynoms finden, das senkrecht auf dem Raum $\Pi_n$ im Intervall [a, b] steht. Aber wie bestimmen wir dieses Polynom mit den oben genannten Eigenschaften?

Bisher haben wir noch nichts über die Existenz dieser auf dem Raum stehender Polynome ausgesagt. Im allgemeinen kann man aber in dem Vektorraum $\Pi_n$ die linear unabhängige Polynome $1, x, x^2, ..., x^n$ in paarweise zueinander orthogaonale Polynome bezüglich des definierten Skalarproduktes umwandeln (Gram-Schmidtsches Orhogonalisierungsverfahren). Die Existenz dieser Poylnome ist also gesichert.

Da die einzelnen paarweise zueinander senkrechten Polynome $q_0, q_1, ...$ linear unabhängig sind, gilt: $span(q_0, q_1, ..., q_n) = \Pi_n$. Die Polynome $q_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$ bilden also eine Basis des Vektorraumes. Dies wird für den folgenden Satz benutzt, der eine rekursive Methode beschreibt, um die Orthogonalen Polynome zu bestimmen.

## 5.1 Satz zur Dreitermrekursion

Sei $q_{n+1}$ das auf $\Pi_n$ senkrecht stehende Polynome mit den Höchstkoeffizienten $h_{n+1}, n+1 \geqslant 0$. Dann gibt es Zahlen $c_{n+1}, a_n, b_{n+1}$ so, daß gilt:

$$c_{n+1}q_{n+1} = (x - a_n)q_n - b_{n-1} \qquad n \geqslant 0, \quad q_{n-1} = 0, \quad q_0 = 1 \tag{8}$$

wobei für die gesuchten Zahlen folgendes gilt:

$$c_{n+1} = \frac{h_n}{h_{n+1}}, \quad a_n = \frac{< xq_n, q_n >}{< q_n, q_n >}, \quad b_{n-1} = \frac{h_{n-1} < q_n, q_n >}{h_n < q_{n-1}, q_{n-1} >} \tag{9}$$

**Beweis:** Seien nun $q_0, q_1, ..., q_n$ die normierten zueinader senkrechtstehenden Polynome. Für das Polynom $xq_n \in \Pi_{n+1}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_j$, j = 0, 1, ..., n + 1 mit:

$$xq_n = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j q_j \tag{10}$$

Wir benutzen nun den Schmidtsches Orthogonalisierungssatz, um das Polynom $xq_n \in \Pi_{n+1}$ zu orthogonalisieren:

$$\alpha_{n+1}q_{n+1} = xq_n - \sum_{i=0}^{n} < xq_n, \alpha_i q_i > \alpha_i q_i \tag{11}$$

Aus der Bilinearität und der Symetrie des Skalarproduktes (6) gilt für alle $k \geqslant 0$ die Gleichung $< xq_n, q_k >=< q_n, xq_k >$. Für alle $k + 1 < n$ ist $< q_n, xq_k >= 0$. In der Summe sind deshalb nur die letzten beiden Summanden ungleich Null. Es gilt also:

$$\alpha_{n+1}q_{n+1} = xq_n - < xq_n, \alpha_n q_n > \alpha_n q_n - < xq_{n-1}, \alpha_{n-1}q_{n-1} > \alpha_{n-1}q_{n-1}$$

Die Terme $< xq_n, \alpha_n q_n >$ und $< xq_{n-1}, \alpha_{n-1}q_{n-1} >$ sind aber gerade 1, wie man durch einsetzen der Formel(10) sehen kann. Setzt man die Koeffizienten $c_{n+1} = \alpha_{n+1}$, $a_n = \alpha_n$ und $b_{n-1} = \alpha_{n-1}$, so ergibt sich die gesuchte Formel (8).

# 6 Quadraturfehler

# Literatur

[1] Gerhard Opfer. Numerische Mathematik für Anfänger
Eine Einführung für Mathematiker, Ingenieure und Informatiker
vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden, 2001