Inhaltsverzeichnis

Einschrittverfahren für Differentialgleichungen

Jan Christoph Kinne

Abstrakt: Im Folgenden werden wir Verfahren der Annäherung von Lösungen von Differentialgleichungen besprechen. Dazu ist ein Anfangswertproblem vorgegeben

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Hierbei beschreibt $f(t,x)$ ein Vektorfeld auf dem Definitionsbereich Ω von $f(t,x)$ und $x \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^d)$ ist eine Lösung, die von diesem Vektorfeld vorgegeben wird.
Wir werden als erstes das Eulersche Polygonzug-Verfahren vorstellen und dann daran die Begriffe Konvergenz, Konsistenz und Kondition erläutern. Ausgehend vom Eulerschen Polygonzug-Verfahren werden wir dann das Taylorverfahren beschreiben und wie man dies zum expliziten und zum klassischen Runge-Kutta-Verfahren verändert.

1 Einleitung

Das historisch älteste Beispiel für ein Einschrittverfahren ist das Eulersche Polygonzug-Verfahren. Um die Lösung x eines Anfangswertproblems zu approximieren, wird für das Intervall $[t_0,T]$ eine Unterteilung $t_0 < t_1 < t_2 < ...t_n = T$ gewählt und diese als Gitter $\Delta := \bigcup\{t_i\}$ bezeichnet. Das Polygonzugverfahren definiert dann eine stückweise lineare C^0 Abbildung x_Δ gemäß

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad x_\Delta(t_0) = x_0 \\
&\text{(ii)} \quad x_\Delta(t) = x_\Delta(t_j) + (t-t_j)f(t_j, x_\Delta(t_j)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, ..., n-1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Im Allgemeinen ordnet eine Einschrittverfahren jeder rechten Seite f eine diskrete Evolution Ψ zu ($f \mapsto \Psi = \Psi[f]$) und besteht aus einer Zweiterm-Rekursion

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & x_\Delta(t_0) = x_0 \\ \text{(ii)} & x_\Delta(t) = \Psi^{t_{j+1},t_j} x_\Delta(t_j) \qquad \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, ..., n_\Delta - 1 \end{array} \tag{3}$$

Die Evolution Φ der Differentialgleichung hat die drei charakteristischen Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \Phi^{t,t}x = x & \forall (t,x) \in \Omega \\ \text{(ii)} & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Phi^{t+\tau,t}x\right|_{\tau=0} = f(t,x) & \forall (t,x) \in \Omega \\ \text{(iii)} & \Phi^{t,\sigma}\Phi^{\sigma,s}x = \Phi^{t,s}x & \forall t,\sigma \in J_{\max}, (s,x), (t,x) \in \Omega \end{array}$$

2 Konsistenz

Eine diskrete Evolution heißt *konsistent*, wenn sie die Eigenschaften (i) und (ii) der Evolution erfüllt.

Definition 2.1 *Sei $(t,x) \in \Omega$. Die für hinreichend kleines τ erklärte Differenz*

$$\epsilon(t,x,\tau) = \Phi^{t+\tau,t}x - \Psi^{t+\tau,t}$$

heißt Konsistenzfehler *der diskreten Evolution.*

Lemma 2.2 *Die diskrete Evolution $\Psi^{t+\tau,t}x$ sei für festes $(t,x) \in \Omega$ und hinreichend-kleines τ bezüglich τ stetig differenzierbar. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*
(i) *Die diskrete Evolution ist konsistent, d.h. neben $\Psi^{t,t}x = 0$*

$$\left.\frac{d}{d\tau}\Psi^{t+\tau,t}x\right|_{\tau=0} = f(t,x) \quad \forall (t,x) \in \Omega \tag{4}$$

(ii) *Die diskrete Evolution besitzt die Darstellung*

$$\Psi^{t+\tau,t}x = x + \tau\psi(t,x,\tau) \tag{5}$$

mit einer bezüglich τ stetigen Funktion ψ, der Inkrementfunktion, welche der Bedingung

$$\psi(t,x,0) = f(t,x) \quad \forall (t,x) \in \Omega \tag{6}$$

genügt.
(iii) *Der Konsistenzfehler $\epsilon(t,x,\tau) = \Phi^{t+\tau,t}x - \Psi^{t+\tau,t}x$ erfüllt die asymptotische Beziehung*

$$\epsilon(t,x,\tau) = o(\tau) \quad \textit{für } \tau \to 0 \tag{7}$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Eine Taylorentwicklung der diskreten Evolution $\Psi^{t+\tau,t}x$ nach τ ergibt

$$\Psi^{t+\tau,t}x = x + \tau \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\Psi^{t+\sigma,t}x\Big|_{\sigma=s\tau} ds.$$

Definieren wir die Inkrementfunktion ψ durch das rechts stehende Integral, so ist diese für kleine $\tau > 0$ definiert und stetig. Weiter gilt wegen der Konsistenzeigenschaft (4)

$$\psi(t,x,\tau) = \frac{\Psi^{t+\tau,t}x - x}{\tau} \xrightarrow{\tau\downarrow 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\Psi^{t+\tau,t}x\big|_{\tau=0} = f(t,x),$$

so dass die Inkrementfunktion für kleine $\tau \geq 0$ stetig ist und bei $\tau = 0$ der gewünschten Konsistenzbedingung (6) genügt.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Aus (5) folgt die Darstellung

$$\frac{\epsilon(t,x,\tau)}{\tau} = \frac{\Phi^{t+\tau,t}x - x}{\tau} - \psi(t,x,\tau) \xrightarrow{\tau\downarrow 0} f(t,x) - \psi(t,x,0) = 0.$$

Dabei nutzen wir die Stetigkeit der Inkrementfunktion bezüglich τ und die Konsistenzbedingung (6).
(iii) $\Rightarrow$ (i). Zunächst gilt

$$0 = \lim_{\tau\to 0} \epsilon(t,x,\tau) = x - \Psi^{t,t}x,$$

so dass die erste Eigenschaft einer konsistenenten diskreten Evolution erfüllt ist. Sodann erhalten wir aus der Differnzierbarkeit und den Eigenschaften der Evolution, dass mit

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{\tau\to 0}\frac{\epsilon(t,x,\tau)}{\tau} &= \lim_{\tau\to 0}\frac{\Phi^{t+\tau,t}x - x - (\Psi^{t+\tau,t}x - x)}{\tau} \\ &= f(t,x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Psi^{t+\tau,t}x\Big|_{\tau=0} \end{aligned}$$

auch die zweite Eigenschaft einer konsistenten diskreten Evolution erfüllt ist. □

Beispiel: Die Wahl $\psi(t,x,\tau) = f(t,x)$ für die Inkrementfunktion liefert gerade die diskrete Evolution des Eulerschen Polygonzugverfahrens (2)

$$\Psi^{t+\tau,t} = x + \tau f(t,x).$$

Dieses Verfahren, das auch *explizites Euler-Verfahren* heißt, ist somit konsistent.

Definition 2.3 *Eine diskete Evolution Ψ besitzt die* Konsistenzordnung p, *wenn für jede kompakte Teilmenge $K \Subset \Omega$ der Konsistenzfehler die Beziehung*

$$\epsilon(t,x,\tau) = O(\tau^{p+1}) \quad \text{\textit{für} } \tau \to 0$$

gleichmäßig für alle $(t,x) \in K$ erfüllt.

Beispiel: Wir wollen nun die Konsistenzordnung des expliziten Eulerverfahrens für rechte Seiten $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ bestimmen. Sei $K \Subset \Omega$ und $\hat{K}$ ein weiteres Kompaktum mit $K \subset \hat{K} \Subset \Omega$, das K in seinem Inneren enthält. Dann gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz ein $\hat{\tau} > 0$, so dass für alle $(t, x) \in K$ und $0 < \tau \leq \hat{\tau}$

$$(t + \tau, \Phi^{t+\tau,t} x) \in \hat{K}$$

existiert. Für diese (t, x) und τ gilt

$$\epsilon(t, x, \tau) = \Phi^{t+\tau,t} x - x - \tau f(t, x).$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \Phi^{t+\tau,t} x = f(t + \tau, \Phi^{t+\tau,t} x)$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \Phi^{t+\tau,t} x = f_t(t + \tau, \Phi^{t+\tau,t} x) + f_x(t + \tau, \Phi^{t+\tau,t} x) f(t + \tau, \Phi^{t+\tau,t} x)$$

erhalten wir die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \Phi^{t+\tau,t} x - x &= \Phi^{t+\tau,t} x - \Phi^{t,t} x \\ &= \tau f(t, x) + \tau^2 \int_0^1 (1 - \sigma) \Big(f_t(t + \sigma\tau, \Phi^{t+\sigma\tau,t} x) \\ &\qquad + f_x(t + \sigma\tau, \Phi^{t+\sigma\tau,t} x) f(t + \sigma\tau, \Phi^{t+\sigma\tau,t} x) \Big) \mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Wir gelangen daher zu folgender Abschätzung für den Konsistenzfehler

$$|\epsilon(t, x, \tau)| \leq \frac{\tau^2}{2} \max_{(s,z) \in \hat{K}} |f_t(s, z) + f_x(s, z) f(s, z)|$$

für alle $(t, x) \in K$, $0 < \tau \leq \hat{\tau}$. Daher besitzt das explizite Eulerverfahren für jede rechte Seite $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ die Konsistenzordnung $p = 1$.

3 Konvergenzsatz

Es sei $\epsilon_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}^d, \epsilon_\Delta(t) = x(t) - x_\Delta(t)$ der Gitterfehler und seine Norm $\|\epsilon_\Delta\|_\infty = \max_{t \in \Delta} |\epsilon_\Delta(t)|$ der Diskretisierungsfehler.

Definition 3.1 *Sei für hinreichend kleines $\hat{\tau} > 0$ zu jedem Gitter Δ auf $[t_0, T]$ mit $\tau_\Delta \leq \hat{\tau}$ eine Gitterfunktion x_Δ gegeben. Die Familie dieser Gitterfunktionen* konvergiert *gegen die Abbildung $x \in C([t_0, T], \mathbb{R}^d)$, wenn der Diskretisierungsfehler*

$$\|\epsilon_\Delta\|_\infty \to 0 \quad \textit{für} \quad \tau_\Delta \to 0$$

erfüllt. Sie konvergiert von der Ordnung $p > 0$, *wenn gilt*

$$\|\epsilon_\Delta\|_\infty = O(\tau_\Delta^p) \quad \textit{für} \quad \tau_\Delta \to 0$$

Satz 3.2 *Sei $x \in C^1([t_0,T],\mathbb{R}^d)$ Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

wobei die Differentialgleichung auf dem erweiterten Phasenraum Ω den Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes genüge (f lokal Lipschitz-stetig in der Zustandsvariablen „x“). Es gebe Konstanten $\hat{\tau}, C, p > 0$, so dass entlange der Lösung x der Konsistenzfehler der diskreten Evolution Ψ der Abschätzung

$$|\epsilon(t,x(t),\tau)| \le C\tau^{p+1} \qquad \forall t \in [t_0,T], 0 < \tau \le \hat{\tau},$$

genügt. Ferner sie die Inkrementfunktion ψ lokal Lipschitz-stetig in der Zustandvariablen. Dann gibt es eine Schrittweitenschranke $\tau_* > 0$ derart, dass die diskrete Evolution Ψ für alle Gitter Δ mit $\tau_\Delta \le \tau_*$ eine Gitterfunktion x_Δ definiert. Die Familie dieser Gitterfunktionen konvergiert von der Ordnung p gegen die Lösung x.

Beweis: Sei $K \Subset \Omega$ irgendeine kompakte Umgebung des Graphen der Lösung x. Nach der Voraussetzung der lokalen Lipschitzstetigkeit von ψ in der Zustandsvariablen „x“ gibt es Konstanten $\tau_K, \Lambda_K > 0$, so dass

$$|\psi(t,x,\tau) - \psi(t,\overline{x},\tau)| \le \Lambda_K |x - \overline{x}|$$

für alle $(t,x),(t,\overline{x}) \in K, 0 < \tau \le \tau_K$. Ohne Einschränkung können wir dabei $\hat{\tau} \le \tau_K$ annehmen. Insbesondere ist dann der Ausdruck $\Psi^{t+\tau,t}x$ für alle $(t,x) \in K$, $0 < \tau \le \hat{\tau}$ definiert. Weiter gibt es ein $\delta_K > 0$, so dass für $t \in [t_0,T]$ gilt:

$$|x - x(t)| \le \delta_K \Rightarrow (t,x) \in K.$$

Zur Vorbereitung des eigentlichen Beweisschrittes betrachten wir Gitter Δ auf $[t_0,T]$ mit $\tau_\Delta \le \hat{\tau}$, von denen wir zunächst *voraussetzen*, dass die durch Ψ definierte Gitterfunktion x_Δ existiert und

$$|\epsilon_\Delta| = |x(t) - x_\Delta(t)| \le \delta_K \qquad \forall t \in \Delta$$

erfüllt. Für diese können wir den Gitterfehler ϵ_Δ genauer beschreiben. Dazu zerlegen wir für $j = 0,1,...,n_\Delta - 1$ den Fehler im Gitterpunkt t_{j+1} gemäß

$$\begin{aligned}
\epsilon_\Delta(t_{j+1}) &= x(t_{j+1}) - x_\Delta(t_{j+1}) \\
&= \Phi^{t_{j+1},t_j}x(t_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}x_\Delta(t_j) \\
&= \Phi^{t_{j+1},t_j}x(t_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}x(t_j) + \Psi^{t_{j+1},t_j}x(t_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}x_\Delta(t_j) \\
&= \epsilon(t_j,x(t_j),\tau_j) + \epsilon_j
\end{aligned}$$

in den Konsistenzfehleranteil $\epsilon(t_j,x(t_j),\tau_j)$ und eine zweiten Fehleranteil

$$\epsilon_j = \Psi^{t_{j+1},t_j}x(t_j) - \Psi^{t_{j+1},t_j}x_\Delta(t_j),$$

welchen wir als Propagation des Fehlers $\epsilon_\Delta(t_j)$ durch die diskrete Evolution vom Zeitpunkt t_j zum Zeitpunkt t_{j+1} auffassen können. Der zweite Fehleranteil kann mit Hilfe der Inkrementfunktion ψ dargestellt werden,

$$\epsilon_j = x(t_j) - x_\Delta(t_j) + \tau\left(\psi(t_j,x(t_j),\tau) - \psi(t_j,x_\Delta(t_j),\tau_j)\right),$$

so dass wir ihn wegen der Lipschitzbedigung an ψ durch $\epsilon_\Delta(t_j)$ wie folgt abschätzen können:

$$|\epsilon_j| \leq (1 + \tau_k \Lambda_K)|\epsilon_\Delta(t_j)|.$$

Dabei haben wir von $(t_j, x_\Delta(t_j)) \in K$ und $\tau_j \leq \tau_\Delta \leq \tau_K$ Gebrauch gemacht. Wegen der Voraussetzung an den Konsistenzfehler entlang der Lösung x erhalten wir insgesamt folgende rekursive Abschätzung

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & |\epsilon_\Delta(t_0)| = 0, \\ \text{(ii)} & |\epsilon_\Delta(t_{j+1})| \leq C\tau_j^{p+1} + (1 + \tau_j\Lambda_K)|\epsilon_\Delta(t_j)|, \end{array}$$

$$\text{für} \quad j = 0, 1, ..., n_\Delta - 1.$$

Induktiv erhalten wir daraus die direkt Abschätzung

$$|\epsilon_\Delta(t)| \leq \tau_\Delta^p \frac{C}{\Lambda_K}\left(e^{\Lambda_K(t-t_0)} - 1\right) \qquad \forall t \in \Delta, \tag{8}$$

wie wir nun zeigen wollen. Zum einen ist die Abschätzung für t_0 richtig. Ist sie zum anderen für $t_j, j < n_\Delta$ richtig, so erhalten wir nach Einsetzen in die rekursive Abschätzung (ii)

$$\begin{aligned} |\epsilon_\Delta(t_{j+1})| &\leq C\tau_j^{p+1} + (1 + \tau_j\Lambda_K)\tau_\Delta^p \frac{C}{\Lambda_K}\left(e^{\Lambda_K(t_j - t_0)} - 1\right) \\ &\leq \tau_\Delta^p \frac{C}{\Lambda_K}\left(\tau_j\Lambda_K + (1 + \tau_j\Lambda_K)\left(e^{\Lambda_K(t_j - t_0)} - 1\right)\right) \\ &= \tau_\Delta^p \frac{C}{\Lambda_K}\left((1 + \tau_j\Lambda_K)e^{\Lambda_K(t_j - t_0)} - 1\right). \end{aligned}$$

Nun gilt aber $1 + \tau_j\Lambda_K \leq e^{\tau_j\Lambda_K}$ und daher

$$(1 + \tau_j\Lambda_K)e^{\Lambda_K(t_j - t_0)} \leq e^{\Lambda_K(t_{j+1} - t_0)},$$

so dass die zu zeigende Abschätzung auch für t_{j+1} richtig ist.
Mit der Abschätzung (8) ausgerustet, können wir nun „den Spieß umdrehen“. Denn wählen wir $\tau_* > 0$ so klein, dass

$$\tau_*^p \frac{C}{\Lambda_K}\left(e^{\Lambda_K(T - t_0)} - 1\right) \leq \delta_K \qquad \text{und } \tau_* \leq \hat{\tau}$$

gilt, dann können wir für ein beliebiges Gitter Δ auf $[t_0, T]$ mit $\tau_\Delta \leq \tau_*$ wie folgt argumentieren: Schritt für Schritt (mit der gleichen Induktion wie oben) zeigt man für $j = 0, 1, ..., n_\Delta - 1$, dass

1. die Abschätzung

$$|\epsilon_\Delta(t_j)| = |x(t_j) - x_\Delta(t_j)| \leq \tau_\Delta^p \frac{C}{\Lambda_K}\left(e^{\Lambda_K(t_j - t_0)} - 1\right) \leq \delta_K \tag{9}$$

gültig ist und daher

2. $x_\Delta(t_{j+1})$ existiert.

Insbesondere erhalten wir abschließend für den Diskretisierungsfehler auf diesen Gittern

$$\|\epsilon_\Delta\|_\infty \le \tau_\Delta^p \frac{C}{\Lambda_K}\left(e^{\Lambda_K(T-t_0)} - 1\right) = O(\tau_\Delta^p).$$

□

Die Voraussetzungen des Satzes gelten insbesondere für diskrete Evolutionen der Konsistenzordnung $p > 0$. Der Konvergenzsatz lautet dann in Kürze:

$$\text{Konsistenzordnung } p \Rightarrow \text{Konvergenzordnung } p$$

4 Steifheit von Anfangswertproblemen

Für sehr große $\frac{C}{\Lambda_K}\left(e^{\Lambda_K(T-t_0)} - 1\right)$ muss man jedoch möglicherweise τ_Δ schon sehr klein wählen, um überhaupt einen gute Nährung zu erhalten. Um darüber eine ungefähre Aussage machen zu können, definiert man sich die *diskrete Kondition* als die kleinste Zahl κ_Δ, so dass

$$\max_{t\in\Delta} |x\Delta(t) - \overline{x}_\Delta(t)| \le \kappa_\Delta |x_0 - \overline{x}_0| \qquad \text{für } \overline{x}_0 \to x_0$$

gilt, wobei $\overline{x}_\Delta$ die zum Anfangswert $\overline{x}_0$ gehörige Gitterfunktion bezeichnet. Dies entspricht der Definition der *intervallweisen Kondition* $\kappa[t_0, T]$, für die nämlich unter den gleichen Voraussetzungen $\max_{t\in[t_0,T]} |x(t) - \overline{x}(t)| \le \kappa[t_0, T]|x_0 - \overline{x}_0|$ gilt. Stellen also die beiden Gitterfunktionen x_Δ und $\overline{x}_\Delta$ für kleine Störungen $|x_0 - \overline{x}_0|$ vernünftige Approximationen der entsprechenden kontinuierlichen Lösungen x und $\overline{x}$ dar, so wird

$$\kappa_\Delta \approx \kappa[t_0, T] \tag{10}$$

gelten. Auf der anderen Seite werden wir für

$$\kappa_\Delta \gg \kappa[t_0, T]$$

keine brauchbare Lösung erwarten können, da die diskrete Evolution Ψ völlig anders auf Störungen reagiert als die Evolution Φ des Anfangswertproblems. Dies bedeutet insbesondere, dass das Gitter Δ noch zu grob ist.

Stellt man fest, dass das Lösen eines Anfangswertproblems durch Einschrittverfahren „zu kleine“ τ_Δ und damit „zu großen“ Aufwand erfordert, so bezeichnet man das Problem als *steif*. Alle anderen Probleme heißen *nicht steif*. Diese „Definition“ ist natürlich sehr vage, da Einschätzungen wie „zu klein“ nur pragmatisch erfolgen können.

Beispiel: Es sei das skalare Anfangswertproblem

$$x' = \lambda x, \qquad x(0) = 1$$

gegeben, welches wir mit dem expliziten Euler-Verfahren approximieren

$$x_\Delta(t_{j+1}) = (1 + \tau_j\lambda)x_\Delta(t_j).$$

Dann gilt $\kappa_\Delta = \max_{0\le k\le n_\Delta - 1} \prod_{j=0}^{k} |1 + \tau\lambda|$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. $\lambda \geq 0$: Hier ist $\kappa[0,T] = e^{\lambda T}$ und κ_Δ lässt sich wegen $1 + \tau_j\lambda \leq e^{\tau_j\lambda}$ abschätzen durch

$$\kappa_\Delta = \prod_{j=0}^{n_\Delta - 1} (1 + \tau_j\lambda) \leq \exp\left(\sum_{j=0}^{n_\Delta - 1}\right) = e^{\lambda T},$$

so dass wir $\kappa_\Delta \leq \kappa[0,T]$ erhalten. Für $\lambda \geq 0$ ist damit das Anfangswertproblem *nicht steif.*

2. $\lambda \leq 0$: Es gilt $\kappa[0,T] = 1$. Für die diskrete Kondition beschränken wir uns auf *äquidistante* Gitter Δ. Dann gilt $\kappa_\Delta = \max_{1 \leq k \leq n_\Delta} |1 - \tau_\Delta|\lambda||^k$. Im Falle $\tau_\Delta < 2/|\lambda|$ ist $\kappa_\Delta \leq \kappa[0,T]$ für $\tau_\Delta \gg 2/|\lambda|$ hingeben gilt $\kappa_\Delta \leq |1 - \tau_\Delta|\lambda|| \gg 1 = \kappa[0,T]$. Daher wird das explizite Euler-Verfahren für $\lambda \to -\infty$ zunehmend ineffizienter und verhält sich daher *steif.*

5 Explizites Runge-Kutta-Verfahren

Um zu zeigen, dass das explizite Eulerverfahren die Konsistenzordnung $p = 1$ besitzt, hatten wir den Konsistenzfehler dargestellt als

$$\epsilon(t,x,\tau) = \Phi^{t+\tau,t}x - \Psi^{t+\tau,t}x = \left(\Phi^{t+\tau,t}x - x\right) - \tau\psi(x,t,\tau).$$

Den Term in Klammern hatten wir bis zur gewünschten Ordnung nach τ entwickelt,

$$\Phi^{t+\tau,t}x - x = \tau f(t,x) + O(\tau^2),$$

und dann gesehen, dass das explizite Euler-Verfahren wegen $\tau\psi(t,x,\tau) = \tau f(t,x)$ den in τ linearen Term eliminiert, so dass wir schließlich $\epsilon(t,x,\tau) = O(\tau^2)$ erhielten. Treiben wir dieses Vorgehen einen Schritt weiter, so erhalten wir mit der Entwicklung

$$\Phi^{t+\tau,t}x = \tau f(t,x) + \frac{\tau^2}{2}\left(f_t(t,x) + f_x(t,x)f(t,x)\right) + O(\tau^3)$$

für $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ die Inkrementfunktion

$$\psi^*(t,x,\tau) = f(t,x) + \frac{\tau}{2}\left(f_t(t,x) + f_x(t,x)f(t,x)\right),$$

was eine diskrete Evolution der Konsistenzordnung $p = 2$ liefert. Ebenso kann man Verfahren – sogenannte Taylor-Verfahren – beliebiger Konsistenzordnung p erzeugen, muss sich dabei jedoch auf Funktionen f aus $C^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ einschränken. Dieses Verfahren ist jedoch für $p > 2$ nicht praktikabel, da gerade das Bilden der ersten Ableitungen noch in akzeptabler Zeit bewältigt werden kann aber schon das Berechnen der zweiten Ableitungen zu sehr hohem Aufwand führt.

5.1 Idee des Runge-Kutta-Verfahren

Die Konsistenzordnung p eines Taylorverfahrens bleibt natürlich erhalten, wenn man die Inkrementfunktion ψ^* durch eine Inkrementfunktion

$$\psi(t,x,\tau) = \psi^*(t,x,\tau) + O(\tau^p)$$

ersetzt. Am Beispiel $p = 2$ ergibt sich z.B., wenn man zusätzlich $\Phi^{t+\tau,t}$ einmal nach τ taylorentwickelt und das Schlömlich-Restglied exakt angibt,

$$\psi^*(t,x,\tau) + O(\tau^3) = \Phi^{t+\tau,t} - x = \int_0^\tau f(t+\sigma, \Phi^{t+\sigma,t}x)\mathrm{d}\sigma.$$

Weiter kann man das Integral nach der Mittelpunktsregel (1-Punkt-Gauß-Legendre-Quadratur) abschätzen, wobei man nur einen Stützpunkt nutzt ($n = 1$). Daher ergibt sich für das einzusetzende Legendrepolynom $P_1 = x$, und man erhält für irgendeine Zwischenstelle ζ:

$$\begin{aligned}\int_0^\tau f(t+\sigma, \Phi^{t+\sigma,t}x)\mathrm{d}\sigma &= \tau f(t+\sigma/2, \Phi^{t+\tau/2,t}x) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!}\int_0^\tau P_n \cdot P_n \mathrm{d}x \\ &= \tau f(t+\sigma/2, \Phi^{t+\tau/2,t}x) + O(\tau^3)\end{aligned}$$

Nun könnte man annehmen, dass man keinen Gewinn aus dieser Veränderung ziehen könnte, da man nun $\Phi^{t+\tau/2,t}x$ berechnen muss, was eine halb so große Schrittweite bedeutet. Da dieser Ausdruck aber in einem mit τ multipliziertem Term auftritt, reicht es ihn bis $O(\tau^2)$ zu approximieren. Dies leistet gerade das explizite Euler-Verfahren,

$$\Phi^{t+\tau/2,t}x = x + \frac{\tau}{2}f(t,x) + O(\tau^2).$$

Damit ergibt sich ein Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 2$, welches schon 1895 von Runge angegeben wurde:

$$k_1 = f(t,x), \quad k_2 = f(t+\tau/2, x+\tau k_1/2), \quad \Psi^{t+\tau,t}x = x + \tau k_2$$

Allgemein lautet das s-stufige *explizite Runge-Kutta-Verfahren*

$$\begin{aligned}&\text{(i)} && k_i = f\left(t + c_i\tau, x + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j\right) \quad \text{für } i = 1,...,s, \\ &\text{(ii)} && \Psi^{t+\tau,t}x = x + \tau\sum_{i=1}^{s} b_i k_i.\end{aligned} \tag{11}$$

Dabei heißt $k_i = k_i(t,x,\tau)$ die i-te Stufe. Die Koeffizienten des Verfahrens fassen wir wie folgt zusammen:

$$b = (b_1,...,b_s)^T \in \mathbb{R}^s, \qquad c = (c_1,...,c_s)^T \in \mathbb{R}^s,$$

sowie

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{s1} & \cdots & \cdots & a_{s,s-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(s \times s, \mathbb{R}).$$

Die rekursive Struktur (11) des geschachtelten Einsetzens drückt sich jetzt in der *Nilpotenz* der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ aus. Konkrete Verfahren werden verkürzt im *Butcher-Schema* (1963)

$$\begin{array}{c|c} c & \mathfrak{A} \\ \hline & b^T \end{array}$$

angegeben. Allgemein lasse sich aber auch nicht explizite also implizite Einschritt-Verfahren im Butcher-Schema notieren. Hierzu muss man jedoch die Summen in (11) nicht nur bis $i-1$ sondern bis s laufen lassen. Damit ergibt sich das explizite Euler-Verfahren als

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad ,$$

das implizite Euler-Verfahren als

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

und das Verfahren von Runge mit $p = 2$ als

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} .$$

Zur Berechnung eines Schritts $\Psi^{t+\tau,t}x$ eines expliziten Verfahrens sind genau s f-Auswertungen nötig, daher sind s-stufige Verfahren in etwa gleich „teuer“. Das Verfahren hat dann die inkrementellen Form

$$\Psi^{t+\tau,t}x = x + \tau\psi(t,x,\tau) \qquad \text{mit} \qquad \psi(t,x,\tau) = \sum_{i=1}^{s} b_i k_i.$$

Wegen $k_i = k_i(t,x,0) = f(t,x)$ gilt dann für $\tau = 0$

$$\psi(t,x,0) = \left(\sum_{i=1}^{s} b_i\right) f(t,x).$$

Damit folgt:

Lemma 5.1 *Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren (b,c,$\mathfrak{A}$) ist genau dann konsistent für alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$, wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

Wir erwarten für höhere Konsistenzordnungen p auch wachsende Stufenzahl s. Mindestens gilt:

Lemma 5.2 *Ein s-stufiges explixites Runge-Kutta-Verfahren besitze für alle $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ die Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $p \leq s$.*

Beweis: Wendet man das Verfahren an auf das Anfangswertproblem

$$x' = x, \qquad x(0) = 1,$$

so ist zum einen

$$\Phi^{\tau,0}1 = e^\tau = 1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \ldots + \frac{\tau^p}{p!} + O(\tau^{p+1}),$$

zum anderen sieht man rekursiv, dass $k_i(0,1,\cdot) \in P_{i-1}$ für $i \in \underline{s}$ und damit $\Psi^{\tau,0}1$ ein Polynom in τ vom Grad $\leq s$ ist. Damit demnach der Konsistenzfehler die Abschätzung $\epsilon(0,1,\tau) = \Phi^{t+\tau,t}1 - \Psi^{t+\tau,t}1 = O(\tau^{p+1})$ erfüllen kann, muss $s \geq p$ gelten. □

Für die Konsistenzordnung p hatten wir bisher immer $f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt, also die gleiche Differentiationsordnung bzgl. der Zeit und dem Zustand. Daher können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit für die weiteren Betrachtungen die Zeitvariable durch *Autonomisierung* zur Zustandsvariablen machen. Daher betrachten wir an Stelle von

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

auf dem erweiterten Phasenraum Ω das äquivalente erweitere System

$$\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}' = \hat{f}((x,s)^T) = \begin{bmatrix} f(s,x) \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ s(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ t_0 \end{bmatrix},$$

auf dem Phasenraum $\hat{\Omega}_0 = \Omega$. Bezeichnen wir die Evolution des erweiterten Systems mit $\hat{\Phi}^{t+\tau,t}$, so drückt sich die Äquivalenz der beiden Systeme gerade aus durch

$$\begin{bmatrix} \Phi^{t+\tau,t}x \\ t+\tau \end{bmatrix} = \hat{\Phi}^{t+\tau,t} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}.$$

Wir bezeichnen Runge-Kutta-Verfahren, die wir sowohl auf das Ausgangsproblem wie auch auf das autonomisierte Problem anwenden können und das gleich Ergebnis erhalten, als *invariant gegen Autonomisierung*. Für diese Verfahren gilt mit der diskreten Evolution $\hat{\Psi}$ des erweiterten Systems

$$\begin{bmatrix} \Psi^{t+\tau,t}x \\ t+\tau \end{bmatrix} = \hat{\Psi}^{t+\tau,t} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}.$$

Lemma 5.3 *Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren $(b,c,\mathfrak{A})$ ist genau dann invariant gegen Autonomisierung, wenn es konsistent ist und*

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \qquad \textit{für } i = 1, \ldots, s \tag{12}$$

erfüllt.

Beweis: Bezeichen wir die Stufen von $\hat{\Psi}$ mit $K_i = (\hat{k}_i, \theta_i)^T$, so gilt

$$\hat{\Psi}^{t+\tau,t} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \tau \sum_i b_i \hat{k}_i \\ t + \tau \sum_i b_i \theta_i \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\left(t + \tau \sum_j^s a_{ij}\theta_j, x + \tau \sum_j^s a_{ij}\hat{k}_j\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

für $i = 1, ..., s$. Bezeichnen wir die Stufen von $\Psi^{t+\tau,t}x$ mit k_i, so gilt $\hat{k}_i = k_i$, $i = 1, ..., s$, und $t + \tau \sum_{i=1}^s b_i\theta_i = t + \tau$ genau dann, wenn die Beziehung (12) für den Koeffizeitenverktor c besteht und $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ gilt, also das Verfahren nach Lemma (5.1) konsistent ist. □

Da sich bei gegen Autonomisierung invariante Runge-Kutta-Verfahren der Vektor c berechnen lässt, bezeichnet man sie kurz mit Runge-Kutta-Verfahren $(b,\mathfrak{A})$. Für diese genügt es auch die autonomen Probleme

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

auf dem Phasenraum $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ zu betrachten mit der Phasenfluss Φ^t und dem diskreten Fluss Ψ^τ

$$\Psi^\tau x = x + \tau\psi(x, \tau) = \Psi^{t+\tau,t}x$$

sowie dem Konsistenzfehler $\epsilon(x, \tau) = \Phi^\tau x - \Psi^\tau x$.

5.2 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Zur Konstruktion von Runge-Kutta-Verfahren $(b,\mathfrak{A})$ der Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$ sind also zwei Schritt notwendig:

1. Das Aufstellen von Bedingungsgleichungen an die s(s+1)/2 Koeffizienten $(b,\mathfrak{A})$ derart, dass das Verfahren von der Konsistenzordnung p für alle $f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist.

2. Das Lösen dieser Bedingungen, also die Abgabe konkreter Koeffizientensätze, welche diesen Gleichungen genügen.

Dies wollen wir nun am Beispiel $p = 4$ durchführen. Dazu betrachten wir eine autonome Differentialgleichung $x' = f(x)$ auf dem Phasenraum $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ mit $f \in C^4(\Omega_0, \mathbb{R}^d)$ und schätzen dann den Konsistenzfehler $\epsilon(x, \tau) = \Phi^\tau x - \Psi^\tau x$ ab, indem wir beide Summanden bis $O(\tau^5)$ Taylor-entwickeln.
Dies ergibt zum für die Evolution

$$\begin{aligned} \Phi^\tau x = x + \tau f + \frac{\tau^2}{2!} f'f + \frac{\tau^3}{3!}\left(f''(f, f) + f'f'f\right) \\ + \frac{\tau^4}{4!}\left(f'''(f, f, f) + 3f''(f'f, f) + f'f''(f, f) + f'f'f'f\right) + O(\tau^5), \end{aligned} \tag{13}$$

wobei es sich bei f'' um eine symmetrische bilineare Abbildung und bei f''' um einen symmetrische trilineare Abbildung handelt und jeweils bei f das Argument x weggelassen wurde. Die Abschätzung des Restgliedes ist dabei lokal gleichmäßig in Ω_0.
Da das Bilden der Ableitungen beim diskreten Fluss schnell unübersichtlich wird, entwickeln wir den Ausdruck hier rekursiv, was der rekursiven Gleichung

$$k_i = f(x + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j) \qquad \text{für} \quad i = 1, ..., s$$

der k_i Rechnung trägt.
Aus der Stetigkeit von f erhalten wir zunächst

$$k_i = O(1) \qquad \text{für} \quad i = 1, ..., s$$

wenn $\tau \to 0$. Setzt man dies in die Bestimmungsgleichung auf der rechten Seite ein, so ergibt sich mit einer Taylor-Entwicklung nach τ bei $\tau = 0$

$$k_i = f(x + O(\tau)) = f + O(\tau) \qquad \text{für} \quad i = 1, ..., s.$$

Wiederholt man die beiden Schritte erhält man mit (12)

$$k_i = f(x + \tau \sum_j a_{ij} f + O(\tau^2)) = f + \tau c_i f' f + O(\tau^2) \qquad \text{für} \quad i = 1, ..., s.$$

Ein dritter Schritt ergibt:

$$\begin{aligned} k_i &= f(x + \tau \sum_j a_{ij} \left(f + \tau c_j f' f\right) + O(\tau^3)) \\ &= f + \tau c_i f' f + \tau^2 \sum_j a_{ij} c_j f' f' f + \frac{\tau^2}{2} c_i^2 f''(f, f) + O(\tau^3) \qquad \text{für} \quad i = 1, ..., s. \end{aligned}$$

Ein letzter, vierter Schritt ergibt die Entwicklung von k_i für $i = 1, ..., s$,

$$\begin{aligned} k_i =& f\big(x + \tau c_i f + \tau^2 \sum_j a_{ij} c_j f' f \\ & + \tau^3 \sum_{kj} a_{ij} a_{jk} c_k f' f' f + \frac{\tau^3}{2} \sum_j a_{ij} c_j^2 f''(f, f) + O(\tau^4)\big) \\ =& f + \tau c_i f' f + \tau^2 \sum_j a_{ij} c_j f' f' f + \frac{\tau^2}{2} c_i^2 f''(f, f) \\ & + \tau^3 \sum_{jk} a_{ij} a_{jk} c_k f' f' f' f + \frac{\tau^3}{2} \sum_j a_{ij} c_j^2 f' f''(f, f) \\ & + \tau^3 \sum_j c_i a_{ij} c_j f''(f' f, f) + \frac{\tau^3}{6} c_i^3 f'''(f, f, f) + O(\tau^4). \end{aligned}$$

Diese iterative Vorgehensweise zeichnet sich dadurch aus, dass wir in jedem Schritt mehr Informationen dazu gewinnen und dieses „mehr" an Information gleichzeitig wichtig ist, die Argumentation fortzuführen. Wir ziehen uns wie Münchhausen selbst aus dem Sumpf: Eine solche Schlussweise heißt im Englischen, kaum übersetzbar „bootstrapping".
Setzen wir die Entwicklung für k_i in die Beziehung $\Psi^\tau x = x + \tau \sum_i b_i k_i$ ein, so erhalten wir die gewünschte Taylorentwicklung des diskreten Flusses

$$\begin{aligned}\Psi^\tau x =& x + \tau\left(\sum_i b_i f\right) + \frac{\tau^2}{2!}\left(2\sum_i b_i c_i f'f\right)\\ &+ \frac{\tau^3}{3!}\left(3\sum_i b_i c_i^2 f''(f,f) + 6\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j f'f'f\right)\\ &+ \frac{\tau^4}{4!}\Bigg(4\sum_i b_i c_i^3 f'''(f,f,f) + 24\sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j f''(f'f,f)\\ &+ 12\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^2 f'f''(f,f) + 24\sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k f'f'f'f\Bigg)\\ &+ O(\tau^5).\end{aligned}$$

Dafür müssen wir $f \in C^4(\Omega_0, \mathbb{R})$ voraussetzen und erhalten eine in Ω_0 lokal gleichmäßige Abschätzung des Restgliedes. Die elementaren Differentiale könnten nun noch linear abhängig sein, wie z.B. $f'f''(f,f)$ und $f''(f'f,f)$ es für $d = 1$ sind. Für $d = p$ lässt sich jedoch immer ein f finden, so dass alle elementaren Differentiale linear unabhängig sind. Daher ergibt ein Koeffizientenvergleich direkt:

Satz 5.4 *Ein Runge-Kutta-Verfahren (b,$\mathfrak{A}$) besitzt für alle rechten Seiten $f \in C^p(\Omega_0, \mathbb{R}^d)$, Phasenräume $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ und Dimensionen $d \in \mathbb{N}$ genau dann die Konsistenzordnung $p = 1$, wenn die Koeffizienten des Verfahrens die Bedingungsgleichung*

$$\sum_i b_i = 1 \qquad (14)$$

genügen, genau dann die Konsistenzordnung $p = 2$, wenn sie zusätzlich der Bedingungsgleichung

$$\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2} \qquad (15)$$

genügen, genau dann die Konsistenzordnung $p = 3$, wenn sie zusätzlich den zwei Bedingungsgleichungen

$$\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \qquad (16)$$

$$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \qquad (17)$$

genügen und genau dann die Konsistenzordnung $p = 4$, wenn sie zusätzlich den vier Bedingungen

$$\sum_i b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \tag{18}$$

$$\sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \tag{19}$$

$$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \tag{20}$$

$$\sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \tag{21}$$

genügen. Dabei erstrecken sich die Summationen jeweils von 1 bis s.

Um dieses Gleichungssytem zu lösen, müssen wir uns als erstes für eine Stufenzahl s entscheiden. Wegen (5.2) gilt $s \geq 4$ und wir wählen $s = 4$ ohne zu wissen, ob dies zu einem Ergebnis führt. Dann ergibt sich mit $c_i = \sum_j a_{ij}$ und $c_1 = 0$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 1 && (14)\\
b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 &= 1/2 && (15)\\
b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 &= 1/3 && (16)\\
b_3 a_{32} c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) &= 1/6 && (17)\\
b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 &= 1/4 && (18)\\
b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) &= 1/8 && (19)\\
b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) &= 1/12 && (20)\\
b_4 a_{43} a_{32} c_2 &= 1/24. && (21)
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (14) , (15) , (16) und (18) kann man nun als die Bedingungsgleichungen einer Quadraturformel umdeuten. Es gilt nämlich mit diesen Gleichungen gerade, dass mit den Gewichten b_i und den Knoten c_i eine Quadraturformel auf $[0, 1]$ Polynome dritten Grades exakt integriert. Ist also $\phi \in P_3$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{4} b_i \phi(c_i) = \int_0^1 \phi(t) \mathrm{d}t.$$

Auf der anderen Seite haben wir mit der Simpson-Regel und mit der Newtonschen 3/8-Regel auch jeweils Knoten und Gewichte vorgegeben, so dass wir eine exakte Integration erhalten. Damit erfüllen die Werte aus den Verfahren auch die geforderten Gleichungen.

- Die Simpsonregel nutzt nur drei Knoten, so dass wir den mittleren verdoppeln. Es ergibt sich dann

$$c = (0, 1/2, 1/2, 1)^T, \qquad b = (1/6, 2/6, 2/6, 1/6)^T.$$

Das lineare Gleichungssystem aus a_{32} und $a_{42}c_2 + a_{43}c_3$ aus (17) und (19) lässt sich dann mit $a_{32} = a_{42}c_2 + a_{43}c_3 = 1/2$ lösen, wonach man dann alle anderen Koeffizienten berechnen kann. Damit ergibt sich „das" klassische Kutta-Runge-Verfahren mit den Butcherschema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}.$$

- Die 3/8-Regel ergibt sofort

$$c = (0, 1/2, 1/2, 1)^T, \qquad b = (1/6, 2/6, 2/6, 1/6)^T$$

Wie oben ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit denselben Gleichungen, so dass man $a_{32} = 1$ und $a_{42}c_2 + a_{43}c_3 = 1/3$ erhält. Wieder ergibt Einsetzen in die anderen Gleichungen die restlichen Koeffizienten, und es ergibt sich die Kuttasche 3/8-Regel:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Es existiert eigentlich sogar eine zweiparametrige Schar von Lösungen mit $c_4 = 1$ und c_2,c_3 beliebig.

Literatur

[1] P. Deuflhard, F. Bornemann. *Numerische Mathematik II*, Gewöhnliche Differentialgleichungen. de Gruyter, 2002.