Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik
Institut für Wissenschaftliches Rechnen

Adaptive Umkehrschemata für Schrittfolgen mit nicht uniformen Kosten

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades
Diplommathematikerin

vorgelegt von

Name:	Sternberg	Vorname:	Julia
geboren am:	22. Mai 1978	in:	Rubzowsk (Russland)

Tag der Einreichung: 25. Juli
Betreuer: Prof. Ph.D. Andreas Griewank

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich ganz besonders bei meinem Betreuer Prof. Andreas Griewank für seine Hilfe und Unterstützung bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit bedanken. Mein Dank geht auch an Dr. Andrea Walther, deren Unterstützung und Hilfsbereitschaft ich sehr zu schätzen weiß. Des weiteren danke ich Peter Kaletta für die geleistete Hilfe bei der schriftlichen Ausarbeitung meiner Diplomarbeit in der deutschen Sprache.
Weiterhin gilt mein Dank allen Mitarbeitern des Instituts für Wissenschaftliches Rechnen der TU Dresden für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Dresden, den 25. Juli 2002

Thesen zur Diplomarbeit

Adaptive Umkehrschemata für Schrittfolgen mit nicht uniformen Kosten

- Die Problematik zur Aufstellung der Umkehrfunktionen bzw. Umkehrschemata mittels Checkpointing ist zu behandeln.
- Die Untersuchung der Eigenschaften des Checkpointing bzw. der Eigenschaften von bereits existierenden Verfahren zur Aufstellung der Umkehrschemata ist Gegenstand dieser Arbeit.
- Eine weitere Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit stellt die Entwicklung neuer Verfahren für die Konstruktion von Umkehrschemata dar.
- Auf der Basis bereits vorhandener und neu definierter Begriffe werden die grundlegenden Ergebnisse des Checkpointing analysiert bzw. beschrieben.
- Für die Häufigkeitswerte eines beliebigen Umkehrschemas wird eine obere Grenze aufgestellt. Diese obere Grenze wird von den Häufigkeitswerten der binomialen Umkehrschemata angenommen, wodurch die Optimalität von binomialen Umkehrschemata im Rahmen dieser Arbeit bewiesen wird.
- In diesem Zusammenhang wird eine neue vereinfachte Beweisführung des grundlegenden Satzes über die Ausführungskosten des binomialen Umkehrschema vorgestellt.
- Es wird eine neue Methode vorgestellt, eine obere bzw. untere Schranke für die Ausführungskosten von Umkehrschemata, die nicht uniforme Probleme behandeln, zu berechnen.

- Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neues Verfahren zur Aufstellung der Umkehrschemata, die nicht uniforme Probleme behandeln, entwickelt. Dabei sind die Kosten zur Aufstellung der jeweiligen Umkehrschemata im Vergleich zu den vorhandenen Verfahren wesentlich geringer. Die Lösungen des neuen Verfahrens und die Ausführungskosten der Umkehrschemata, die unter Verwendung des neuen Verfahrens aufgestellt wurden, werden untersucht bzw. den optimalen Werten gegenübergestellt.

- Des weiteren wird der Sonderfall untersucht, wenn die Anzahl der Zwischenzustände zu dem Zeitpunkt, als das Berechnungsprogramm gestartet wird, unbekannt ist. Das stellt eine besondere Problematik dar, die bei den praktischen Anwendungen oft der Fall ist. Die bisherigen theoretischen Untersuchungen gehen jedoch nicht darunter ein. Die Aufstellung von Umkehrschemata für derartige Folgen hat dabei adaptiv zu erfolgen.

- Im Rahmen dieser Arbeit wird eine neue Methode zur Aufstellung der adaptiven Umkehrschemata vorgestellt. Dabei werden sowohl uniforme als auch nicht uniforme Probleme betrachtet.

- Die mit den neuen Verfahren aufgestellten adaptiven Umkehrschemata werden untersucht, wobei die Ausführungskosten dieser adaptiven Umkehrschemata den optimalen Werten mit voraus bekannter Anzahl an Zwischenzuständen gegenübergestellt werden.

Inhaltsverzeichnis

Notations

In dieser Arbeit werden folgende mathematischen Symbole verwendet:

l	Anzahl der physikalischen Schritte bzw. Zwischenzustände
$\check{l}$	Nummer des Zwischenzustandes, der im zweiten Checkpoint gespeichert werden soll
l^*	Adaptiv festgelegte Schrittanzahl
$l_{max}(s, r)$	Maximale Länge der Schrittfolgen, die sich mit r und s umkehren lassen
$l_{max}(S)$	Maximale Länge der Schrittfolgen, die sich mit S umkehren lassen
$m_j(l, s)$	$\equiv m_j(S_{bin}(l, s))$
$m_j(S)$	Häufigkeitswert
$\mathbf{m}(S)$	Häufigkeitsprofil
r_i	Anzahl der Ausführungen des Schrittes F_i
$\mathbf{r}(S)$	Ausführungszahlprofil
$r_{max}(S)$	Maximale Ausführungszahl
$\mathbf{q}_{min}(l, s)$	Anzahl der Kopieraktionen in den binomialen Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$
s	Anzahl der Checkpoints

$s_{max}(S)$	Maximale Anzahl der Checkpoints, die bei der Abarbeitung des Schemas S verwendet werden
t_i	ZEIT(Ausführung F_i)
$\widetilde{t}_i$	ZEIT(Ausführung $\overline{F}_i$)
$\mathbf{t_l}$	$\langle t_1, ..., t_l \rangle$
F	Vektorfunktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
F_i	Teilfunktionen von F bzw. die physikalischen Schritte
$\widetilde{F}_i$	die Umkehrfunktionen bzw. -schritte
$\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$	Obere Schranke für die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$
$\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$	Obere Schranke für die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$
$\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$	Kosten zur Aufstellung des $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$
$\mathbf{O}(\mathbf{t_l}, s)$	Obere Schranke für die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$
S	Umkehrschema
$S_{adapt}(l, s)$	Adaptives Umkehrschema bei uniformen Schrittkosten (allgemein)
$\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$	Adaptives Umkehrschema bei uniformen Schrittkosten mit Bestimmung der Schrittanzahl am Anfang
$\widehat{S}_{adapt}(l, s)$	Adaptives Umkehrschema bei uniformen Schrittkosten mit Checkpointverschiebung
$S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$	Adaptives Umkehrschema bei nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ (allgemein)
$\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$	Adaptives Umkehrschema bei nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ mit Bestimmung der Schrittanzahl am Anfang

$\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$	Adaptives Umkehrschema bei nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ mit Checkpointverschiebung
$S_{bin}(l, s)$	Binomiales Umkehrschema
$S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$	Kostengünstig aufgestelltes Umkehrschema bei nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$
$S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$	Optimales Umkehrschema bei nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$
$\mathbf{T}(S)$	Ausführungskosten eines Umkehrschemas S bei uniformen Kosten
$\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S)$	Ausführungskosten eines Umkehrschemas S bei nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_l}$
$\mathbf{T}(S_{adapt}(l, s))$	Ausführungskosten des Umkehrschemas $S_{adapt}(l, s)$
$\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$	Ausführungskosten des Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$
$\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$	Ausführungskosten des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$
$\mathbf{T}_{min}(l, s)$	Ausführungskosten des binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$
$\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$	Ausführungskosten des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$
$\mathbf{U}(\mathbf{t_l}, s)$	Untere Schranke für die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S)$
$\beta(s, r)$	$\equiv \binom{s+r}{s} = \frac{(s+r)!}{s!r!}$

Kapitel 1

Einleitung

Viele mathematische Anwendungen lassen sich durch nichtlineare Vektorfunktionen

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad x \mapsto F(x)$$

beschreiben, die mit Hilfe von Computerprogrammen ausgewertet werden. Oft ist es erforderlich, die Auswertung dieser Vektorfunktionen umzukehren, wie z.B. für die Berechnung von adjungierten Variablen. Dabei besteht ein enger Zusammenhang zum Umkehrmodus des algorithmischen oder automatischen Differenzierens (AD).

Schwierigkeiten treten insbesondere dann auf, wenn sich die einzelnen Schritte zur Berechnung von F nicht umkehren lassen. Diese besondere Problematik bildet die Grundlage der vorliegenden Diplomarbeit.

Der einfachste Ansatz für die Umkehrung von F lässt sich so darstellen, dass die einzelnen Schritte bei der Ausführung des Berechnungsprogramms von F in einer Liste abgespeichert werden. Für die Umkehrung ist dann diese Liste nur entsprechend rückwärts abzuarbeiten. Dieses Verfahren ist in der Literatur als Basisverfahren bezeichnet worden.

Der Speicherplatzbedarf bei dieser Methode ist proportional zu der Laufzeit des Programms zur Auswertung von F und kann damit sehr groß sein. Trotz der zur Verfügung stehenden ständig wachsenden Speicherkapazität sind der praktischen Anwendung deshalb Grenzen gesetzt.

Bei einer anderen Methode zur Umkehrung von F wird nur eine bestimmte Anzahl von Zwischenzuständen bei der Ausführung von F abgespeichert. Diese Zwischenzustände werden als *Checkpoints* bezeichnet bzw. die Methode als Checkpointing. Dabei wird das Programm zur Berechnung von F nur abschnittweise, ausgehend von den entsprechenden Checkpoints, ausgeführt. Detailliert wird diese Methode im Kapitel 2 erläutert. Damit reduziert sich der erforderliche Speicherplatzbedarf erheblich.

Die Problematik der Aufstellung von Umkehrfunktion mittels Checkpointing wurde in mehreren Literaturquellen [VO85], [Evt91], [BBCG96], [Gri00] behandelt. Dabei wurde üblicherweise davon ausgegangen, dass die Anzahl von Zwischenzuständen, die bei der Ausführung von F berechnet werden, bereits zu dem Zeitpunkt, in dem das Berechnungsprogramm für F gestartet wird, bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung sind Verfahren entwickelt und analysiert worden, mit deren Hilfe bei bestimmten Eingangsbedingungen ein Umkehrschema, d.h. ein Algorithmus, aufgestellt wird, mit dem die Prozedur zur Auswertung von F optimal umgekehrt wird. Dabei wurde sowohl der Einzel- als auch der Mehrprozessoreinsatz untersucht. Diese Verfahren werden als Grundlage der vorliegenden Arbeit betrachtet. Im Rahmen dieser weiterführenden Arbeit soll nun auch der Fall untersucht werden, bei dem die Anzahl von Zwischenzuständen zu Beginn der Ausführung des Programms unbekannt ist.

Zunächst wird im Kapitel 2 auf die Grundlagen des Checkpointing eingegangen. Dabei werden entsprechende Definitionen und Begriffe eingeführt, die für die weiteren Untersuchungen notwendig sind.

Die Analysierung der grundlegenden Ergebnisse des Checkpointing findet im Kapitel 3 statt. In diesem Zusammenhang erfolgt auch eine detaillierte Beschreibung der in der Literatur angegebenen Verfahren, mit denen optimale Umkehrschemata für den Fall geliefert werden, dass die Anzahl von Zwischenzuständen als bekannte Größe vorausgesetzt wird. Außerdem wird eine neue Beweisführung des grundlegenden Satzes über die Ausführungskosten des binomialen Umkehrschemas vorgestellt, wobei neu definierte Konzepte, wie 'Häufigkeitswert' und 'Häufigkeitsprofil', darin einbezogen werden. Die Lösungen der verschiedenen Verfahren werden miteinander verglichen. Des weiteren wird eine Herangehensweise vorgestellt, die eine Abschätzung für die Lösung der einzelnen Verfahren liefert.

Im Kapitel 4 gilt es zu untersuchen, inwieweit es möglich ist, die Rechenzeiten zur Aufstellung der Umkehrschemata von bestehenden Verfahren zu reduzieren. Basierend auf einem in [Wal99] angegebenen Verfahren wird eine neue Methode entwickelt, mit der eine geringere Rechenzeit erforderlich ist. Dabei werden sowohl die mit beiden Verfahren ermittelten Lösungen gegenübergestellt als auch die Ausführungskosten des neuen Verfahrens analysiert. Außerdem wird in diesem Kapitel die kostengünstige Aufstellung der Umkehrschemata auf der Basis von den in [Knu98] und [Mehl84] diskutierten binären Bäumen untersucht.

Im Kapitel 5 wird eine Erweiterung der Problemstellung vorgenommen, und zwar für den Fall, dass die Anzahl der Zwischenzustände, die bei der Ausführung von F berechnet werden, zu dem Zeitpunkt als das Berechnungsprogramm für F gestartet wird, nicht bekannt ist. Dabei wird ein neues Verfahren vorgestellt, das auf der Basis der bisher bekannten Verfahren und des im Kapitel 4 beschriebenen Algorithmus ausgearbeitet wurde.

Eine ausführliche Beschreibung der Implementierung der neu entwickelten Verfahren erfolgt im Kapitel 6. Das anschließende Kapitel 7 enthält eine Zusammenfassung der behandelten Problematik und einen Ausblick.

Kapitel 2

Definitionen und Vorbetrachtungen

2.1 Definition der Schrittfolge

Bei dem bereits erwähnten Checkpointing wird vorausgesetzt, dass das Berechnungsprogramm für F in die Unterfunktionen F_i, $1 \leq i \leq l$, aufgeteilt werden kann. Diese Unterfunktionen werden im weiteren als physikalische Schritte bezeichnet. Durch Anwendung des physikalischen Schrittes F_i auf den Zwischenzustand $(i-1)$ erfolgt die Berechnung des Zwischenzustandes i. Demzufolge bildet F eine Evolution, wie es in der Abb. 2.1 dargestellt ist:

$$\underbrace{0 \xrightarrow{F_1} 1 \xrightarrow{F_2} \cdots \xrightarrow{F_i} i \xrightarrow{F_{i+1}} \cdots \xrightarrow{F_l} l}_{F}$$

Abbildung 2.1: Auswertung von F

Die mit i gekennzeichneten Zwischenzustände stellen Vektoren dar, die im allgemeinen eine große Dimension aufweisen.

Der physikalische Schritt F_i beschreibt eine mathematische Abbildung, die im allgemeinen nicht stabil invertierbar ist, zumindest nicht mit akzeptablem Kostenaufwand. Mit anderen Worten, es ist nicht möglich, mittels Inversenbildung F_i^{-1} vom Zwischenzustand i zum Zwischenzustand $(i-1)$ und letztendlich zum Anfangszustand 0 zu gelangen. Zusätzlich ist dabei noch zu beachten, dass aufgrund der großen Vektordimension nur eine bestimmte Anzahl von Zwischenzuständen im Speicher gesichert werden kann.

Sofern mit F ein explizit zeitabhängiges Problem oder ein allgemeiner Auswertungsprozess beschrieben wird, kann jeder Vorgang vom Zwischenzustand $(i-1)$ zu dem Zwischenzustand i als ein physikalischer Schritt F_i betrachtet werden. Auch bei der Übertragung einer allgemeinen Problemstellung in ein Computerprogramm, kann dieses Programm als zeitabhängiges Problem betrachtet werden, wobei eine geeignete Anzahl von ausgeführten Anweisungen in einem physikalischen Schritt zusammenzufassen ist. Damit kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass die Ausführung von einem gegebenen Programm nichts anderes als die Auswertung der einzelnen Teilfunktionen F_i, $1 \leq i \leq l$, darstellt.

Die Daten, die bei der Ausführung des Schrittes $F_i, 1 \leq i \leq l$, zu erzeugen und bei der Umkehrung des jeweiligen Schrittes zu verwenden sind, werden gespeichert. Sofern der Speicherplatz nur für die Daten eines einzigen Schrittes zu gewährleisten ist, wird angenommen, dass für jeden Schritt F_i, $1 \leq i \leq l$, eine weitere Funktion $\widetilde{F}_i$, $1 \leq i \leq l$, zur Umkehrung der Programmauswertung existiert. Mittels $\widetilde{F}_i$ werden die zur Umkehrung benötigten Daten, die bei der Ausführung von F_i erzeugt werden, in einen Stack geschrieben und die Daten des vorherigen Zwischenzustandes $(i-1)$ ermittelt, wobei die in dem Stack gespeicherten Daten des physikalischen Schrittes F_i verwendet werden.

2.2 Charakterisierung von Schrittkosten

Es wird angenommen, dass alle physikalischen Schritte getrennt voneinander zu betrachten sind, es existiert also keine Anweisung, die mehr als einen physikalischen Schritt betrifft. Sofern die Ausführungszeiten gleich den Schrittkosten gesetzt werden, kann der gesamte Kostenaufwand zur Auswertung von F als Summation der einzelnen Ausführungszeiten

$$\text{ZEIT}(\text{Ausführung } F_1, ..., F_l) \ = \sum_{i=1}^{l} \text{ZEIT } (\text{Ausführung } F_i)$$

aufgefasst werden. Die Ausführungskosten für einen physikalischen Schritt F_i, $1 \leq i \leq l$, werden mit

$$t_i \ \equiv \ \text{ZEIT}(\text{Ausführung } F_i) \ \text{ für } \ 1 \leq i \leq l$$

bezeichnet. Die Zeit, die für einen Umkehrschritt $\widetilde{F}_i$, $1 \leq i \leq l$, erforderlich ist, ist durch

$$\widetilde{t}_i \ \equiv \ \text{ZEIT}(\text{Ausführung } \widetilde{F}_i) \ \text{ für } \ 1 \leq i \leq l$$

gegeben. Die oben definierten Ausführungszeiten bzw. -kosten sind zur Beschreibung des Kostenaufwandes für die Umkehrung der Schrittfolge F_i, $1 \leq i \leq l$, erforderlich. Grundsätzlich werden zwei verschiedene Kostenfälle unterschieden, uniforme und nicht uniforme Schrittkosten.

Definition2.1 (Schrittkosten) Gegeben sei eine Evolution, die in l physikalische Schritte F_i, $1 \leq i \leq l$, aufgeteilt ist. Sofern eine Konstante w existiert, so dass $t_i = w$ für alle physikalischen Schritte F_i, $1 \leq i \leq l$, gilt, werden diese Schritte als physikalische Schritte mit $uniformen\ Kosten$ bezeichnet. Es wird weiterhin im Rahmen dieser Arbeit angenommen, dass unter der Voraussetzung, dass alle Schritte F_i, $1 \leq i \leq l$, die gleiche Rechenzeit w erfordern, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w \equiv 1$ gesetzt wird. Andernfalls spricht man von physikalischen Schritten mit $nicht\ uniformen\ Kosten$. Die Schrittkosten einer Folge F_i, $1 \leq i \leq l$, werden durch eine Folge

$$\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_l \rangle \tag{2.1}$$

definiert, wobei die Folge $\mathbf{t_l}$ genau l Elemente $t_i > 0$, $1 \leq i \leq l$, enthält. Damit werden die uniformen Schrittkosten folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{t_l} = \langle 1, ..., 1 \rangle, \tag{2.2}$$

wobei alle $t_i = 1$, $1 \leq i \leq l$, gesetzt werden. Im Falle nicht uniformer Schrittkosten hingegen existieren mindestens zwei Indizes i, j, $i \neq j$, so dass $t_i \neq t_j$, $1 \leq i, j \leq l$, gilt.

2.3 Definition von Umkehrschemata

Bei dem Checkpointing werden die Daten einer bestimmten Anzahl von Zwischenzuständen als Checkpoints gespeichert. Jeder abgespeicherte Checkpoint enthält die Nummer i des Zwischenzustandes, den er repräsentiert. Die Auswertung der Funktion F wird dementsprechend von einem geeigneten Checkpoint und nicht notwendigerweise vom Anfangszustand aus gestartet. Dabei ist die Umkehrung einer Funktion F als eine Folge von Anweisungen zu interpretieren. Die Anweisungen werden in entsprechenden Aktionen zusammengefasst, die ihrerseits ein Umkehrschema darstellen.

Im Rahmen dieser Arbeit soll nur der Fall betrachtet werden, dass lediglich ein Prozessor zur Verfügung steht und somit ausschließlich serielle Umkehrschemata zu berücksichtigen sind, die im folgenden zu definierten sind. Der Mehrprozessorenfall ist bereits in [Wal99] untersucht worden.

Definition 2.2(Umkehrschema S) Es wird mit l die Nummer des letzten physikalischen Schrittes, mit i ein aktueller Zwischenzustand und mit j die

Nummer des Checkpoints bezeichnet. Anfangs gilt $i = i_0 \geq 0$, $j = j_0 \geq 0$ und $l = l_0$, wobei $i < l_0 \leq \infty$ ist. Ein *Umkehrschema* S wird als eine Reihe folgender Aktionen dargestellt:

A	$\equiv$	Falls $i < l - 1$ führe den physikalischen Schritt F_{i+1} aus. Setze $i = i + 1$.
C_k	$\equiv$	Kopiere den aktuellen Zwischenzustand in den Checkpoint $j + k$.
R_k	$\equiv$	Reinitialisiere den aktuellen Zwischenzustand aus dem Checkpoint $j + k$ und setze i zu seiner Nummer.
U	$\equiv$	Falls $l = \infty$ setze $l = i + 1$. Falls $i = l - 1$ führe den Umkehrschritt $\widetilde{F}_{i+1}$ aus und setze $l = l - 1$.

Es wird vereinbart, dass jedes Umkehrschema mit der Aktion R_0 beginnt, wobei der Anfangszustand aus dem Checkpoint j_0 eingelesen wird. Die k-fache Ausführung der Aktion A wird im weiteren mit A^k bezeichnet.

In die Definition 2.2 sind bereits verschiedene Ergebnisse aus [GW97], [Wal99], [Gri00] eingeflossen, insbesondere wird a priori sichergestellt, dass jeder Schritt nur einmal umzukehren ist. Als weiteres Ergebnis von [GW97], [Wal99], [Gri00] wird die Checkpoint Stabilität für jedes Umkehrschema vorausgesetzt. Nachdem ein Zwischenzustand i durch die Aktion C_k in einen Checkpoint $(j + k)$ kopiert worden ist, ist die nächste Aktion C_k mit diesem k erst möglich, nachdem l auf i reduziert wurde. Außerdem werden bis zu diesem Zeitpunkt keine Aktionen durchgeführt, die die Zwischenzustände zwischen 0 und i betreffen. Die Checkpoint Stabilität ist eine zentrale Eigenschaft für die weiteren Untersuchungen.

Der gesamte Kostenaufwand zur Ausführung der einzelnen Umkehrschritte $\widetilde{F}_i$, $1 \leq i \leq l$, beträgt

$$\widetilde{t} = \sum_{i=1}^{l} \widetilde{t}_i. \tag{2.3}$$

Weiterhin wird mit $l_{max}(S)$ das Maximum des erreichten Zustandindexes $(i - i_0)$ und mit $s_{max}(S)$ das Maximum von $(j + k - j_0)$ bezeichnet.

Die Abbildung 2.2 zeigt beispielhaft ein Umkehrschema S. Dabei werden beginnend von $i_0 = 0$ die Werte $s_{max}(S) = 3$ und $l_{max}(S) = 10$ erreicht. Hierbei soll angenommen werden, dass die Ausführung aller Funktionen F_i, $1 \leq i \leq$

10, den gleichen Rechenaufwand $w = 1$ bzw. die Ausführung aller Funktionen $\widetilde{F}_i$, $1 \leq i \leq 10$, den gleichen Rechenaufwand $w = 2$ erfordert.

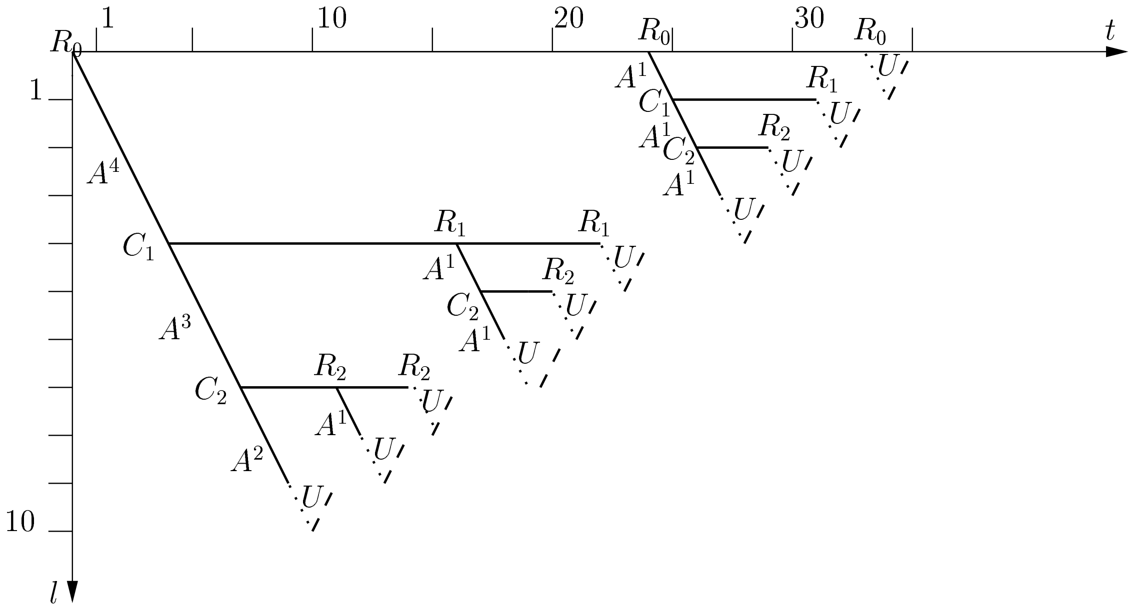

Abbildung 2.2: Beispiel-Umkehrschema S

Die physikalischen Schritte 1 bis 10 sind auf der senkrechten Achse aufgetragen, während die Zeit für die Ausführung der einzelnen Aktionen bzw. Prozesse auf der horizontalen Achse abgebildet ist. Die Zeit wird in w-Einheiten gemessen. Im folgenden soll das Umkehrschema beschrieben werden. Zunächst wird die Aktion R_0 ausgeführt, wobei der Anfangszustand aus dem ersten Checkpoint eingelesen wird. Anschließend erfolgt die Auswertung von vier physikalischen Schritten, was mit der Aktion A^4 beschrieben wird. Im Anschluss daran wird mit der Aktion C_1 der vierte Zwischenzustand in den zweiten Checkpoint gespeichert. Durch die folgende Aktion A^3 werden wieder 3 Schritte ausgeführt, und der Zwischenzustand 7 wird in den dritten Checkpoint durch die Aktion C_2 gespeichert. Anschließend werden wieder 2 Schritte unter Anwendung der Aktion A^2 ausgeführt. Dann wird die Aktion U angewendet, wodurch der physikalische Schritt F_{10} umgekehrt wird. Danach wird der 7-ten Zwischenzustand aus dem dritten Checkpoint eingelesen, d.h. die Aktion R_2 durchgeführt. Unter Verwendung der Daten vom Zwischenzustand 7 führt die Aktion A einen weiteren physikalischen Schritt F_8 aus. Dadurch wird es möglich, den Schritt F_9 mit Hilfe der Aktion U umzukehren. Dieses Umkehrschema läuft mit dem gleichen Prinzip so lange ab, bis alle physikalischen Schritte umgekehrt sind. Es wird ersichtlich, dass die

Checkpoints horizontale Linien im Ablaufdiagramm darstellen. Da der erste Checkpoint der Ausgangszustand bzw. der Zwischenzustand 0 ist und somit auf der Zeitachse liegt, stellt auch die Zeitachse selbst einen Checkpoint dar.
Da nur ein Prozessor zur Verfügung steht, kann in jedem Zeitschritt nur eine Aktion ausgeführt werden. Deshalb schneidet in der Abbildung 2.2 zu jedem beliebigen Zeitpunkt eine Senkrechte genau eine schräg verlaufende Prozesslinie.
Mit der Checkpointstrategie aus Abb. 2.2 sind 35 Zeiteinheiten erforderlich, um das Ausführungsprogramm für F umzukehren. Dabei benötigt man den Speicherplatz für 3 Checkpoints und für einen Speicherschritt. Wird das zu Beginn erwähnte Basisverfahren angewendet, entsteht eine Laufzeit von nur 20 Zeiteinheiten, wobei jedoch sowohl alle 10 Zwischenzustände als auch der gesamte Ausführungsverlauf abgespeichert werden muß.
Das in der Abbildung 2.2 dargestellte Umkehrschema ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} S \equiv\; & R_0 \triangleright A^4 \triangleright C_1 \triangleright A^3 \triangleright C_2 \triangleright A^2 \triangleright U \triangleright R_2 \triangleright A \triangleright R_2 \triangleright U \triangleright \\ & \triangleright R_1 \triangleright A \triangleright C_2 \triangleright A \triangleright U \triangleright R_2 \triangleright U \triangleright R_1 \triangleright U \triangleright R_0 \triangleright A \triangleright \\ & \triangleright C_1 \triangleright A \triangleright C_2 \triangleright U \triangleright R_2 \triangleright U \triangleright R_1 \triangleright U \triangleright R_0 \triangleright U \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dabei ist der Operator '$\triangleright$' so zu interpretieren, dass zunächst die linke Anweisung und dann die rechte Anweisung ausgeführt wird.
Nun ergibt sich natürlicherweise die Frage, welches Umkehrschema für eine Folge F_i, $1 \leq i \leq l$, physikalischer Schritte aus der gesamten Menge von möglichen Umkehrschemata ein optimales bei einer festen Anzahl von Checkpoints darstellt, bzw. wie ein solches optimales Schema zu konstruieren ist. Die bei der Ausführung der jeweiligen Umkehrschemata entstehenden Kosten entscheiden darüber, welches Umkehrschema optimal ist. Diese Problematik soll Gegenstand der folgenden Betrachtungen sein. Zunächst werden dazu weitere Kennwerte der Umkehrschemata eingeführt.

2.4 Wiederholungszahl und -profil

Für ein Umkehrschema S ist es erforderlich, die Anzahl der Ausführungen jedes physikalischen Schrittes zu bestimmen.
Definition 2.3 (Wiederholungszahl) Es sei ein Umkehrschema S gegeben, wobei $l_{max}(S) = l$ ist. Mit der Wiederholungszahl $r_i \equiv r(i)$, wobei

$$r : [1, l] \to \mathbb{N}$$

ist, wird die Anzahl der Ausführungen des jeweiligen Schrittes F_i, $1 \leq i \leq l$, bezeichnet, die zur Abarbeitung von S erforderlich ist.

Das kann auch in Bezug auf die Zwischenzustände folgendermaßen interpretiert werden. Mit r_i wird angegeben, wievielmal ein Zwischenzustand i, $1 \leq i \leq l$, bei der Ausführung des Umkehrschemas S berechnet wird.

Definition 2.4 (Wiederholungsprofil) Es sei ein Umkehrschema S gegeben, wobei $l_{max}(S) = l$ ist. Die Folge der Wiederholungszahlen

$$\mathbf{r}(S) = \langle r_1, ..., r_l \rangle \tag{2.5}$$

ergibt das *Wiederholungsprofil* für das Umkehrschema S.

Definition 2.5 (Maximale Wiederholungszahl) Für ein Umkehrschema S mit $l_{max}(S) = l$ wird die maximale Wiederholungszahl $r_{max}(S)$ folgendermaßen definiert:

$$r_{max}(S) = \|\mathbf{r}(S)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} r_i. \tag{2.6}$$

Am Beispiel des Umkehrschemas S aus Abbildung 2.2 ergibt sich folgendes Wiederholungsprofil:

$$\mathbf{r}(S) = \langle 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 0 \rangle$$

In der Abbildung 2.3 wird dieses Profil graphisch dargestellt. Dabei erreicht die maximale Wiederholungszahl $r_{max}(S)$ den Wert 2.

2.5 Häufigkeitswerte und Häufigkeitsprofile

Weiterhin ist für ein Umkehrschema S mit $l_{max}(S) = l$ für jede Zahl j, $0 \leq j \leq r_{max}(S)$, die Anzahl von physikalischen Schritten F_i, $1 \leq i \leq l$, mit $r_i = j$ zu bestimmen. Dieser Wert entspricht der Anzahl von physikalischen Schritten, die genau j mal bei der Abarbeitung eines Umkehrschemas S ausgeführt werden. Diese neuen Größen werden als Häufigkeitswerte bezeichnet und im folgenden definiert.

Definition 2.6 (Häufigkeitswert) Für ein Umkehrschema S mit $l_{max}(S) = l$ werden die *Häufigkeitswerte* $m_j(S)$, $0 \leq j \leq r_{max}(S)$, folgendermaßen definiert:

$$m_j(S) \equiv \mid \{r_i = j,\ 1 \leq i \leq l\} \mid = \mid r^{-1}(j) \mid . \tag{2.7}$$

Hier bezeichnet $\mid M \mid$ die Anzahl der Elemente einer beliebigen Menge M.

Definition 2.7 (Häufigkeitsprofil) Es sei ein Umkehrschema S gegeben, wobei $l_{max}(S) = l$ ist. Die Folge der Häufigkeitswerte

$$\mathbf{m}(S) = \langle m_0(S), ..., m_{r_{max}(S)}(S) \rangle \tag{2.8}$$

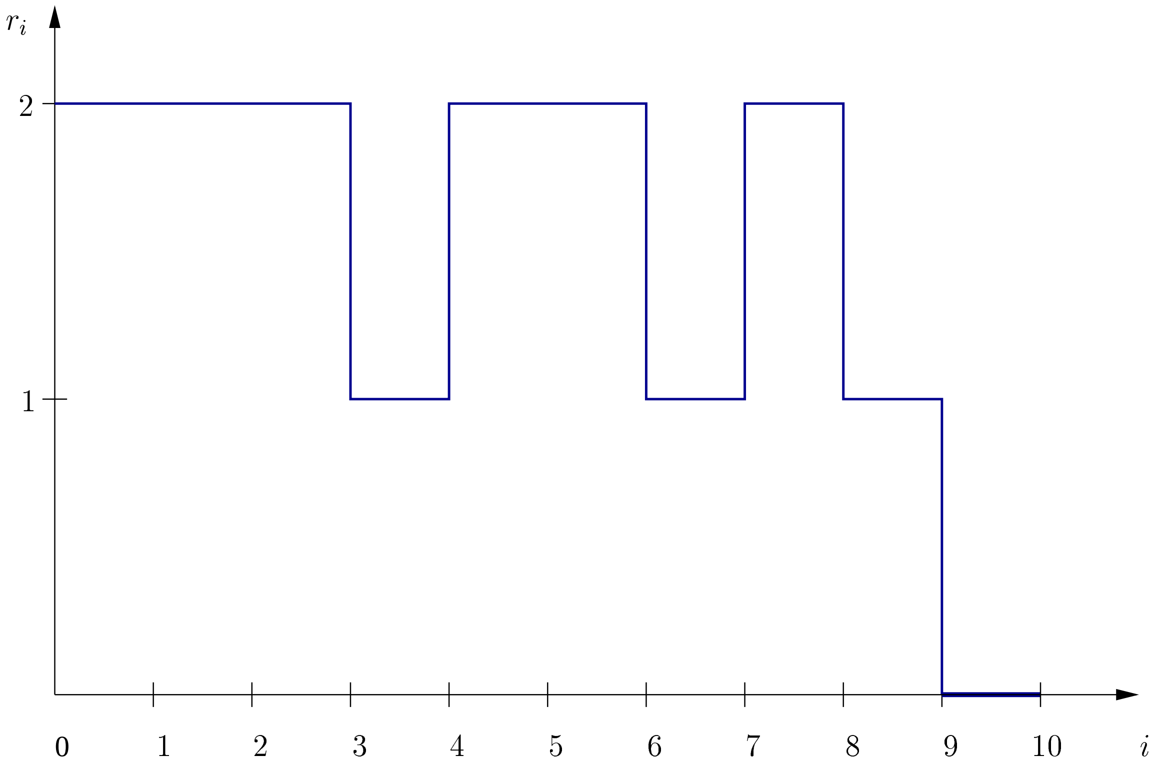

Abbildung 2.3: Wiederholungsprofil für S

ergibt das *Häufigkeitsprofil* für das Umkehrschema S, wobei $r_{max}(S)$ die maximale Wiederholungszahl dieses Umkehrschemas S bezeichnet.
Am Beispiel des Umkehrschemas S aus Abbildung 2.2 ist in der Abbildung 2.4 das Häufigkeitsprofil für dieses Umkehrschema dargestellt. Dabei gilt folgendes:

$$\mathbf{m}(S) = \langle m_0(S), m_1(S), m_2(S) \rangle = \langle 1, 3, 6 \rangle$$

Außerdem gilt für jedes Umkehrschema folgendes:

$$\sum_{j=0}^{r_{max}(S)} m_j(S) = l. \tag{2.9}$$

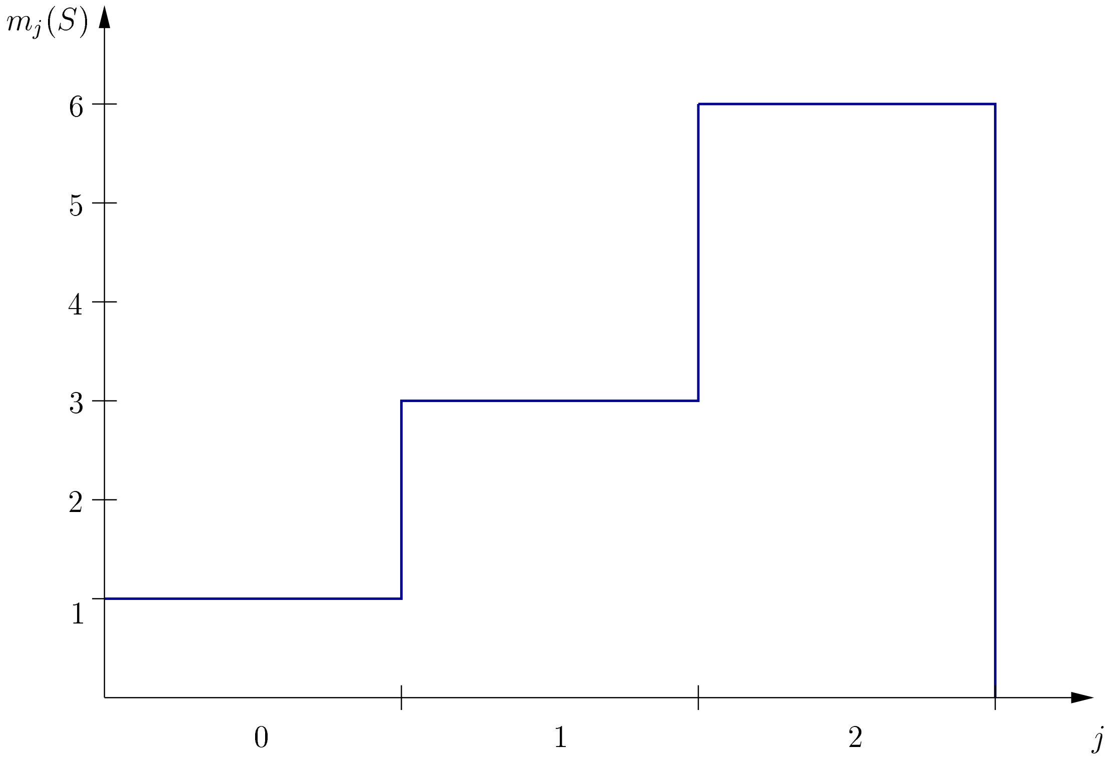

Abbildung 2.4: Häufigkeitsprofil für S

2.6 Kostenaufwand eines Umkehrschemas

Es wird im weiteren mit

$$(2.10) \qquad \mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S) = \begin{cases} \mathbf{r}(S)^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{t_l} = \sum_{i=1}^{l} r_i t_i & : \quad falls\ l \leq l_{max}(S) \\ \infty & : \quad sonst \end{cases}$$

der Kostenaufwand bezeichnet, der bei der Abarbeitung des Umkehrschemas S entsteht, wobei die Schrittkosten $\mathbf{t} = \langle t_1, ..., t_l \rangle$ zugrunde gelegt werden. Bei uniformen Schrittkosten wird der Kostenaufwand unter den im Unterkapitel 2.2 getroffenen Voraussetzungen durch

$$(2.11) \qquad \mathbf{T}(S) = \sum_{i=1}^{l} r_i \qquad falls \qquad l \leq l_{max}(S),$$

beschrieben, wobei die Summation über die Anzahl der physikalischen Schritte erfolgt. Die Summe (2.11) entspricht der Anzahl aller ausgeführten physikalischen Schritte F_i, $1 \leq i \leq l$, während der Ausführung von S.

Mit Hilfe der Häufigkeitswerte lässt sich die Beziehung (2.11) folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{T}(S) = \sum_{j=0}^{r_{max}(S)} j \cdot m_j(S). \tag{2.12}$$

Diese Zusammenhänge werden im folgenden detailliert untersucht, wobei zusätzlich darauf eingegangen wird, wie diese Größe zu minimieren und damit der gesamte Kostenaufwand zu minimieren ist. Auf dieser Grundlage wird die Definition für optimale Umkehrschemata festgelegt.

2.7 Klassifizierung von Umkehrproblemen

Für die weiteren Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden, ist es hilfreich, eine detaillierte Klassifizierung der betrachteten Umkehrszenarien vorzustellen.

Die in Abb. 2.5 dargestellte Klassifizierung beinhaltet die bereits bekannten Methoden zur Aufstellung von Umkehrschemata bzw. die neu entwickelten Verfahren, die der Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind.

Dabei ist anzumerken, dass zunächst alle Schrittfolgen nach ihren Eigenschaften unterteilt werden. Danach werden die Umkehrschemata angegeben, die für die Umkehrung der entsprechenden Klasse von Schrittfolgen zuständig sind. Dabei ist zu beachten, dass der Index 'kostengünstig' sich auf die Kosten für die Aufstellung des Umkehrschemas bezieht, jedoch nicht auf seine Ausführung.

Aus dieser Übersicht geht hervor, dass eine Vielzahl von praktisch existierenden Schrittfolgen mit den bereits bestehenden Verfahren zur Aufstellung von Umkehrschemata nicht abgedeckt ist, was jedoch in dieser Arbeit zu erreichen ist.

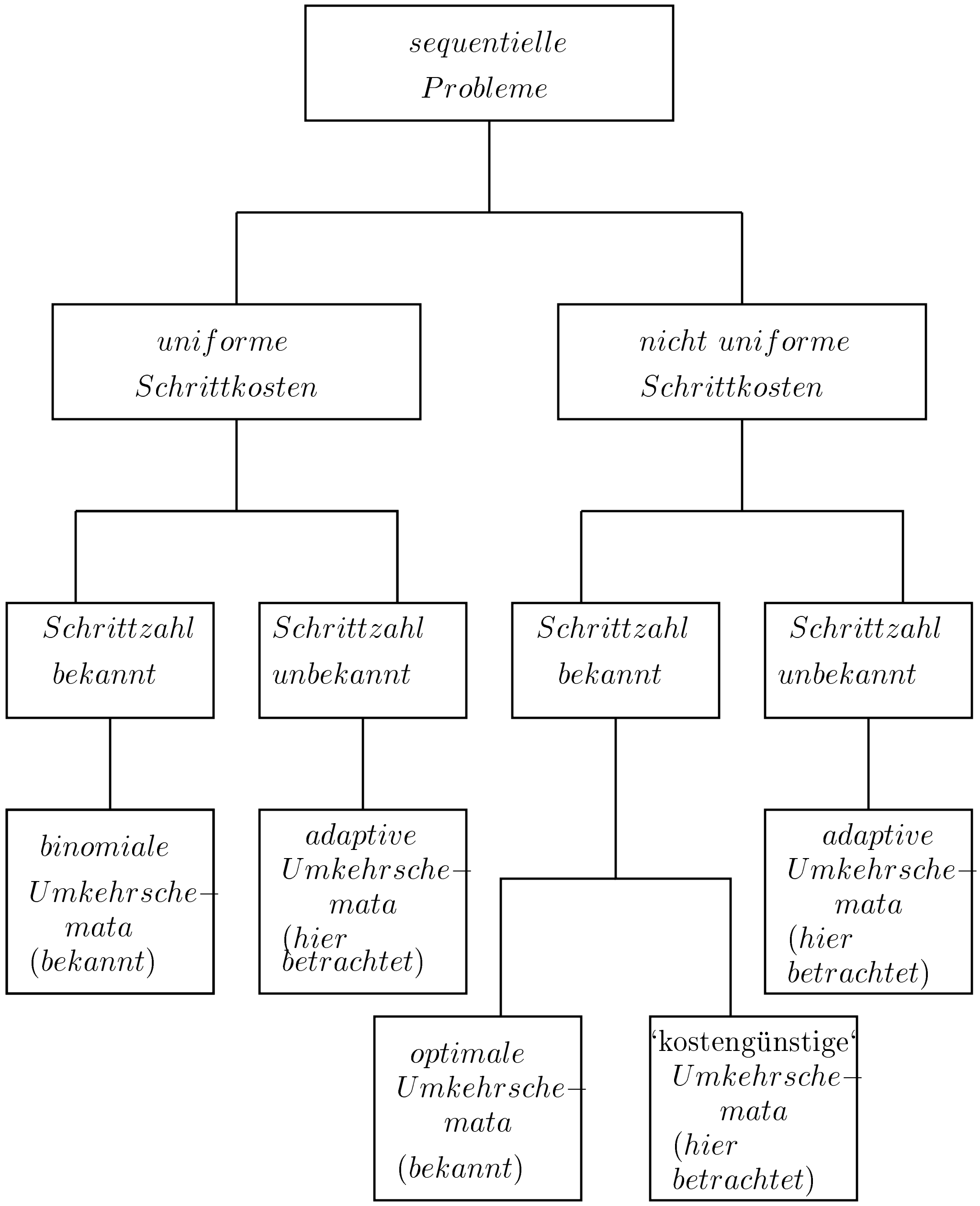

Abbildung 2.5: Klassifizierung der Umkehrprobleme

Kapitel 3

Grundlegende Ergebnisse

In diesem dritten Kapitel werden grundlegende Ergebnisse vorgestellt, die auf der Basis der im Kapitel 2 eingeführten Eigenschaften erzielt werden.

3.1 Aufteilung der Umkehrschemata

Unter Nutzung der Checkpoint Stabilität kann jedes Umkehrschema in zwei Umkehrschemata S^1 und S^2 zerlegt werden, indem der $\check{l}$-te Zwischenzustand durch die Aktion C_k in einen Checkpoint $(j+k)$ kopiert wird, wobei $j+k = j_0+1$ gilt. Dabei stellt das Umkehrschema S^1 eine Reihe von Anweisungen dar, die die physikalischen Schritte $F_1, ..., F_{\check{l}}$ betreffen. Das Umkehrschema S^2 besteht hingegen aus den Aktionen, die die physikalischen Schritte $F_k,\ k > \check{l} = l_{max}(S^1)$, betreffen. In der Abb. 3.1 ist diese Aufteilung graphisch dargestellt.
Formelmäßig ausgedrückt ergibt sich:

$$S = S^1 \circ S^2 \tag{3.1}$$

Dabei ist der Operator '$\circ$' folgendermaßen zu interpretieren: Die Aktionen, die das Umkehrschema S^1 darstellen, betreffen die physikalischen Schritte mit kleineren Indizes als die Indizes der Schritte, die in den Aktionen des Umkehrschemas S^2 einbezogen werden. Dabei wird der maximale Index $\check{l}$ des im Schema S^1 betroffenen physikalischen Schrittes als $\check{l} = l_{max}(S^1)$ definiert. An dieser Stelle sind zu der Definition 2.2 des Umkehrschemas zwei zusätzliche Aktionen einzuführen:
P_+ erhöhe den Index j um 1 $(j = j+1)$
P_- reduziere den Index j um 1 $(j = j-1)$
Gemäß Definition 2.2 des Umkehrschemas und der oben eingeführten zusätz-

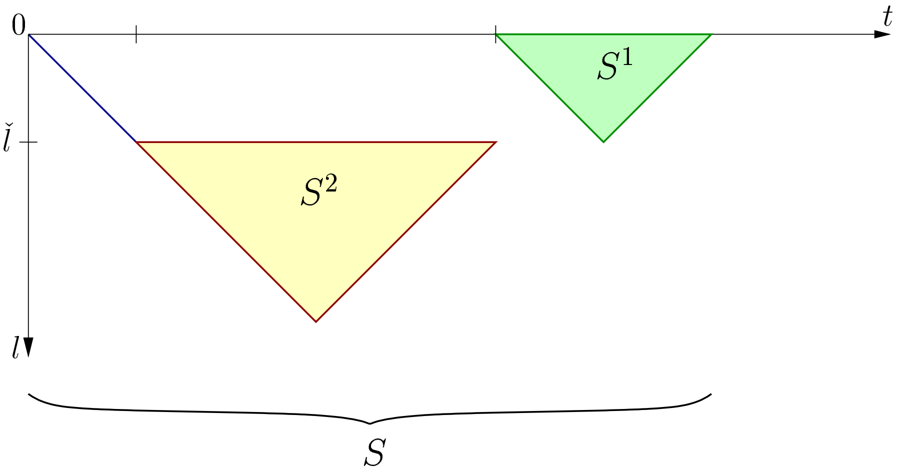

Abbildung 3.1: Aufteilung des Umkehrschemas $S = S^1 \circ S^2$

licher Aktionen P_+ und P_- kann S folgendermaßen spezifiziert werden:

$$S = S^2 \circ S^1 = R_0 \triangleright A^{\check{l}} \triangleright P_+ \triangleright C_0 \triangleright S^2 \triangleright P_- \triangleright S^1. \tag{3.2}$$

Bei der Aufteilung gemäß (3.1) sind folgende Zusammenhänge zu betrachten:

$$l_{max}(S^1 \circ S^2) = l_{max}(S^1) + l_{max}(S^2) \tag{3.3}$$

$$s_{max}(S^1 \circ S^2) = \max\left\{s_{max}(S^1), s_{max}(S^2) + 1\right\} \tag{3.4}$$

$$r_{max}(S^1 \circ S^2) = \max\left\{r_{max}(S^1) + 1, r_{max}(S^2)\right\} \tag{3.5}$$

Aus der Aufteilung (3.1) lässt sich eine Rekursionseigenschaft für die Häufigkeitwerte $m_j(S)$ des Umkehrschemas S herleiten, nämlich

$$m_j(S) = m_j(S^2) + m_{j-1}(S^1). \tag{3.6}$$

Der Grund dafür ist, dass die Anzahl der Vorwärtsschritte zu dem Zeitpunkt, wenn genau 2 Checkpoints abgespeichert sind, der Nummer $\check{l}$ des in dem zweiten Checkpoint gespeicherten Zwischenzustandes entspricht. Dabei ist jeder physikalische Schritt $F_k,\ k \leq \check{l}$, einmal ausgeführt worden. Die Anweisungen des Umkehrschemas S^1 betreffen die physikalischen Schritte $F_k,\ k \leq \check{l}$, die bereits einmal ausgeführt sind. Die Anweisungen des Umkehrschemas S^2 betreffen die physikalischen Schritte $F_k,\ k > \check{l}$, die hingegen noch niemals ausgeführt wurden. Daraus lässt sich folgendes schlussfolgern: Wenn zu der Anzahl der Schritte, die bei der Abarbeitung des Umkehrschemas S^1 $(j-1)$ mal ausgeführt werden, noch die Anzahl der Schritte, die bei der Abarbeitung von S^2 j mal auszuführen sind, aufaddiert wird, entspricht diese Summe dem Häufigkeitswert $m_j(S)$.

3.2 Maximale Länge $\mathbf{l_{max}(s,r)}$ bei beschränkter Wiederholungszahl

Es ist zu klären, wie groß die Anzahl der physikalischen Schritte l ist, die mit s Checkpoints umgekehrt werden können, wobei jeder Schritt F_i, $1 \leq i \leq l$, nicht mehr als r mal ausgeführt werden kann. In diesem Zusammenhang wird folgende Bezeichnung eingeführt:

$$l_{max}(s,r) \equiv \max\left\{l_{max}(S):\ s_{max}(S) \leq s,\ r_{max}(S) \leq r\right\} \tag{3.7}$$

Um $l_{max}(s,r)$ für die gegebenen Größen s und r zu berechnen, wird die Aufteilung des Umkehrschemas S gemäß (3.1) herangezogen. Demzufolge gilt gemäß (3.3) - (3.5) folgendes:

$$\begin{aligned} l_{max}(s,r) &\equiv \max\Big\{l_{max}(S^1 \circ S^2):\ s_{max}(S^1) \leq s,\ s_{max}(S^2) \leq s-1, \\ &\qquad\qquad r_{max}(S^1) \leq r-1,\ r_{max}(S^2) \leq r\Big\} \\ &\equiv \max\Big\{l_{max}(S^1) + l_{max}(S^2):\ s_{max}(S^1) \leq s,\ s_{max}(S^2) \leq s-1, \\ &\qquad\qquad r_{max}(S^1) \leq r-1,\ r_{max}(S^2) \leq r\Big\} \\ &\equiv \max\Big\{l_{max}(S^1):\ r_{max}(S^1) \leq r-1, s_{max}(S^1) \leq s\Big\} + \\ &\quad\ \max\Big\{l_{max}(S^2):\ r_{max}(S^2) \leq r,\ s_{max}(S^2) \leq s-1\Big\} \\ &\equiv l_{max}(s,r-1) + l_{max}(s-1,r). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Graphisch wird diese Beziehung in Abb. 3.2 veranschaulicht:

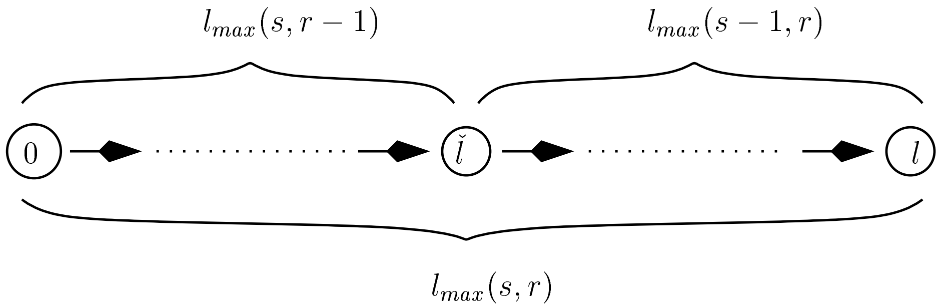

Abbildung 3.2: Aufteilung mit dem zweiten Checkpoint

Die Werte von $l_{max}(s,r)$ für $s=1$ oder $r=1$ ergeben sich aufgrund der Definition eines Umkehrschemas (siehe Kapitel 2.3) wie folgt:

$$l_{max}(1,r) = r+1, \qquad l_{max}(s,1) = s+1, \qquad s,r \geq 1. \tag{3.9}$$

Die letzten beiden Formeln werden mit den folgenden beispielhaften Umkehrschemata bestätigt. Im Fall, wenn nur ein Checkpoint zur Verfügung steht, wird ein Umkehrschema $S^{'}$ für eine beliebige Anzahl r folgendermaßen definiert:

$$S^{'} \equiv R_0 \triangleright A^r \triangleright U \triangleright R_0 \triangleright A^{r-1} \triangleright U \triangleright \cdots \triangleright R_0 \triangleright A \triangleright U \triangleright R_0 \triangleright U.$$

Daraus folgt, dass die Anzahl der umgekehrten Schritte genau $(r+1)$ ist. Falls s Checkpoints zur Verfügung stehen und jeder Schritt nicht mehr als einmal ausgeführt werden kann, wird ein Umkehrschema $S^{''}$ wie folgt definiert:

$$S^{''} \equiv R_0 \triangleright A \triangleright C_1 \triangleright A \triangleright C_2 \triangleright \cdots \triangleright A \triangleright C_{s-1} \triangleright A \triangleright U \triangleright R_{s-1} \triangleright U \triangleright \cdots \triangleright U.$$

Dabei ist die Anzahl der umgekehrten Schritte genau $(s+1)$, was mit den Formeln in (3.9) übereinstimmt.
Als Schlussfolgerung der Formeln (3.9) ist die Aussage des folgenden Satzes zu interpretieren:
Satz 3.1 (Binomiale Regel) Die in (3.7) definierte maximale Schrittzahl ist explizit durch

$$l_{max}(s,r) = \beta(s,r) \equiv \binom{s+r}{s} \equiv \frac{(s+r)!}{s!\, r!} \qquad (3.10)$$

gegeben, wobei $\check{l} = l_{max}(s, r-1) = \binom{s+r-1}{s}$ gilt.
Nähere Details sind in [Gri00] enthalten.
Die in (3.10) definierten Umkehrschemata ergeben bei uniformen Schrittkosten für gegebene l und s die minimale Laufzeit $\mathbf{T}(S)$, worauf im folgenden Unterkapitel näher eingegangen werden soll.

3.3 Optimale Umkehrschemata

Es sei eine Folge von l physikalischen Schritten mit den Kosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_l \rangle$ gegeben. In diesem Kapitel werden für diese Schrittfolgen optimale Umkehrschemata untersucht bzw. Regeln zur Aufstellung optimale Umkehrschemata hergeleitet.
Um aus einer Menge der Umkehrschemata

$$\{S: \ l \leq l_{max}(S) \ und \ s_{max}(S) \leq s\}$$

ein optimales Umkehrschema für eine Folge von l physikalischen Schritten und s verfügbaren Checkpoints auszuwählen, ist es erforderlich, zunächst die

Ausführungskosten $\mathbf{T}(S)$ oder $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S)$ dieser Umkehrschemata zu minimieren.

$$\text{(3.11)} \qquad \mathbf{T}_{min}(l,s) \equiv \min\left\{\mathbf{T}(S),\ l \leq l_{max}(S)\ und\ s_{max}(S) \leq s\right\}$$

bzw.

$$\text{(3.12)} \qquad \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l},s) \equiv \min\left\{\mathbf{T}(\mathbf{t_l},S),\ l \leq l_{max}(S)\ und\ s_{max}(S) \leq s\right\}$$

3.3.1 Optimale Umkehrschemata bei uniformen Schrittkosten

Es sei eine Folge von l physikalischen Schritten gegeben, wobei uniforme Schrittkosten zugrunde gelegt werden. Da der minimale Wert $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ in der Regel von mehreren Schemata erreicht wird, ist es möglich, diese noch bezüglich einer zweiten Größe $\mathbf{q}(S)$ zu minimieren, um ein optimales Umkehrschema auszuwählen. Dabei wird mit $\mathbf{q}(S)$ die Anzahl der Kopieraktionen C_k in den Checkpoints bezeichnet, die bei der Abarbeitung von S erforderlich sind. Gemäß der Aufteilung (3.1) kann $\mathbf{q}(S)$ wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{q}(S) = \mathbf{q}(S^1 \circ S^2) = \mathbf{q}(S^1) + \mathbf{q}(S^2) + 1.$$

Für das Beispiel des Umkehrschemas S, das in der Abbildung 2.2 dargestellt ist, betragen die oben angeführten Größen $\mathbf{T}(S) = 15$ und $\mathbf{q}(S) = 7$.

Aus allen Umkehrschemata, deren Ausführungskosten $\mathbf{T}(S)$ den minimalen Wert $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ annehmen, werden solche Umkehrschemata bevorzugt, die die sekundäre Zielfunktion $\mathbf{q}$ minimieren.

(3.13)

$$\mathbf{q}_{min}(l,s) \equiv \min_S \left\{\mathbf{q}(S) :\ l \leq l_{max}(S)\ ,\ s_{max}(S) \leq s\ ,\ \mathbf{T}(S) \equiv \mathbf{T}_{min}(l,s)\right\}$$

Die Minimierung der beiden Größen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{q}$ ist allerdings immer noch nicht eindeutig, mit anderen Worten, es kann mehrere Umkehrschemata geben, bei denen die minimalen Werte $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ bzw. $\mathbf{q}_{min}(l,s)$ angenommen werden.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass die Anzahl der Leseaktionen von Checkpoints R_k nicht minimiert werden kann, da sie als Folge der Checkpoint Stabilität immer $(l-1)$ beträgt.

Die Größen $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ und $\mathbf{q}_{min}(l,s)$ hingegen können in expliziter Form berechnet werden, wobei gleichzeitig ein optimales Umkehrschema konstruiert werden kann.

Aufgrund der gegebenen Checkpoint Stabilität kann die Aufstellung der optimalen Umkehrschemata S so interpretiert werden, dass eine Folge von physikalischen Schritten $F_1, ..., F_l$ in zwei Unterfolgen $F_1, ..., F_{\check{l}}$ und $F_{\check{l}+1}, ..., F_l$ mittels des zweiten Checkpoints zerlegt wird. Dann müssen die Teilumkehrschemata S^1 für $F_1, ..., F_{\check{l}}$ und S^2 für $F_{\check{l}+1}, ..., F_l$ auch optimal sein. Aufgrund dieser Zusammenhänge kann daraus der nächste Satz gefolgert werden.

Satz 3.2 (Zerlegung von Umkehrschemata) Die sich aus der Checkpoint Stabilität ergebende Rekursion:

$$\mathbf{T}_{min}(l, s) \equiv \min_{1<\check{l}<l} \{\check{l} + \mathbf{T}_{min}(l - \check{l}, s - 1) + \mathbf{T}_{min}(\check{l}, s)\}, \tag{3.14}$$

impliziert

$$\mathbf{T}_{min}(l, s) = r_{bin}(s, l)l - \beta(s + 1, r_{bin}(s, l) - 1), \tag{3.15}$$

wobei $r_{bin}(s, l)$ eindeutig definiert ist durch

$$\beta(s, r_{bin}(s, l) - 1) < l \leqslant \beta(s, r_{bin}(s, l)) \tag{3.16}$$

mit $\beta(s, r(s, l)) = \frac{(s+r(s,l))!}{s!r(s,l)!}$.

Beweis:

Zu beweisen ist, dass die Ausführungskosten eines optimalen Umkehrschemas S mit der Beziehung (3.15) explizit zu berechnen sind. Dafür werden die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(l, s)$ eines optimalen Umkehrschemas durch die Häufigkeitswerte dieses Umkehrschemas dargestellt.

Um die Eigenschaften der Häufigkeitswerte des optimalen Schemas S zu ermitteln, sind zunächst die Kosten $\mathbf{T}(S)$ gemäß Gleichung (2.11) zu betrachten. Da S ein optimales Schema für gegebene l und s ist, gilt

$$\mathbf{T}_{min}(l, s) = \mathbf{T}(S) = \sum_{i=1}^{l} r_i. \tag{3.17}$$

Es muss also die Summe aller r_i, $1 \leq i \leq l$, minimiert werden. D.h, dass jeder Schritt F_i in der Folge von l Schritten bei der Abarbeitung des Schemas S so selten wie möglich ausgeführt wird. Mit anderen Worten ist S so konstruiert worden, dass für alle j, $0 \leq j \leq r_{max}(S)$, so viel Schritte wie möglich bei der Abarbeitung von S nur j mal ausgeführt werden, um den Wert von $r_{max}(S)$ zu minimieren.

Dadurch werden die Häufigkeitswerte $m_j(S)$ maximiert und die Kosten $\mathbf{T}(S)$ minimiert, bzw. es gilt $\mathbf{T}(S) = \mathbf{T}_{min}(l, s)$. Außerdem folgt daraus, dass $r_{max}(S) = r_{bin}(s, l)$ gemäß Gleichung (3.16) zu berechnen ist. Dabei gilt für l:

$$l_{max}(s, r_{bin}(s, l) - 1) < l \leq l_{max}(s, r_{bin}(s, l)). \tag{3.18}$$

Für die Häufigkeitswerte des Umkehrschemas S gilt gemäß Aufteilung (3.1) folgende Rekursion:

(3.19) $$m_j(S) = m_{j-1}(S^1) + m_j(S^2),$$

wobei $s_{max}(S^1) \leq s$ und $s_{max}(S^2) \leq s-1$ erfüllt sein muß. Da S ein optimales Schema ist, gilt für die Werte von $m_j(S)$ für $j = 0$:
(3.20)
$$\begin{array}{rll} & m_0(S^1) = 1, & s_{max}(S^1) \leq s, \\ bzw.\ falls\ s = 1: & m_j(S^2) = 1, & 0 \leq j < r_{bin}(1,l),\ s_{max}(S^2) = 1. \end{array}$$

Daraus folgt durch Induktion

(3.21) $$m_j(S) = \beta(s-1, j), \qquad 0 \leq j < r_{bin}(s,l)$$

(Beweis von (3.21) siehe [Knu98]). Außerdem erhält man, dass

(3.22) $$m_{r_{bin}(s,l)}(S) = l - \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)-1} m_j(S)$$

gilt.
Der Beweis der Gleichung (3.15) wird in zwei Schritte aufgeteilt. In dem ersten Schritt wird die Beziehung (3.15) für den Fall $l = \beta(s, r_{bin}(s,l)) = l_{max}(s, r_{bin}(s,l))$ bewiesen, und in dem zweiten für die Anzahl l von physikalischen Schritten, für die gilt: $l_{max}(s, r_{bin}(s,l)-1) < l < l_{max}(s, r_{bin}(s,l))$.
Schritt 1: $\qquad l = \beta(s, r_{bin}(s,l)) = l_{max}(s, r_{bin}(s,l))$
Für solche Werte von l gilt die Beziehung:

(3.23) $$m_{r_{bin}(s,l)}(S^2) = 1,$$

wobei $s_{max}(S^2) = 1$ ist. Daraus folgt unter Berücksichtigung der Formeln (3.20), (3.21) und dem Satz 3.1:

(3.24) $$m_j(S) = \beta(s-1, j), \qquad 0 \leq j \leq r_{bin}(s,l).$$

Außerdem erhält man, dass

(3.25) $$\sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} m_j(S) = \beta(s, r_{bin}(s,l))$$

gilt. Diese Summe entspricht der maximalen Anzahl $l_{max}(s, r_{bin}(s,l))$ von physikalischen Schritten.

Gemäß (2.12) lassen sich die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ des optimalen Schemas S als die Summe

$$\mathbf{T}_{min}(l,s) = \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} j\, m_j(S) \tag{3.26}$$

darstellen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{min}(l,s) &= \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} j m_j(S) = \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} j\beta(s-1,j) = \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} j\frac{(s+j-1)!}{j!(s-1)!} = \\
&= \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} \frac{(s+j-1)!}{(j-1)!(s-1)!} = \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} s\frac{(s+j-1)!}{(j-1)!s!} = \\
&= s\sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} \beta(s,j-1) = s\cdot 0 + s\sum_{j=1}^{r_{bin}(s,l)} \beta(s,j-1) = \\
&= s\beta(s+1,r_{bin}(s,l)-1) = s\frac{(s+r_{bin}(s,l))!}{(s+1)!(r_{bin}(s,l)-1)!} = \\
&= \frac{(s+r_{bin}(s,l))!}{s!(r_{bin}(s,l)-1)!} - \frac{(s+r_{bin}(s,l))!}{(s+1)!(r_{bin}(s,l)-1)!} = \\
&= r_{bin}(s,l)\beta(s,r_{bin}(s,l)) - \beta(s+1,r_{bin}(s,l)-1) = \\
&= r_{bin}(s,l)l - \beta(s+1,r_{bin}(s,l)-1).
\end{aligned}$$

Schritt 2: Für die Anzahl l von physikalischen Schritten gilt folgendes:

$$\beta(s,r_{bin}(s,l)-1) = l_{max}(s,r_{bin}(s,l)-1) < l < l_{max}(s,r_{bin}(s,l)) = \beta(s,r_{bin}(s,l)). \tag{3.27}$$

Für eine solche Schrittanzahl wird der höchste Häufigkeitswert $m_{r_{bin}(s,l)}(S)$ für das optimale Umkehrschema S entsprechend reduziert. Dies geschieht auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
m_{r_{bin}(s,l)}(S) &= \beta(s-1,r_{bin}(s,l)) - (l_{max}(s,r_{bin}(s,l)) - l) = \\
&= \beta(s-1,r_{bin}(s,l)) - \beta(s,r_{bin}(s,l)) + l.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Für eine Folge von $\beta(s,r_{bin}(s,l))$ physikalischen Schritten und s zur Verfügung stehenden Checkpoints gibt $\beta(s-1,r_{bin}(s,l))$ die Anzahl von $r_{bin}(s,l)$-mal ausgeführten Schritten in dem optimalen Umkehrschema S an. Dann gilt gemäß (2.12)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_{min}(s,l) &= \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} j m_j(S) = \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)-1} j m_j(S) + r_{bin}(s,l) m_{r_{bin}(s,l)}(S) = \\
&= \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)-1} j m_j(S) + r_{bin}(s,l)\beta(s-1, r_{bin}(s,l)) - \\
&- r_{bin}(s,l)(\beta(s, r_{bin}(s,l)) - l) = \\
&= s\beta(s+1, r_{bin}(s,l)-1) - r_{bin}(s,l)(\beta(s, r_{bin}(s,l)) - l) = \\
&= r_{bin}(s,l)l + s\frac{(s+r_{bin}(s,l))!}{(s+1)!(r_{bin}(s,l)-1)!} - \frac{(s+r_{bin}(s,l))!}{s!(r_{bin}(s,l)-1)!} = \\
&= r_{bin}(s,l)l + \frac{(s+r_{bin}(s,l))!}{s!(r_{bin}(s,l)-1)!}(\frac{s}{s+1} - 1) = \\
&= r_{bin}(s,l)l - \beta(s+1, r_{bin}(s,l)-1).
\end{aligned}
$$

Damit wurde die Beziehung (3.15) für eine beliebige Anzahl von physikalischen Schritten $l: \ \beta(s, r_{bin}(s,l)-1) < l \leqslant \beta(s, r_{bin}(s,l))$ bewiesen.

□

Der Verlauf der Kosten $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ als Funktion in Abhängigkeit von l ist in der Abbildung 3.3 dargestellt. Es ergibt sich eine stückweise lineare Funktion von l.

Zusätzlich zur Minimierung von $\mathbf{T}(S)$ ist die Anzahl $\mathbf{q}(S)$ von Kopieraktionen in die Checkpoints zu minimieren, worauf der Satz 3.3 Bezug nimmt.

Satz 3.3 (Minimierung der Kopieraktionen von Checkpointdaten) Die minimale Anzahl $\mathbf{q}_{min}(l,s)$ der Kopieraktionen C_k ergibt sich unter Voraussetzung von Satz 3.2 zu:

$$
\mathbf{q}_{min}(l,s) = \begin{cases} \beta(s-1, r_{bin}(s,l)-1), & falls \quad l \leq \beta(s, r_{bin}(s,l)-1) + \beta(s-1, r_{bin}(s,l)-1) \\ l - \beta(s, r_{bin}(s,l)-1), & falls \quad l \geq \beta(s, r_{bin}(s,l)-1) + \beta(s-1, r_{bin}(s,l)-1), \end{cases}
$$

wobei $r_{bin}(s,l)$ gemäß (3.16) zu bestimmen ist.

Beweis: Siehe Proposition 2 in [GW97].

Es bleibt nun zu klären, wie ein optimales Umkehrschema S für gegebene Größen l und s zu konstruieren ist, wobei zuerst die Summe von allen ausgeführten Schritten und dann die Anzahl der ausgeführten Kopieraktionen bei diesem Umkehrschema Minimalwerte $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ bzw. $\mathbf{q}_{min}(l,s)$ annehmen sollen (gemäß Satz 3.2 und Satz 3.3). Wie aus den vorherigen Ausführungen hervorgeht, ist das durch eine optimale rekursive Aufteilung mittels Checkpoints zu erreichen. Der folgende Satz gibt eine explizite Formel an, mit der die Nummer des Zwischenzustandes errechnet wird, der auszuwählen und

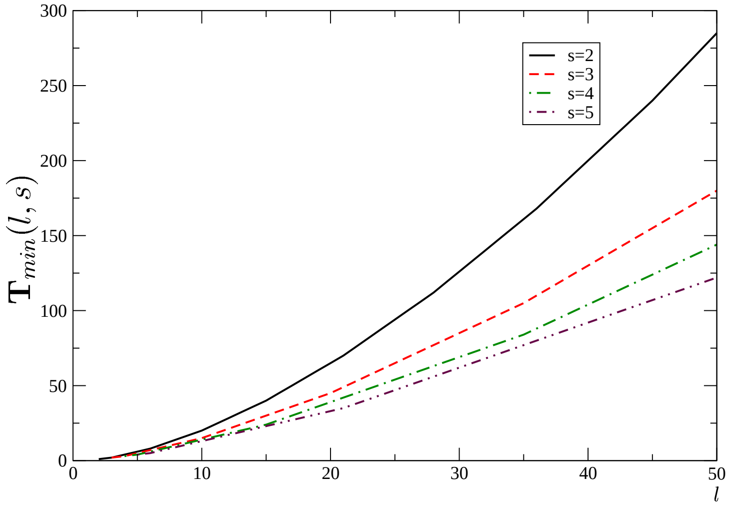

Abbildung 3.3: Kosten $\mathbf{T}_{min}(l, s)$ als Funktion von l und s

in den zweiten Checkpoint abzuspeichern ist, damit anschließend die Werte $\mathbf{T}_{min}(l, s)$ bzw. $\mathbf{q}_{min}(l, s)$ minimal werden.

Satz 3.4 (Optimales Umkehrschema) Um ein optimales Umkehrschema S für eine Folge von l physikalischen Schritten mit uniformen Kosten und s verfügbaren Checkpoints zu konstruieren, um zunächst die Größe $\mathbf{T}(S)$ und dann die Größe $\mathbf{q}(S)$ für dieses Umkehrschema zu minimieren, ist die Folge $F_1, ..., F_l$ im Zwischenzustand $\check{l}$ folgendermaßen aufzuteilen:

$$\check{l} = \begin{cases} \beta(s, r_{bin}(s,l) - 2), \ falls \ l \leq \beta(s, r_{bin}(s,l) - 1) + \beta(s-2, r_{bin}(s,l) - 1) \\ \beta(s, r_{bin}(s,l) - 1), \ falls \ l \geq \beta(s, r_{bin}(s,l)) - \beta(s-3, r_{bin}(s,l)) \\ l - \beta(s-1, r_{bin}(s,l) - 1) - \beta(s-2, r_{bin}(s,l) - 1), \ andernfalls, \end{cases}$$

wobei mit 0 der Anfangszwischenzustand und mit l der Endzwischenzustand gekennzeichnet wird. Die Größe $r_{bin}(s, l)$ ist über die Beziehung $\beta(s, r_{bin}(s, l) - 1) < l \leqslant \beta(s, r_{bin}(s, l))$ zu bestimmen.

Beweis: siehe Folgerung aus der Proposition 2 in [GW97].

Für die Umkehrschemata, die gemäß Satz 3.4 definiert worden sind, wird folgende Bezeichnung eingeführt:

> $S_{bin}(l, s)$ - ein optimales Umkehrschema für l physikalische Schritte und s verfügbare Checkpoints, wobei uniforme Schrittkosten vorausgesetzt werden.

Dabei gilt offensichtlich:

$$\mathbf{T}(S_{bin}(l,s)) = \mathbf{T}_{min}(l,s) \qquad \mathbf{q}(S_{bin}(l,s)) = \mathbf{q}_{min}(l,s) \tag{3.29}$$

Hiermit wird das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(l,s)$ in zwei Teile zerlegt: ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(\check{l},s)$ für die Folge von $(F_1,...,F_{\check{l}})$ physikalischen Schritten und ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l-\check{l},s-1)$ für die Folge von $(F_{\check{l}+1},...,F_l)$ physikalischen Schritten. Für weitere Aufteilungen der physikalischen Schritte bei denen wiederum binomiale Umkehrschemata $S_{bin}(\check{l},s)$ und $S_{bin}(l-\check{l},s-1)$ zu konstruieren sind, ist wieder der Satz 3.4 anzuwenden, wobei jetzt jedoch mit l die Schrittanzahl einer entsprechenden Teilfolge gekennzeichnet wird. Wenn alle Checkpoints belegt sind bzw. die Anzahl von gespeicherten Zwischenzuständen der Ausgangszahl der verfügbaren Checkpoints entspricht, werden die Aktionen A und U (gemäß Def. 2.2) solange nacheinander ausgeführt, bis sich die Länge der Folge der physikalischen Schritte zu der Nummer des Zwischenzustandes, der als letzter in einen Checkpoint gespeichert wurde, oder zu 0 reduziert hat. Das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(10,3)$ ist beispielhaft in der Abb. 2.2 dargestellt.

Die in diesem Kapitel beschriebende Problematik, und zwar die Bestimmung eines binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l,s)$, ist in dem Programm REVOLVE in der Computersprache C++ implementiert worden. Eine detaillierte Beschreibung ist in [Wal99] und in [GW97] enthalten. Alle binomialen Umkehrschemata für entsprechende Evolutionen, die in dieser Arbeit als Beispiele oder für Untersuchungen herangezogen werden, sind mit REVOLVE berechnet worden. Dazu sind im Rahmen dieser Arbeit entsprechende Modifikationen an dem Programmsystem REVOLVE vorgenommen bzw. neue Routinen implementiert worden.

Im Kapitel 5 wird auf eine weitere Problematik eingegangen, wobei Umkehrschemata für eine Folge von physikalischen Schritten mit uniformen Kosten untersucht werden, bei denen allerdings die Anzahl der physikalischen Schritte zunächst unbekannt ist. Des weiteren sind entsprechende Überlegungen anzustellen, welche Auswirkung es hat, wenn von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten ausgegangen wird. In dem Kapitel 3.3.2 soll dazu ein Überblick gegeben werden.

3.3.2 Optimale Umkehrschemata bei nicht uniformen Schrittkosten

F sei eine Evolution, die sich in l physikalische Schritte F_i, $1 \leq i \leq l$, aufteilen lässt. Die Kosten für die Ausführung von jedem Schritt F_i werden als t_i bezeichnet, wobei jedoch davon ausgegangen wird, dass unterschiedlich

hohe Kosten vorliegen. Gesucht wird ein optimales Umkehrschema für eine solche Folge von physikalischen Schritten.
Zunächst wird beispielhaft gezeigt, dass ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$, das ein optimales Schema für eine Folge von l physikalischen Schritten mit uniformen Kosten darstellt, nicht notwendigerweise ein optimales Umkehrschema für nicht uniforme Schrittkosten ist. Das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(8, 3)$, das in der Abb. 3.5 dargestellt ist, wurde für die Umkehrung einer Folge von 8 physikalischen Schritten angewendet, wobei die Schritte F_i, $1 \leq i \leq 8$, nicht uniforme Kosten aufweisen. Die entsprechende Verteilung ist in der Abb. 3.4 dargestellt.

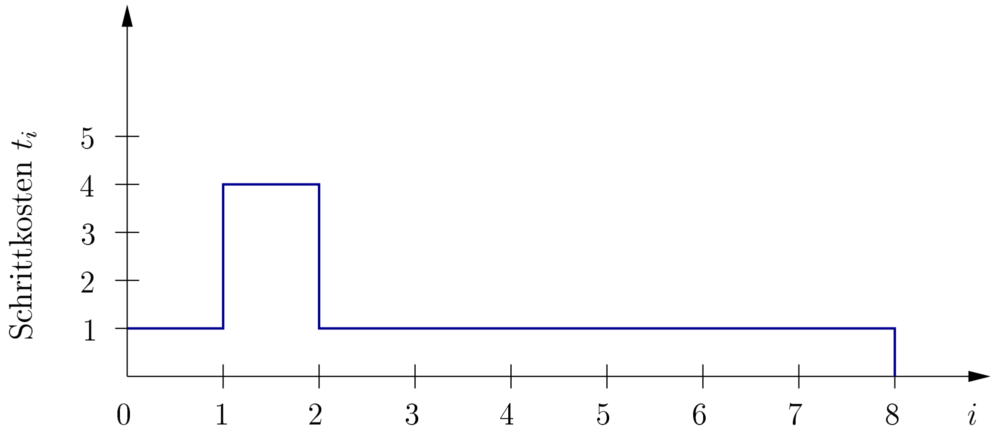

Abbildung 3.4: Schrittkosten $\mathbf{t_l}$

Aus der Abbildungen 3.4 und 3.5 ist deutlich zu erkennen, dass das Umkehrschema $S_{bin}(8, 3)$ nicht günstig für die Umkehrung dieser Schrittfolge bei der gegebenen Verteilung ist. Der erste Checkpoint wird vor dem teuersten Schritt gesetzt und der zweite Checkpoint entsprechend drei Schritte weiter. Dadurch wird bei der Umkehrung der Schrittfolge $F_1, ..., F_8$ der Schritt F_2 zweimal ausgeführt, obwohl er der teuerste Schritt in der ganzen Folge ist. Dabei betragen die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(8, 3)) = 17$. Das Umkehrschema $S_{bin}(8, 3)$ kann verbessert bzw. optimiert werden, und dadurch lässt sich die zweimalige Ausführung des teuersten Schrittes F_2 vermeiden. Deswegen ist es notwendig, ein anderes Verfahren aufzustellen.
Das Problem lässt sich mit Hilfe der dynamischen Programmierung lösen. Dabei betragen die Rechenkosten für die Suche nach einem optimalen Umkehrschema $O(sl^3)$ (siehe [Wal99]). Mit s wird dabei wiederum die Anzahl von verfügbaren Checkpoints und mit l die Anzahl von physikalischen Schritten bezeichnet. Um ein optimales Umkehrschema bei gegebenen Werten l und

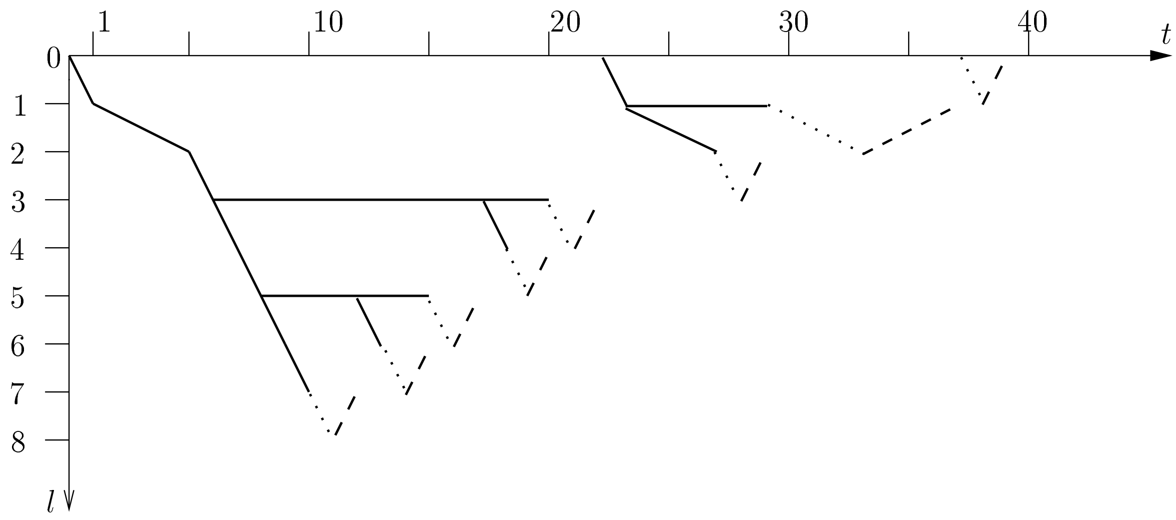

Abbildung 3.5: Umkehrschema $S_{bin}(8, 3)$

s zu finden, werden die Größen $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S)$ über alle Umkehrschemata S mit $l \leq l_{max}(S)$ und $s_{max}(S) \leq s$ gemäß (3.12) minimiert.
Für die Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ gilt in gleicher Weise wie für den Fall mit uniformen Kosten gemäß Kapitel 3.3.1 die Aufteilungsformel:

$$(3.30) \qquad \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) = \min_{1 \leq \tilde{l} < l} \left\{ \sum_{j=1}^{\tilde{l}} t_j + \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{l}}+\mathbf{1},\mathbf{l}}, s-1) + \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_{\mathbf{1},\tilde{\mathbf{l}}}, s) \right\},$$

wobei $\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{l}}+\mathbf{1},\mathbf{l}} = \langle t_{\tilde{l}+1}, ..., t_l \rangle$ und $\mathbf{t}_{\mathbf{1},\tilde{\mathbf{l}}} = \langle t_1, ..., t_{\tilde{l}} \rangle$ sind. Weiterhin wird die folgende Bezeichnung eingeführt:

> $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ - ein optimales Umkehrschema für l physikalische Schritte und s verfügbare Checkpoints, wobei nicht uniforme Schrittkosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_l \rangle$ zu berücksichtigen sind.

Dabei gilt offensichtlich folgendes:

$$(3.31) \qquad \mathbf{T}(S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)) = \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s).$$

Durch die Ausnutzung einer gewissen Monotonieeigenschaft (siehe [Knu98]) lässt sich der Kostenaufwand für die Suche nach einem optimalen Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ zu $O(sl^2)$ reduzieren. Für eine detaillierte Herleitung und Beweisführung soll an dieser Stelle auf [Wal99] (s. 48-56) verwiesen werden. Auf die Problematik der Kostenminimierung im Zusammenhang mit derartigen Folgen wird in den folgenden Kapiteln näher eingegangen.

Für das oben angeführte Beispiel mit 8 physikalischen Schritten, deren Verteilung $\mathbf{t_l}$ in der Abb. 3.4 dargestellt ist, wurde mittels des in [Wal99] beschriebenen Verfahrens ein optimales Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l}, 3)$ aufgestellt. Dieses Schema ist in der Abb 3.6 dargestellt. Dabei beträgt $\mathbf{T}(S_{opt}(\mathbf{t_l}, 3)) = \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, 3) = 14$ für die oben angegebene Verteilung $\mathbf{t_l}$.

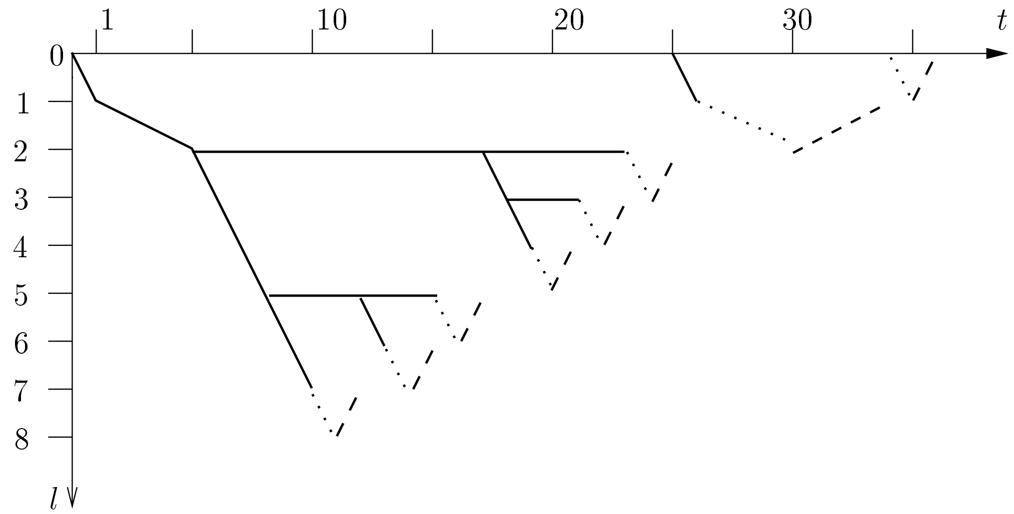

Abbildung 3.6: Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l}, 3)$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Folgen mit nicht uniforme Schrittkosten betrachtet, wenn nicht ausdrücklich auf uniforme Schrittkosten hingewiesen wird.

3.4 Häufigkeitswertabschätzung

In diesem Kapitel wird für die Häufigkeitswerte $m_j(S)$, $0 \leq j \leq r_{max}(S)$, eines beliebigen Umkehrschemas S eine obere Grenze bestimmt.

Zunächst werden beispielhaft die Häufigkeitswerte zweier Umkehrschemata verglichen. Dabei werden in Abb. 3.7 und 3.8 ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(10, 3)$ und ein Schema S dargestellt, wobei $l_{max}(S) = 10$ und $s_{max}(S) = 3$ sind. Das Aufstellungsprinzip des Schemas S wird später im Kapitel 4 beschrieben. Dabei handelt es sich um ein kostengünstig aufgestelltes Umkehrschema für eine Schrittfolge mit nicht uniformen Kosten. Das Schema

S wurde unter Berücksichtigung der GAUSSschen Verteilung der Schrittkosten aufgestellt.

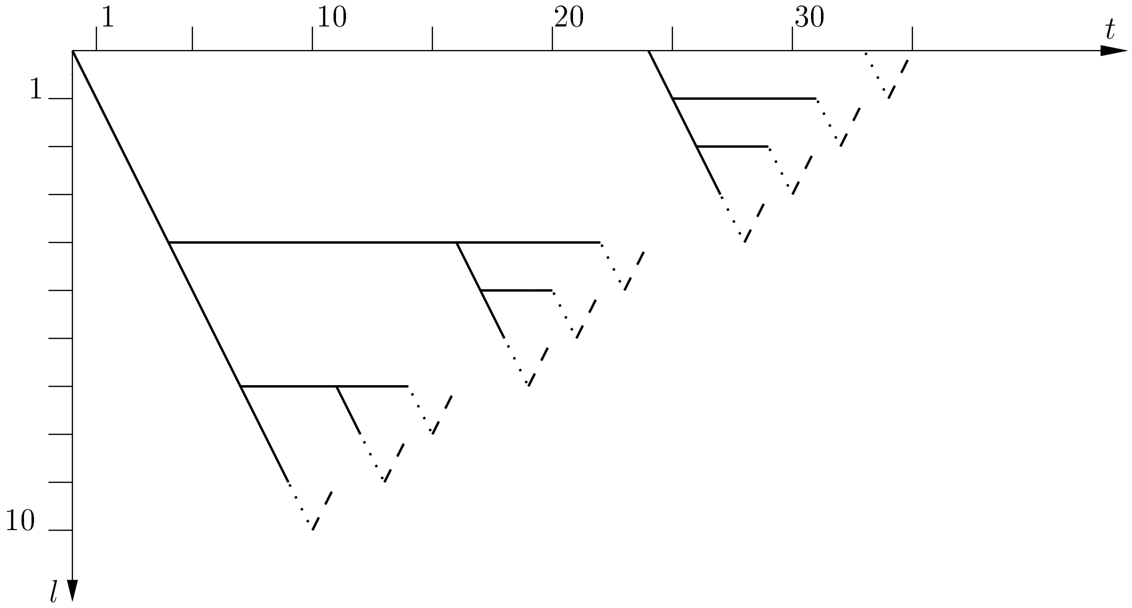

Abbildung 3.7: Das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(10, 3)$

Der Vergleich zwischen den Häufigkeitsprofilen dieser beiden Umkehrschemata $S_{bin}(10, 3)$ und S ist in der folgenden Abbildung 3.9 dargestellt. Dabei enthalten $\mathbf{r}(S_{bin}(10, 3))$, $\mathbf{m}(S_{bin}(10, 3))$, $\mathbf{r}(S)$ und $\mathbf{m}(S)$ folgende Werte:

(3.32) $$\mathbf{r}(S_{bin}(10, 3)) = \langle 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{m}(S_{bin}(10, 3)) = \langle 1, 3, 6 \rangle,$$

(3.33) $$\mathbf{r}(S) = \langle 3, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0 \rangle, \qquad \mathbf{m}(S) = \langle 1, 3, 4, 2 \rangle.$$

Die maximale Wiederholungszahl $r_{max}(S_{bin}(10, 3))$ des binomialen Schemas $S_{bin}(10, 3)$ ist gemäß Ungleichung (3.16) zu berechnen. Dabei gilt

(3.34) $$r_{max}(S_{bin}(10, 3)) = r_{bin}(3, 10) = 2.$$

Die maximale Wiederholungszahl $r_{max}(S)$ des Schemas S beträgt 3.

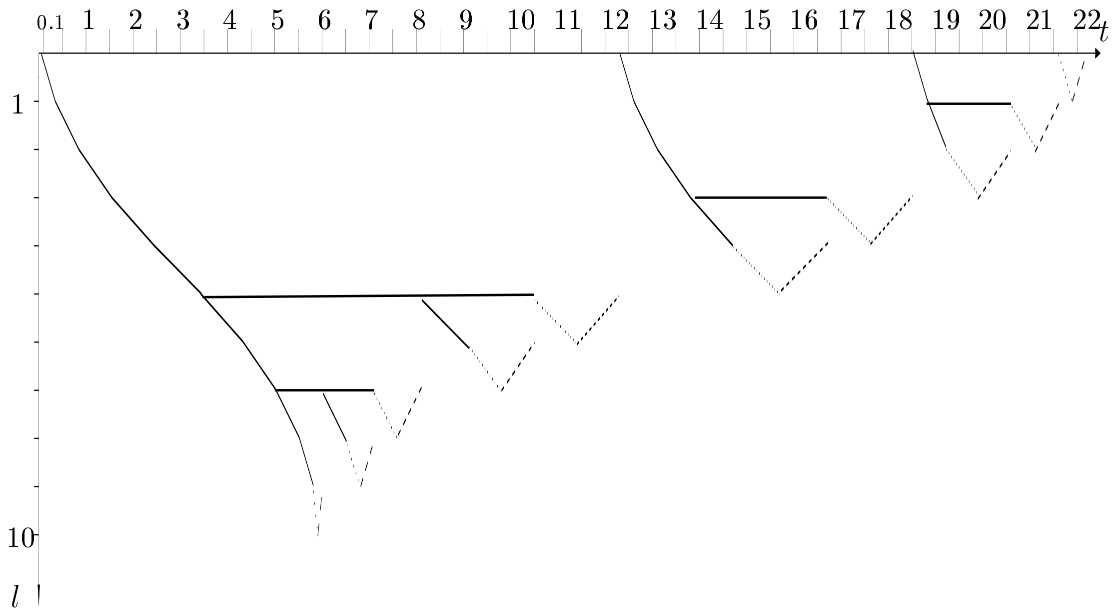

Abbildung 3.8: Das Umkehrschema S

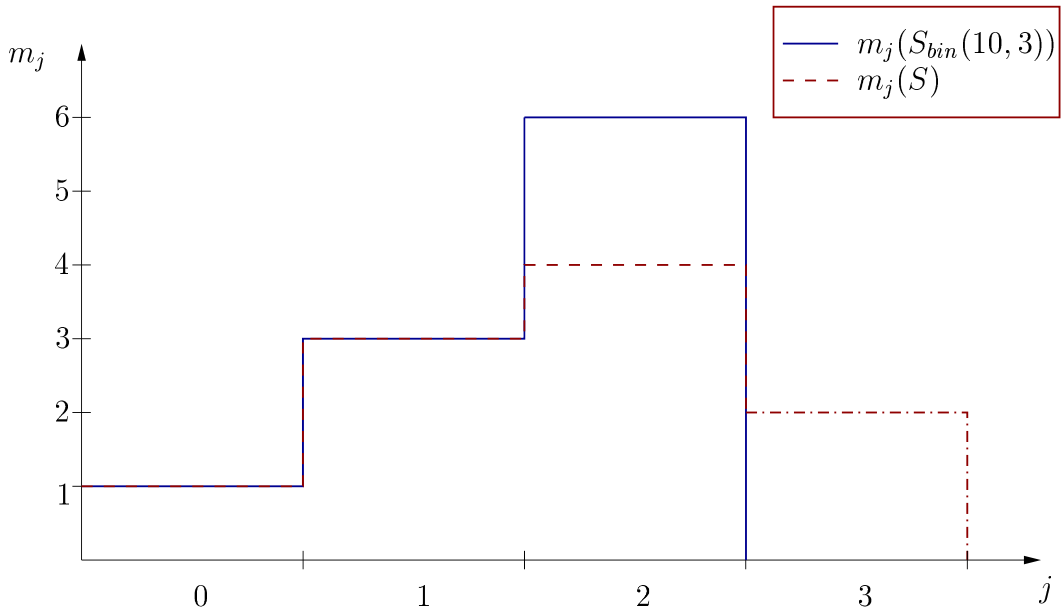

Abbildung 3.9: Häufigkeitsprofile $\mathbf{m}(S_{bin}(10,3))$ und $\mathbf{m}(S)$

Die zwei Häufigkeitsprofile $\mathbf{m}(S_{bin}(10,3))$ und $\mathbf{m}(S)$ unterscheiden sich in den letzten zwei Werten. Dabei ist zu erkennen, dass gilt:

$$m_j(S) \leq m_j(S_{bin}(10,3)), \qquad 0 \leq j < r_{bin}(3,10). \tag{3.35}$$

Dieses Ergebnis ergibt sich deshalb, weil es sich bei dem Schema S um ein beliebiges Umkehrschema handelt, wobei das erste Umkehrschema $S_{bin}(10,3)$ ein binomiales Schema darstellt. Das ist damit zu erklären, dass ein binomiales Umkehrschema so konstruiert ist, dass alle physikalischen Schritte so selten wie möglich bei der Abarbeitung dieses Umkehrschemas ausgeführt werden. Dadurch werden $m_j(S_{bin}(l,s))$ maximiert und die Kosten $\mathbf{T}(S_{bin}(l,s))$ minimiert. Der folgende Satz wird diese Behauptung verallgemeinern und bestätigen.

Satz 3.5 (Abschätzung der Häufigkeitswerte) Jedes Umkehrschema S mit $l_{max}(S) \geq l$ und $s_{max}(S) \leq s$ erfüllt

$$m_j(S) \leq \beta(s-1,j) \equiv \binom{s-1+j}{s-1}, \qquad 0 \leq j < r_{bin}(s,l), \tag{3.36}$$

wobei $r_{bin}(s,l)$ über die Beziehung $\beta(s, r_{bin}(s,l)-1) < l \leqslant \beta(s, r_{bin}(s,l))$ zu bestimmen ist. Diese obere Schranke wird bei dem binomialen Umkehrschema $S_{bin}(l,s)$ erreicht.

Beweis: Die zweite Aussage, dass $m_j(S_{bin}(l,s)) \equiv m_j(l,s) = \beta(s-1,j)$ für $0 \leq j < r_{bin}(s,l)$ gilt, wurde im Satz 3.2 bewiesen. Demzufolge ist die Ungleichung (3.36) mit der Ungleichung

$$m_j(S) \leq m_j(l,s), \qquad 0 \leq j < r_{bin}(s,l), \tag{3.37}$$

äquivalent, die im folgenden bewiesen wird. Der Beweis des Satzes wird mittels Doppelinduktion über j und s durchgeführt.

Induktionsanfang : $j = 0$

Es ist offensichtlich, dass bei jedem Umkehrschema bei beliebiger Anzahl der verfügbaren Checkpoints höchstens ein Schritt überhaupt nicht ausgeführt werden kann, und zwar der letzte, der l-te Schritt in einer Folge von l physikalischen Schritten. Damit gilt folgendes:

$$m_0(S) \leq 1, \qquad m_0(l,s) = 1, \qquad \Rightarrow \qquad m_0(S) \leq m_0(l,s) \tag{3.38}$$

Demzufolge gilt die Behauptung des Satzes für $j = 0$ und beliebiges s.

Induktionsanfang : $s = 1$

Es ist offensichtlich, dass bei jedem Umkehrschema S mit einem einzigen verfügbaren Checkpoint höchstens ein Schritt j mal ausgeführt werden kann, wobei $j \geq 0$ ist. Damit gilt folgendes:

$$m_j(S) \leq 1,\ m_j(l,1) = 1,\ \Rightarrow\ m_j(S) \leq m_j(l,1),\ 0 \leq j < r_{bin}(s,l), \tag{3.39}$$

wobei $s_{max}(S) = 1$ ist. Demzufolge gilt die Behauptung des Satzes für j, $0 \leq j < r_{bin}(s,l)$, und $s = 1$.
Induktionsannahme:

$$m_j(S) \leq m_j(l,s),\ 0 \leq j < r_{bin}(s,l) - 1,\ s_{max}(S) \leq s, \tag{3.40}$$

und

$$m_j(S) \leq m_j(l,c),\ 0 \leq j < r_{bin}(s,l),\ s_{max}(S) \leq c,\ c < s, \tag{3.41}$$

Induktionsschritt: $j \ \rightarrow \ (j+1), \qquad c \ \rightarrow \ (c+1)$
Gemäß den Beziehungen (3.1) und (3.6) lässt sich der Häufigkeitswert $m_{j+1}(S)$ als folgende Summe darstellen:

$$m_{j+1}(S) = m_j(S^1) + m_{j+1}(S^2),\ 0 \leq j < r_{bin}(s,l) - 1, \tag{3.42}$$

wobei
$s_{max}(S) \leq c+1 \leq s, \quad l_{max}(S) = l,$
$s_{max}(S^1) \leq c+1 \leq s, \quad l_{max}(S^1) = \check{l},$
$s_{max}(S^2) \leq c < s, \quad l_{max}(S^2) = l - \check{l}$
sind. Gemäß Induktionsannahme (3.40) gilt

$$m_j(S^1) \leq m_j(\check{l}, c+1), \qquad 0 \leq j < r_{bin}(s,l) - 1 \tag{3.43}$$

und gemäß Induktionsannahme (3.41) gilt

$$m_{j+1}(S^2) \leq m_{j+1}(l - \check{l}, c), \qquad 0 \leq j+1 < r_{bin}(s,l). \tag{3.44}$$

Somit erhält man

$$m_{j+1}(S) \leq m_j(\check{l}, c+1) + m_{j+1}(l - \check{l}, c) = m_{j+1}(l, c+1). \tag{3.45}$$

Damit wurde die Behauptung des Satzes für $0 \leq j+1 < r_{bin}(s,l)$ und $c+1 \leq s$ bewiesen.

□

Für $j > r_{bin}(s,l)$, wobei $r_{bin}(s,l) = r_{max}(S_{bin}(l,s))$ ist (Berechnung gemäß (3.16)), gilt folgendes:

$$m_j(S) \geq 0, \qquad m_j(l,s) = 0, \qquad j > r_{bin}(s,l), \tag{3.46}$$

wobei S ein beliebiges Umkehrschema mit $l_{max}(S) \geq l$ und $s_{max}(S) \leq s$ ist. Des weiteren ist zu klären, welche Beziehung zwischen den Häufigkeitswerten $m_j(l,s)$ und $m_j(S)$ der Umkehrschemata $S_{bin}(l,s)$ bzw. S besteht, wenn $j =$

$r_{bin}(s,l)$ ist. Die Ungleichung (3.37) gilt bei dieser Bedingung im allgemeinen nicht.
Die folgende Abbildung 3.10 zeigt ein Beispiel für 100 physikalische Schritte. Die durchgezogene Linie entspricht hier den Häufigkeitswerten für das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(100,3)$ und die punktierte Linie den Häufigkeitswerten eines kostengünstig aufgestellten Umkehrschemas S. Das Umkehrschema S ist mit dem im nächsten Kapitel 4 beschriebenen Verfahren berechnet worden. Dabei nehmen die Schrittkosten t_i, $1 \leq i \leq 100$, zufällig gewählte Werte an, und $s_{max}(S) = 3$ ist.

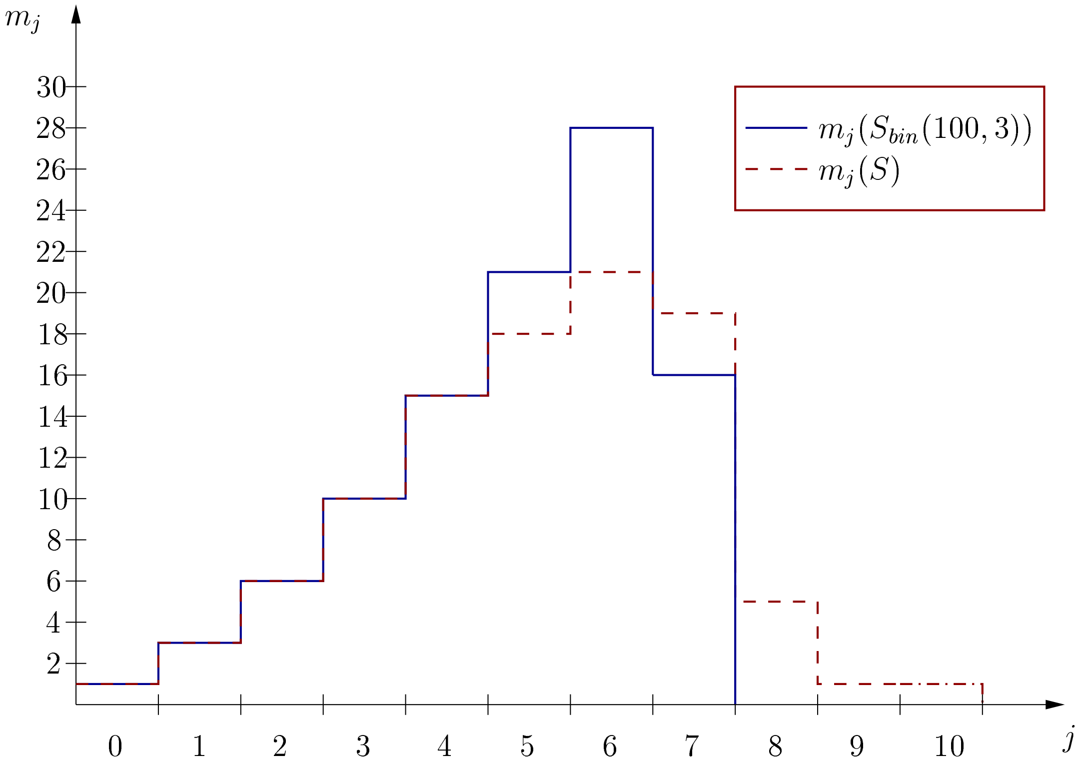

Abbildung 3.10: Häufigkeitsprofile $\mathbf{m}(S_{bin}(100,3))$ und $\mathbf{m}(S)$

Für die 100 physikalischen Schritte nimmt $r_{bin}(3,100)$ den Wert 7 an. Aus der Abbildung geht hervor, dass:

$$19 \;=\; m_7(S) \;>\; m_7(100,3) \;=\; 16.$$

Da $l = 100$ zwischen $l_{max}(3,6) = 84$ und $l_{max}(3,7) = 120$ liegt, gilt für den Häufigkeitswert $m_7(100,3)$ des binomialen Umkehrschemas:

$$m_7(100,3) \;=\; l - l_{max}(3,6) \;=\; 100 - 84 = 16$$

und

$$m_7(l_{max}(3,7),3) - m_7(100,3) \;=\; l_{max}(3,7) - l \;=\; 120 - 100 = 20.$$

Da der Ausdruck $\beta(s-1,j)$ unabhängig von l berechnet wird, gibt $\beta(s-1,j)$ die maximale Anzahl der j mal ausgeführten Schritte bei allen Umkehrschemata an, für die die Checkpoint Stabilität gilt. Dieser Wert wird vom binomialen Umkehrschema $S_{bin}(l_{max}(s,j),s)$ erreicht (Beweis ähnlich wie (3.21)). Daraus folgt für das Beispiel in der Abb. 3.10, dass

$$m_7(S) \;\leq\; \beta(2,7) = m_7(100,3) + l_{max}(3,7) - 100$$

gilt.
Aufgrunddessen ist folgende Abschätzung von $m_{r_{bin}(s,l)}(S)$ möglich.
Gilt für l die Bedingung:

$$\beta(s, r_{bin}(s,l){-}1) = l_{max}(s, r_{bin}(s,l){-}1) < l < l_{max}(s, r_{bin}(s,l)) = \beta(s, r_{bin}(s,l)),$$

dann ergibt sich folgende Ungleichung:

$$(3.47)\quad m_{r_{bin}(s,l)}(S) \leq m_{r_{bin}(s,l)}(l,s){+}l_{max}(s, r_{bin}(s,l)){-}l = \beta(s{-}1, r_{bin}(s,l)),$$

Gilt für l die Bedingung:

$$l = l_{max}(s, r_{bin}(s,l)) = \beta(s, r_{bin}(s,l)),$$

dann ergibt sich folgende Ungleichung:

$$(3.48)\qquad m_{r_{bin}(s,l)}(S) \leq m_{r_{bin}(s,l)}(l,s) = \beta(s-1, r_{bin}(s,l)).$$

wobei $m_{r_{bin}(s,l)}(S)$ den Häufigkeitswert für ein beliebiges Umkehrschema S und $m_{r_{bin}(s,l)}(l,s)$ den Häufigkeitswert für das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(l,s)$ bezeichnet. Dabei gilt, dass für $l = l_{max}(s, r_{bin}(s,l)) = \beta(s, r_{bin}(s,l))$ die obere Schranke $\beta(s-1, r_{bin}(s,l))$ von Häufigkeitswerten $m_{r_{bin}(s,l)}(l,s)$ des binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l,s)$ angenommen wird. Mit anderen Worten, für solche l gilt die Behauptung des Satzes 3.5 für $0 \leq j \leq r_{bin}(s,l)$.

3.5 Die Aufstellung von Kostenschranken

Es sei eine Folge von physikalischen Schritten F_i, $1 \leq i \leq l$, die Ausführungskosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_l \rangle$ und die Anzahl s von verfügbaren Checkpoints gegeben. Ein optimales Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ für diese Folge kann mit dem

im Kapitel 3.3.2 beschriebenen Verfahren berechnet werden. Da der Kostenaufwand für die Suche nach einem optimalen Umkehrschema im Vergleich mit dem Kostenaufwand zur Aufstellung der Kostenschranken hoch ist, ist es vorteilhaft, wenn bereits vor der Ausführung des jeweiligen Verfahrens zur Aufstellung des optimalen Umkehrschemas bekannt ist, in welchen Grenzen die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ des gesuchten Umkehrschemas liegen.
Mit Hilfe der Häufigkeitswerte lassen sich untere und obere Schranken für die Ausführungskosten eines heuristisch erzeugten optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ aufzustellen. Weiterhin werden folgende Bezeichnungen für diese Schranken der Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ für $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ eingeführt:

$$O(\mathbf{t_l}, s) \equiv \text{obere Schranke der Ausführungskosten } \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$$

$$U(\mathbf{t_l}, s) \equiv \text{untere Schranke der Ausführungskosten } \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$$

Dabei gilt:

$$U(\mathbf{t_l}, s) \leq \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) \leq O(\mathbf{t_l}, s) \tag{3.49}$$

Außerdem gilt gemäß (3.4):

$$U(\mathbf{t_l}, s) \leq \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) \leq \mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S), \tag{3.50}$$

wobei S ein beliebiges Umkehrschema mit $l \leq l_{max}(S)$ und $s_{max}(S) \leq s$ ist. Mit anderen Worten stellt $U(\mathbf{t_l}, s)$ eine untere Schranke für die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S)$ eines beliebigen Umkehrschemas mit entsprechenden Eigenschaften dar.
Zur Aufstellung der unteren und oberen Schranke werden zunächst die Schrittkosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_l \rangle$ geordnet, wobei mit dem größten Wert begonnen wird. Dadurch entsteht für die physikalischen Schritte F_i, $1 \leq i \leq l$, eine neue Schrittkostenverteilung:

$$\langle t_1, ..., t_l \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle t_{\pi(1)}, ..., t_{\pi(l)} \rangle \tag{3.51}$$

Für die Kosten $t_{\pi(i)}$, $1 \leq i \leq l$, gilt damit folgendes:

$$t_{\pi(i)} \geq t_{\pi(i+1)}, \qquad 1 \leq i \leq l-1 \tag{3.52}$$

Die untere Schranke $U(\mathbf{t_l}, s)$ für die Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ wird folgendermaßen berechnet:

$$U(\mathbf{t_l}, s) \equiv \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} \sum_{i=1}^{m_j(l,s)} j \cdot t_{\pi(u_i)}, \tag{3.53}$$

wobei $\pi(u_i) = i + \sum_{u=0}^{j-1} m_u(l,s) = i + \sum_{u=0}^{j-1} \beta(s-1,u) = i + \beta(s,j-1)$ und $m_j(l,s)$, $0 \le j \le r_{bin}(s,l)$, die Häufigkeitswerte eines binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l,s)$ sind. Um den Wert von $U(\mathbf{t_l},s)$ zu berechnen, werden die $m_0(l,s)$ aufwendigsten Schritte mit den höchsten Kosten aus der Folge F_i, $1 \le i \le l$, ausgewählt, und ihre Kosten t_i werden mit Null multipliziert. In diesem Fall wird $m_0(l,s) = 1$ gesetzt, damit kann der aufwendigste Schritt mit den Kosten $t_{\pi(u_1)}$, $\pi(u_1) = 1$, bei der Aufstellung der unteren Schranke ignoriert werden. Anschließend werden die nächstaufwendigen $m_1(l,s)$ Schritte ausgewählt, die der Anzahl der Checkpoints entsprechen. Ihre Kosten werden mit 1 multipliziert und jeweils zu dem bisherigen Wert $U(\mathbf{t_l},s)$ aufaddiert. Zuletzt werden die $m_{r_{bin}(s,l)}(l,s)$ Schritte mit den geringsten Kosten ausgewählt, mit $r_{bin}(s,l)$ multipliziert und anschließend zur Gesamtsumme $U(\mathbf{t_l},s)$ aufaddiert. Die daraus resultierende Summe der Kosten $U(\mathbf{t_l},s)$ entspricht einer unteren Schranke der Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l},s)$.

Dass $U(\mathbf{t_l},s)$ tatsächlich eine untere Schranke für die Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l},s)$ darstellt, kann damit erklärt werden, dass sowohl für ein optimales Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l},s)$ als auch für ein beliebiges Schema S der Satz 3.5 bzw. die Beziehung (3.37) gelten. Damit wird die Anzahl von j mal ausgeführten Schritten $(0 \le j < r_{bin}(s,l))$ bei einem beliebigen Schema S mindestens so groß sein, wie bei $S_{bin}(l,s)$. Außerdem werden bei der Berechnung von $U(\mathbf{t_l},s)$ die teuersten Schritte zuerst berücksichtigt, was dem entspricht, dass sie so wenig wie möglich ausgeführt wurden.

Aufgrunddessen gilt für ein beliebiges Umkehrschema S mit $l \le l_{max}(S)$ und $s_{max}(S) \le s$ die folgende Ungleichung:

$$U(\mathbf{t_l},s) \le \mathbf{T}(\mathbf{t_l},S). \tag{3.54}$$

Die Ungleichung (3.54) gilt auch für den Fall, wenn $m_{r_{bin}(s,l)}(S) > m_{r_{bin}(s,l)}(l,s)$ ist, weil $m_j(l,s) = 0$ für $j > r_{bin}(s,l)$ gilt und die $\big(m_{r_{bin}(s,l)}(S) - m_{r_{bin}(s,l)}(l,s)\big)$ Schritte bei der Berechnung von $U(\mathbf{t_l},s)$ nur mit einer geringeren Wiederholungszahl als $r_{bin}(s,l)$ zu berücksichtigen sind.

Die Aufstellung einer oberen Schranke $O(\mathbf{t_l},s)$ für die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l},s)$ vom Schema $S_{opt}(\mathbf{t_l},s)$ erfolgt in zwei Schritten. Zunächst soll angenommen werden, dass ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l,s)$ auf die Umkehrung einer Schrittfolge mit nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ übertragen wird. Die dadurch entstehenden Kosten werden mit $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l},s)$ bezeichnet. Für diese Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l},s)$ gilt folgende Ungleichung:

$$\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l},s) \ge \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l},s) \tag{3.55}$$

Demzufolge kann $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l},s)$ als eine obere Schranke für die Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l},s)$

betrachtet werden. Als Nachteil ist dabei anzuführen, dass die Berechnung von $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ folgendermaßen erfolgt:

$$\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s) = \sum_{i=1}^{l} t_i r_i \tag{3.56}$$

Dabei ist für jeden physikalischen Schritt F_i, $1 \leq i \leq l$, die entsprechende Wiederholungszahl r_i zu berechnen. Der Kostenaufwand dafür soll hier als unakzeptabel teuer betrachtet werden.

Im Gegensatz dazu ist im Hinblick auf den Kostenaufwand die Berechnung von Häufigkeitswerten $m_j(l, s)$ wesentlich günstiger. Deshalb wird die Berechnung der oberen Schranke $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ in ähnliche Art und Weise wie bei der Bestimmung einer unteren Schranke mit Hilfe der Häufigkeitswerte $m_j(l, s)$ ausgeführt. Im Unterschied dazu wird die Summation hier erst über die geringsten und zuletzt über die höchsten Schrittkosten durchgeführt. Die folgende Beziehung verdeutlicht die Berechnung einer oberen Schranke $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ für die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ von dem optimalen Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$:

$$O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s) \equiv \sum_{j=0}^{r_{bin}(s,l)} \sum_{i=1}^{m_j(l,s)} j \cdot t_{\pi(o_i)}, \tag{3.57}$$

wobei $\pi(o_i) = l - i - \sum_{o=0}^{j-1} m_o(l, s) = l - i - \beta(s, j-1)$ gilt. Die obere Schranke ist damit so zu interpretieren, dass das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ für die Umkehrung der Folge von l Schritten mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t}_\mathbf{l}$ angewendet wird, wobei die Kostenverteilung für dieses Umkehrschema am ungünstigsten ist, d.h. die Schritte mit den geringsten Ausführungskosten werden am seltensten und die teuersten Schritte am häufigsten ausgeführt.

Des weiteren gilt folgende Ungleichung:

$$\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s) \leq O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s), \tag{3.58}$$

wobei $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ nach oben beschriebenem Prinzip aufgestellt wird.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass im Gegensatz zur unteren Schranke $U(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ die Beziehung (3.58) nur für die Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ gelten muss. Die folgende Abbildung 3.11 zeigt ein Beispiel für den Fall, bei dem der Wert von $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ kleiner als die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, S)$ eines Umkehrschemas S für eine Folge von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten ist.

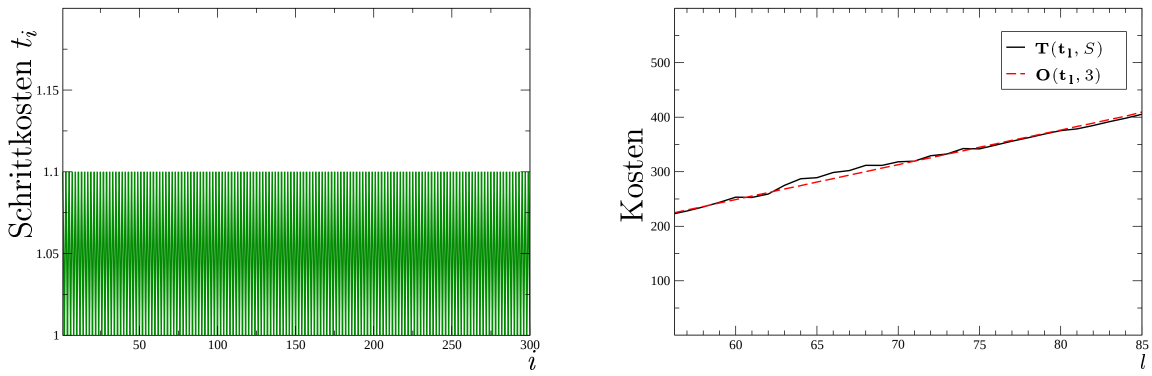

Abbildung 3.11: Beispiel für die obere Schranke $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, 3)$

Das linke Bild im Abb. 3.11 zeigt die Kostenverteilung für die Schrittfolge in dem angeführten Beispiel. In dem rechten Bild sind mit der punktierten Linie die obere Schranke $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, 3)$ und mit der durchgezogenen Linie die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, S)$ von dem kostengünstig aufgestellten Umkehrschema S dargestellt, wobei S gemäß dem im Kapitel 4 beschriebenen Verfahren aufgestellt wurde. Alle Berechnungen wurden mit 3 verfügbaren Checkpoints durchgeführt. Damit gilt für eine bestimmte Anzahl von physikalischen Schritten, wie z.B. für $l = 65, 66$, die folgende Ungleichung:

$$O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, 3) < \mathbf{T}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, S). \tag{3.59}$$

Es ist so zu erklären, dass für diese Anzahl von physikalischen Schritten die Häufigkeitswerte der Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$ und S für $j = r_{bin}(3, l)$ in folgender Beziehung zueinander stehen:

$$m_{r_{bin}(3,l)}(S) > m_{r_{bin}(3,l)}(l, 3), \qquad l = 65, 66, ...70, \tag{3.60}$$

wie das in der nächsten Abbildung 3.12 noch einmal verdeutlicht wird.
Mit der punktierten Linie werden die Häufigkeitswerte für S und mit der durchgezogenen Linie die Häufigkeitswerte für $S_{bin}(68, 3)$ erfasst, wobei 68 physikalische Schritte berücksichtigt werden. In diesem Fall beträgt die maximale Wiederholungszahl $r_{bin}(3, 68) = 6$, so dass auch die Ungleichung (3.60) gilt. Das hat zur Folge, dass die Beziehung (3.59) gilt. In diesem Fall ist der letzte Summand $\displaystyle\sum_{i=1}^{m_6(68,3)} 6 \cdot t_{\pi(o_i)}$, der in die Summe $O(\mathbf{t}_\mathbf{l}, 3)$ eingeht, nicht ausreichend groß genug, um mit dieser Summe eine obere Schranke für die

Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S)$ angeben zu können, wobei $\pi(o_i) = 68 - i - \beta(3,5),\ 1 \leq i \leq m_6(68,3)$, gilt.

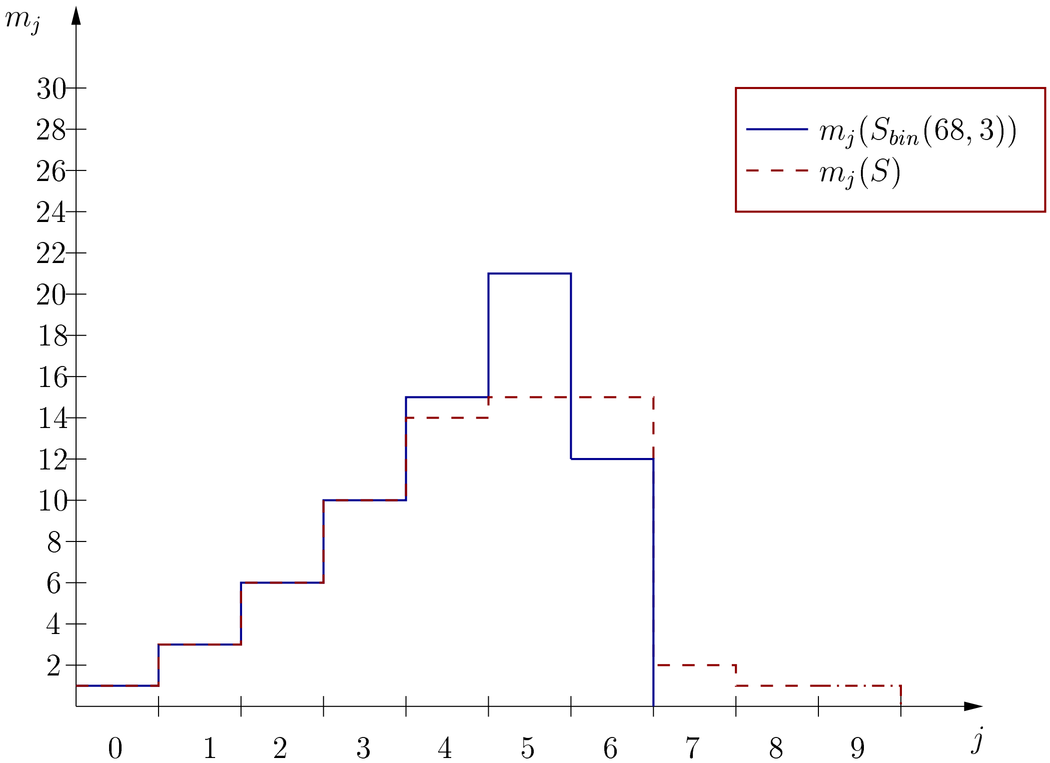

Abbildung 3.12: Beispiel für die Häufigkeitswerte

3.6 Beispiele für obere und untere Schranken

An dieser Stelle sollen einige Beispiele von oberen und unteren Schranken angegeben werden. Diese Beispielrechnungen sind für verschiedene Kostenverteilungen durchgeführt worden. Für jedes Beispiel wird die entsprechende Kostenverteilung $\mathbf{t_l}$ in der linken Abbildung dargestellt. Die unteren und oberen Schranken, die jeweils in den rechten Abbildungen enthalten sind, sind mit den Formeln (3.53) bzw. (3.57) berechnet worden. Die Ausführungskosten des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ für die angegebenen Folgen von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_l}$ wurden jeweils mit dem Verfahren, das im Kapitel 3.3.2 beschrieben ist, bestimmt. Dabei erfolgten die Berechnungen für eine unterschiedliche Anzahl von physikalischen Schritten l und unter Berücksichtigung der verschiedenen Kostenverteilungen.

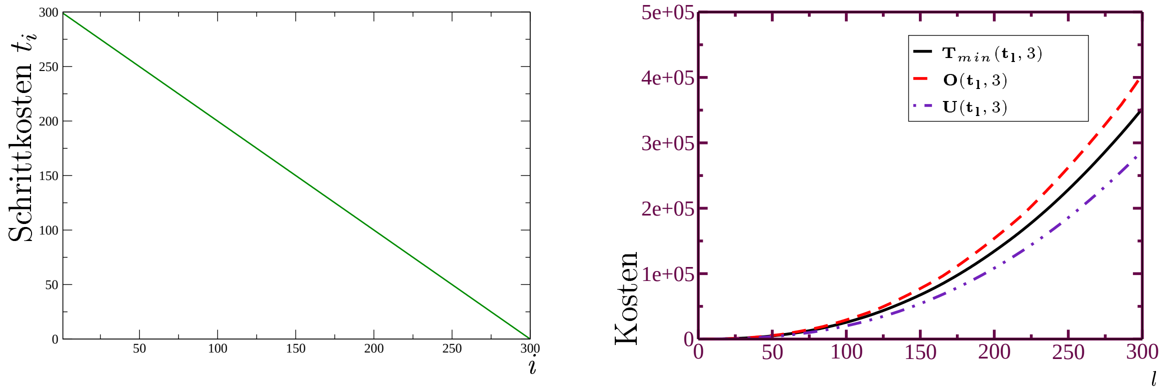

Abbildung 3.13: Beispiel 1 für $O(\mathbf{t_1}, 3)$ und $U(\mathbf{t_1}, 3)$

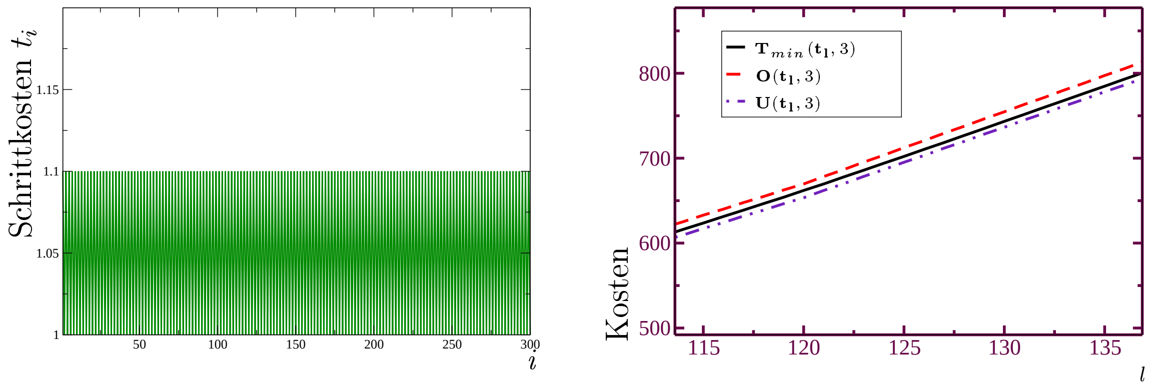

Abbildung 3.14: Beispiel 2 für $O(\mathbf{t_1}, 3)$ und $U(\mathbf{t_1}, 3)$

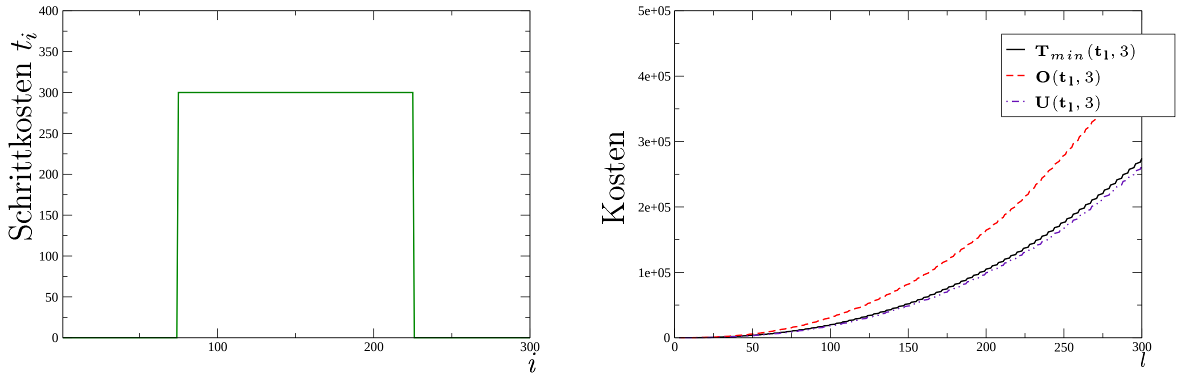

Abbildung 3.15: Beispiel 3 für $O(\mathbf{t_1}, 3)$ und $U(\mathbf{t_1}, 3)$

Kapitel 4

Kostengünstige Berechnung von Umkehrschemata

In diesem Kapitel wird die Problematik der Aufstellung von Umkehrschemata behandelt, wobei nicht uniforme Kosten zugrunde gelegt werden. Im Kapitel 3.3.2 ist ein Verfahren erwähnt worden, mit dem in $O(sl^2)$ Schritten ein optimales Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ erzeugt wird. Die Abarbeitung der binomialen Umkehrschemata verursacht einen Aufwand von $l^{1+\frac{1}{s}}$ Schritten, da für ein festes s $r \sim l^{\frac{1}{s}}$ gilt. Das lässt sich als Folge von (3.16) zeigen. Somit wird der Kostenaufwand von $O(sl^2)$ Schritten zur Aufstellung der Umkehrschemata als zu hoch bezeichnet. Demzufolge wird in den weiteren Abhandlungen als Ziel seine Reduzierung verfolgt.

Aufgrund der Vorbetrachtungen ist davon auszugehen, dass die Aufstellung von optimalen Schemata $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ mit geringeren als $O(sl^2)$ Kosten nicht implementierbar ist. Demzufolge wird in diesem Kapitel ein Verfahren zur kostengünstigen Aufstellung eines Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ bei gegebenen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ und s verfügbaren Checkpoints beschrieben, wobei die Übereinstimmung der Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ mit den minimalen Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ angestrebt wird, aber nicht zwangsläufig erforderlich sein soll. Mit $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ werden die Ausführungskosten des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ bezeichnet, die bei der Umkehrung einer entsprechenden Schrittfolge entstehen, wobei $\mathbf{t_l}$ die Schrittkostenverteilung dieser Folge darstellt. Obwohl das Umkehrschema $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ nicht zwangsläufig optimal ist, wird bei der Aufstellung dieses Schemas eine Reduzierung der Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ angestrebt. Im Kapitel 4.2 wird darauf näher eingegangen.

Es werden im weiteren mit $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ die Kosten des Verfahrens bezüglich der Anzahl der arithmetischen Operationen, die bei der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ erforderlich sind, bezeichnet. Im Kapitel 4.4 werden diese Kosten untersucht bzw. explizit berechnet.

4.1 Anwendung von $S_{bin}(l, s)$

Aufgrunddessen, dass das konstruierte Umkehrschema $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ nicht zwangsläufig optimal sein soll bzw. das Verfahren zu seiner Aufstellung einen möglichst kleinen Kostenaufwand erfordert, werden zunächst bereits bekannte Verfahren zur Aufstellung von Umkehrschemata untersucht, unter anderen das Verfahren zur Aufstellung von binomialen Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$.
Gemäß Kapitel 3.3.1 sind die Kosten zur Aufstellung derartiger Umkehrschemata vernachlässigbar gering, wodurch eine der beiden Voraussetzungen des gesuchten Verfahrens erfüllt wird. Ob die zweite Voraussetzung erfüllt ist, und zwar ob die Abweichung der beiden Kosten

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) \tag{4.1}$$

gering ist, wird in diesem Abschnitt beispielhaft untersucht, wobei in (4.1) $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s) = S_{bin}(l, s)$ gilt.
Dabei wird zunächst ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ für gegebene Größen l und s gemäß Kapitel 3.3.1 erzeugt. Danach wird dieses Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ für die Umkehrung einer entsprechenden Schrittfolge angewendet, wobei nicht uniforme Schrittkosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_l \rangle$ bei dieser Folge zugrunde gelegt werden. Die durch die Umkehrung entstehenden Ausführungskosten werden als $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ bezeichnet und mit den minimalen Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ verglichen.
In Abb. 4.1 und Abb. 4.2 sind die zu untersuchenden Schrittkostenverteilungen dargestellt. Abb. 4.3 beinhaltet eine Gegenüberstellung der Ausführungskosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ und der Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ der optimalen Umkehrschemata unter Berücksichtigung der in den Abb. 4.1 und Abb. 4.2 angegebenen nicht uniformen Kosten. Dabei werden die Werte $(\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s))$ für jede Schrittkostenverteilung und für jede Länge l, $0 \leq l \leq 100$, berechnet und prozentual in der Abb. 4.3 graphisch dargestellt, wobei $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) = 100\,\%$ gesetzt wird. Alle Beispiele wurden mit 3 Checkpoints berechnet.
Wie aus Abbildung 4.3 hervorgeht, liegen die Abweichungen $(\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s))$ zwischen den Werten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ bzw. $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ bei den ersten zwei Schrittkostenverteilungen unter 10 %. Für diese Kostenverteilungen könnte das Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ als das Schema $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ angenommen werden. Bei der dritten Verteilung steigen die Abweichungen an. Sie liegen im Bereich bis zu 15 %. Bei der letzten vierten Verteilung werden die Abweichungen noch deutlicher.

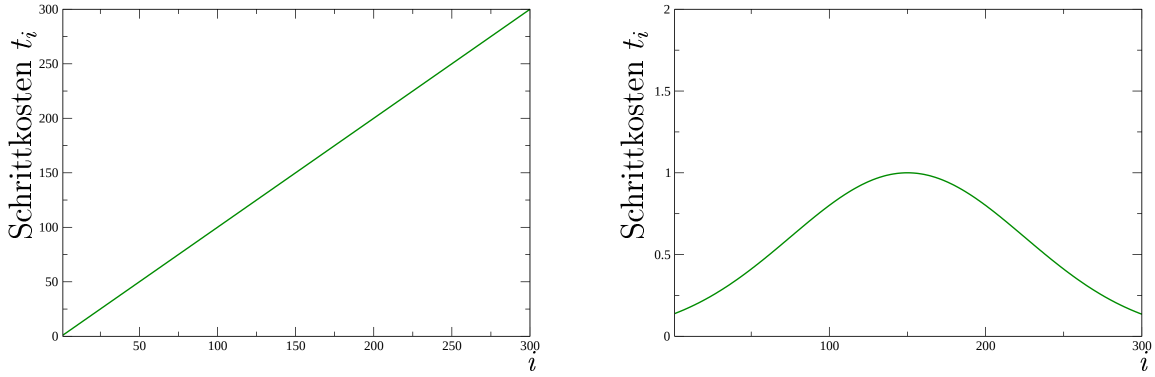

Abbildung 4.1: Linear ansteigende und GAUSSsche Verteilung

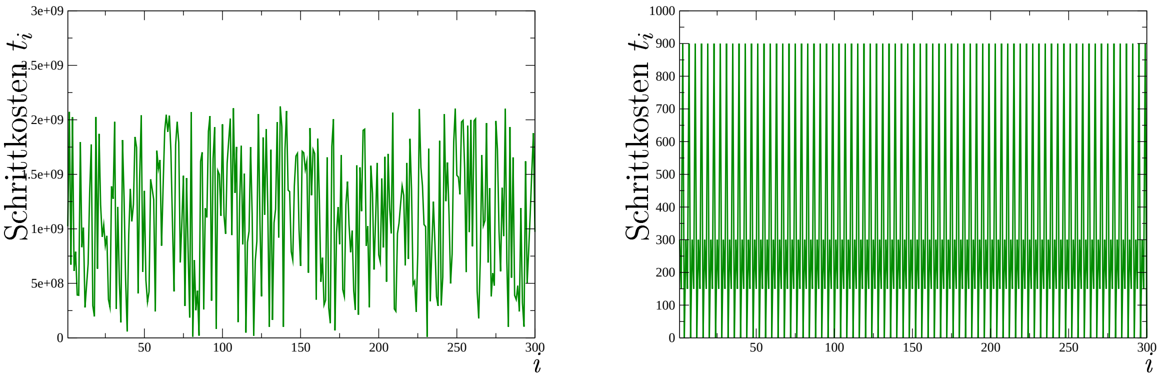

Abbildung 4.2: Zufalls- und Sägezahnverteilung

Das kann damit erklärt werden, dass bei den letzten zwei Verteilungen sich die Schrittkosten von vielen physikalischen Schritten extrem voneinander unterscheiden. Da bei der Abarbeitung von $S_{bin}(l, s)$ fast alle physikalischen Schritte $\approx r_{bin}(s, l)$ mal ausgeführt werden, bringen die Schritte mit hohen Kosten einen sehr großen Anteil und die Schritte mit kleinen Kosten einen sehr kleinen Anteil bei der Berechnung der resultierenden Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_l, s)$. Dabei bezeichnet $r_{bin}(s, l)$ die maximale Wiederholungszahl für ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ und ist gemäß Beziehung (3.16) zu berechnen.

Da es bei den letzten zwei Verteilungen (Zufalls- und Sägezahnverteilung) sehr viele Schritte gibt, die extrem unterschiedliche Kosten haben, treten beachtliche Kostenunterschiede $(\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_l, s) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s))$ auf. Bei den ersten

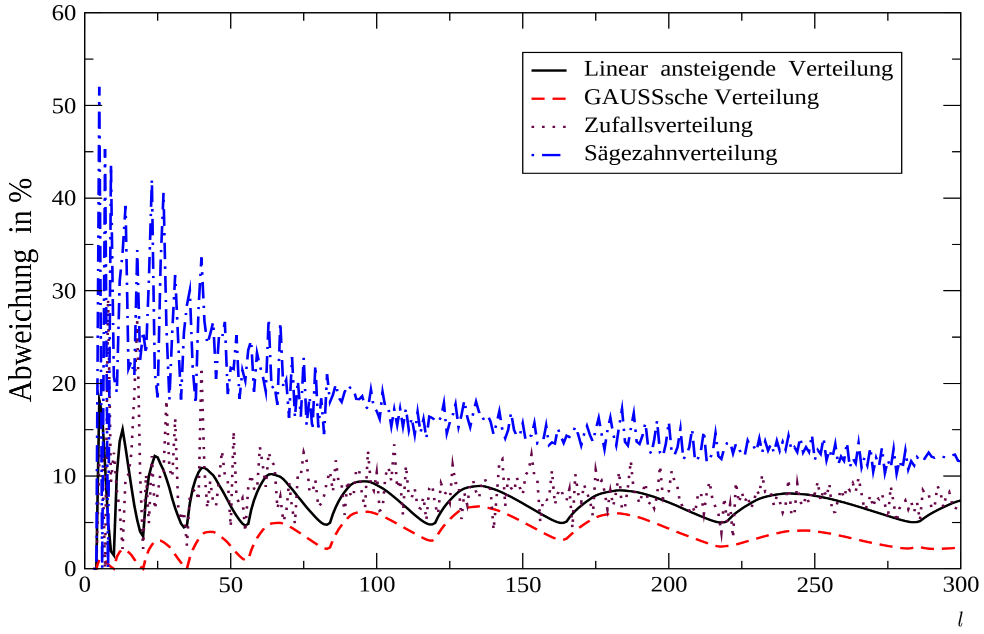

Abbildung 4.3: Vergleich von Ausführungskosten

zwei Verteilungen (linear ansteigende und GAUSSsche Verteilung) hingegen sind die Kostenunterschiede zwischen der einzelnen physikalischen Schritte relativ gleich, bzw. sie sind homogen verteilt. Aufgrunddessen treten bei der Berechnung der Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_l, s)$ geringere Abweichungen zu den optimalen Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s)$ auf.

Diese Tatsache wird auch durch das in der Abb. 4.4 gegebene Beispiel bestätigt, bei dem sich die Ausführungskosten einzelner physikalischer Schritte in der Folge sehr stark voneinander unterscheiden. Dabei werden die Schrittkosten so verteilt, dass die ersten wenigen Schritte sehr große und alle anderen physikalischen Schritte verschwindend kleine Ausführungskosten haben. Dadurch werden die Abweichungen $(\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_l, s) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s))$ extrem hohe Werte annehmen, was gemäß Abb. 4.4 bestätigt werden kann. Das Beispiel ist mit 5 Checkpoints berechnet worden.

Das beweist, dass das Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ als gesuchtes Schema $S_{kg}(\mathbf{t}_l, s)$ für einige Verteilungen nicht gut geeignet ist, besonders dann, wenn stark unterschiedliche Kostenverteilung vorliegen. Dennoch können die Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_l, s)$ unter Umständen für eine Abschätzung der Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_l, S_{kg}(\mathbf{t}_l, s))$

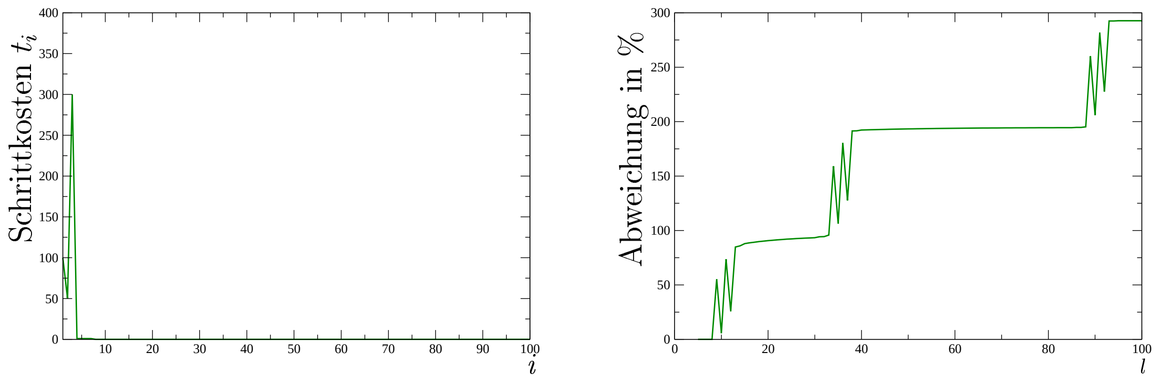

Abbildung 4.4: Vergleich von Ausführungskosten

des gesuchten Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ herangezogen werden, worauf im folgenden Kapitel 4.2 eingegangen werden soll.

4.1.1 Berechnung der oberen Schranke für $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$

Zunächst wird eine Abschätzung bzw. eine obere Schranke der Ausführungskosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ berechnet, wobei diese obere Schranke mit $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ im weiteren bezeichnet wird. Da das Schema $S_{bin}(l, s)$ für manche Schrittkostenverteilungen als akzeptable Lösung bzw. als das Umkehrschema $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ angenommen wird, kann eine obere Schranke seiner Ausführungskosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ als eine obere Schranke der Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ betrachtet werden. Mit anderen Worten dürfen die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ die obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ der Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ nicht überschreiten.
Gemäß Kapitel 2.6 werden die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s) = \sum_{i=1}^{l} r_i \cdot t_i. \tag{4.2}$$

Bei der Aufstellung der oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ wird das Prinzip der Berechnung der Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ gemäß Gleichung (4.2) zugrunde gelegt. Dabei hat die Nummer $\check{l}$ des Zwischenzustandes, der in dem zweiten Checkpoint gespeichert ist, eine besondere Bedeutung. Die Bestimmung des Wertes $\check{l}$ für ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ erfolgt gemäß Satz 3.4 (vgl. Kapitel 3.3.1).

Es ist zu aufwendig, bei der Aufstellung von $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l, s))$ die Wiederholungszahl r_i von jedem physikalischen Schritt F_i zu bestimmen. Deswegen beschränkt man sich auf die Berechnung der Werte der maximalen Wiederholungszahlen $r_{bin}(s, \check{l})$ und $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ für die Folgen $(F_1, ..., F_{\check{l}})$ bzw. $(F_{\check{l}+1}, ..., F_l)$. Des weiteren wird der Wert von $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l, s))$ folgendermaßen erfasst:

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l, s)) = \sum_{i=1}^{l} \widehat{r}_i \cdot t_i, \tag{4.3}$$

wobei die Größen $\widehat{r}_i$, $1 \le i \le l$, in den weiteren Abhandlungen formelmäßig definiert werden. An dieser Stelle soll darauf jedoch nicht näher eingegangen werden.

In der Abb. 4.5 wird eine Folge von 30 physikalischen Schritten mit einer Schrittkostenverteilung $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_{30} \rangle$ betrachtet. Die Anzahl von verfügbaren Checkpoints in diesem Beispiel ist 3. In dieser Abb. 4.5 wird graphisch verdeutlicht, welche Werte $\widehat{r}_i$, $1 \le i \le 30$, für die Berechnung der oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(30, 3))$ angenommen werden sollen bzw. wie sich das Wiederholungsprofil $\mathbf{r}(S_{bin}(30, 3)) = \langle r_1, ..., r_{30} \rangle$ eines binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(30, 3)$ von dem Profil $\mathbf{r}(\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(30, 3))) = \langle \widehat{r}_1, ..., \widehat{r}_{30} \rangle$ unterscheidet, das bei der Berechnung der oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(30, 3))$ verwendet wird.

In der Abb. 4.5 sind für jedes $i, 1 \le i \le 30$, jeweils die Werte r_i bzw. $\widehat{r}_i$ abgebildet. Die Werte r_i, die mit der punktierten Linie dargestellt sind, entsprechen der Wiederholungszahl jedes physikalischen Schrittes F_i, die bei der Abarbeitung des binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$ berechnet werden. Die Werte $\widehat{r}_i$, die mit der durchgezogenen Linie dargestellt sind, entsprechen den Werten, die für die Berechnung von $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l, s))$ angenommen werden sollen. In diesem konkreten Beispiel wird der 16-te Zwischenzustand in dem zweiten Checkpoint gespeichert. Dann werden die Werte $r_{bin}(s, \check{l})$ und $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ für die maximale Wiederholungszahl vor bzw. nach dem gespeicherten Zwischenzustand folgendermaßen berechnet:

$$r_{bin}(s, \check{l}) = r_{bin}(3, 16) = 3 \; aus \; \beta(3, r_{bin}(3, 16) - 1) < 16 \leqslant \beta(3, r_{bin}(3, 16)) \tag{4.4}$$

und

$$\begin{aligned} & r_{bin}(s-1, l-\check{l}) = r_{bin}(2, 14) = 4 \qquad aus \\ & \beta(2, r_{bin}(2, 14) - 1) < 14 \leqslant \beta(2, r_{bin}(2, 14)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Den Größen $\widehat{r}_i$ werden folgende Werte zugewiesen:

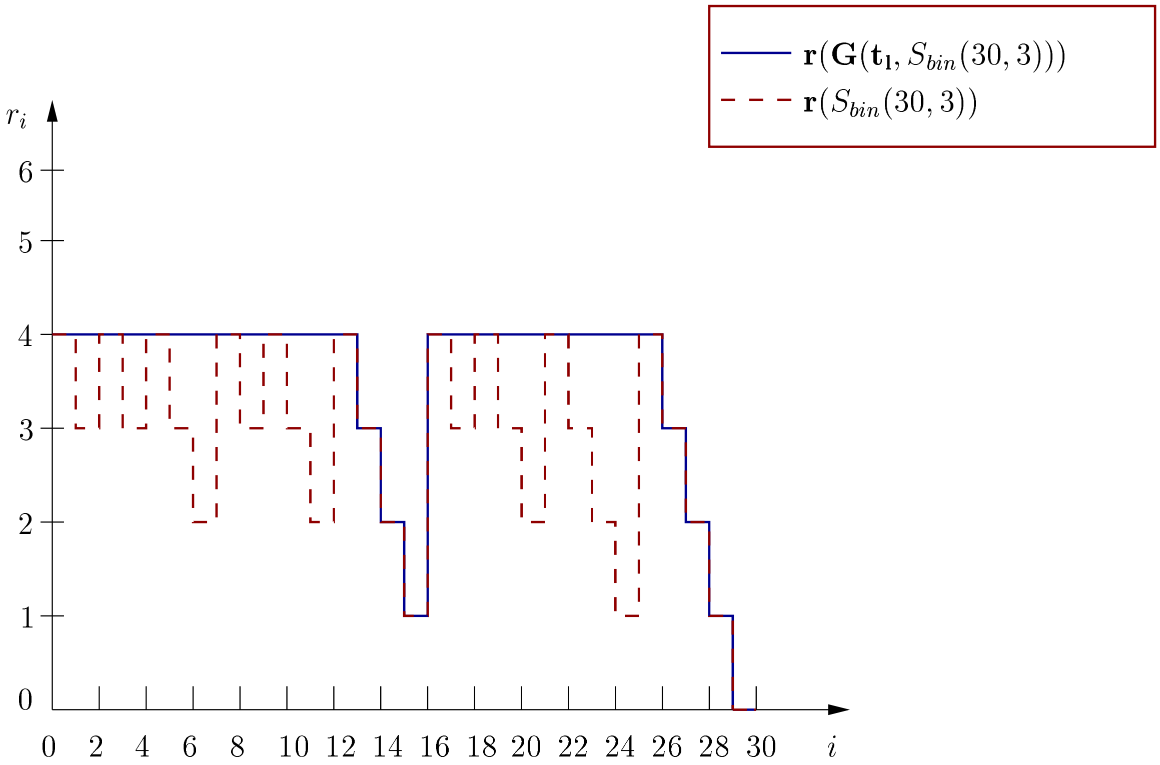

Abbildung 4.5: Profile der Anzahl der Ausführungen $\mathbf{r}(S_{bin}(30,3))$ und $\mathbf{r}(\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(30,3)))$

$$\begin{array}{ll}
\widehat{r}_i = r_{bin}(3,16) + 1, & i = 1, ..., 16 - r_{bin}(3,16), \\
\widehat{r}_i = 17 - i, & i = 17 - r_{bin}(3,16), ..., 16, \\
\widehat{r}_i = r_{bin}(2,14), & i = 17, ..., 30 - r_{bin}(2,14), \\
\widehat{r}_i = 30 - i, & i = 31 - r_{bin}(2,14), ..., 30.
\end{array}$$

Für beliebige Größen l und s ist die Berechnung der Werte $r_{bin}(s, \check{l})$, $r_{bin}(s - 1, l - \check{l})$, $\widehat{r}_i$ bzw. der oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ zu verallgemeinern. Zunächst werden die Werte $r_{bin}(s, \check{l})$ und $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ aus den Beziehungen (4.6) bzw. (4.7) berechnet.

$$r_{bin}(s, \check{l}) \qquad aus \qquad \beta(s, r_{bin}(s, \check{l}) - 1) < \check{l} \leqslant \beta(s, r_{bin}(s, \check{l})) \tag{4.6}$$

und

$$\begin{array}{l} r_{bin}(s-1, l-\check{l}) \qquad aus \\ \beta(s-1, r_{bin}(s-1, l-\check{l}) - 1) < l - \check{l} \leqslant \beta(s-1, r_{bin}(s-1, l-\check{l})). \end{array} \tag{4.7}$$

$\widehat{r}_i = r_{bin}(s,\check{l})+1,$	$i = 1,...,\check{l} - r_{bin}(s,\check{l})$
$\widehat{r}_i = \check{l} - i + 1,$	$i = \check{l} - r_{bin}(s,\check{l}) + 1,...,\check{l}$
$\widehat{r}_i = r_{bin}(s-1, l-\check{l}),$	$i = \check{l}+1,...,l - r_{bin}(s-1,l-\check{l})$
$\widehat{r}_i = l - i,$	$i = l - r_{bin}(s-1,l-\check{l}) + 1,...,l$

Tabelle 4.1: Berechnung von $\mathbf{r}(\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,s))) = \widehat{r}_1, ..., \widehat{r}_l\rangle$

Aufgrund der berechneten Werte $r_{bin}(s,\check{l})$ und $r_{bin}(s-1,l-\check{l})$ werden den Größen $\widehat{r}_i,\ 1 \le i \le l$, die Werte zugewiesen. Die genauen Formeln für $\widehat{r}_i$ sind in der Tabelle 4.1 angegeben.
Daher kann die Beziehung (4.3) für die Berechnung der oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,s))$ für die Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,s)) = \sum_{i=1}^{l} \widehat{r}_i \cdot t_i = (r_{bin}(s,\check{l})+1) \cdot \sum_{i=1}^{\check{l}-r_{bin}(s,\check{l})} t_i +$$

$$+ \sum_{i=\check{l}-r_{bin}(s,\check{l})+1}^{\check{l}} (\check{l}-i+1)\cdot t_i + r_{bin}(s-1,l-\check{l}) \cdot \sum_{i=\check{l}+1}^{l-r_{bin}(s-1,l-\check{l})} t_i + \tag{4.8}$$

$$+ \sum_{i=l-r_{bin}(s-1,l-\check{l})+1}^{l} (l-i)\cdot t_i.$$

Die Übergang des Wiederholungsprofils $\mathbf{r}(S_{bin}(l,s)) = \langle r_1, ..., r_l\rangle$ zu dem Wiederholungsprofil $\mathbf{r}(\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,s))) = \langle \widehat{r}_1, ..., \widehat{r}_l\rangle$ bzw. der Übergang $r_i \to \widehat{r}_i,\ 1 \le i \le l$, unter Berücksichtigung der mit Hilfe von $\widehat{r}_i$ berechneten oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,s))$ wird an einem Beispiel in der Abb. 4.6 untersucht. Dabei wird eine Menge von Folgen physikalischer Schritte der Länge $l, 0 \le l < 300$, betrachtet. Die Schrittkostenverteilungen für jede Länge l unterliegen dem GAUSSschen Gesetz. Beispielhaft ist die Schrittkostenverteilung für $l = 300$ im linken Bild in der Abb. 4.6 dargestellt. Die Anzahl von verfügbaren Checkpoints ist 4. Für jede Länge $l, 0 \le l < 300$, werden die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,4))$ gemäß Gleichung (4.2) berechnet. Im rechten Bild der Abb. 4.6 werden diese Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,4))$ mit der durchgezogenen Linie dargestellt. Für jede Länge $l, 0 \le l < 300$, wird außerdem die obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l,4))$ gemäß Beziehung (4.8) berechnet und mit der punktierten Linie in der Abb. 4.6 aufgetragen.

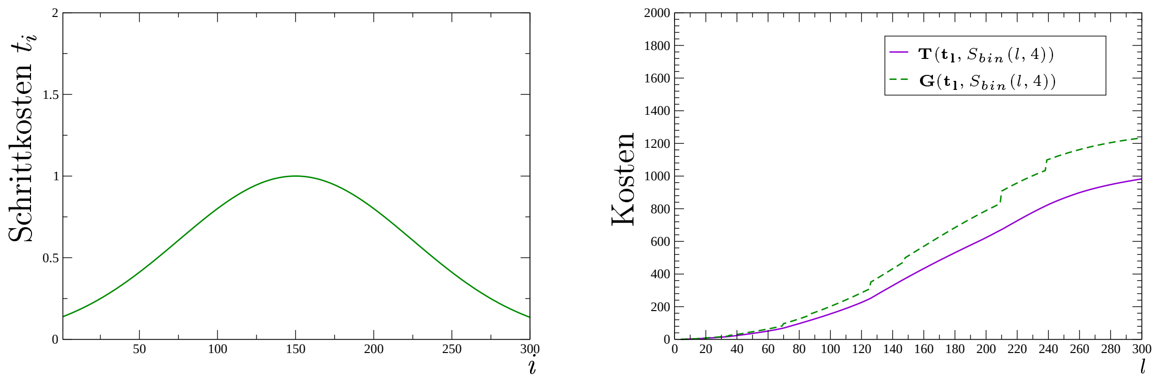

Abbildung 4.6: Beispiel für die obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_l}, S_{bin}(l, 4))$

4.2 Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$

Unter der Aufstellung eines Umkehrschemas versteht man vor allem, die Reihenfolge von Anweisungen festzulegen, die bestimmen, welcher Zwischenzustand zu welchem Zeitpunkt in welchen Checkpoint abgespeichert werden soll (gemäß Def. 2.2). Für die Aufstellung des binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$ ist eine Regel hergeleitet worden, nach der berechnet wird, welcher Zwischenzustand zu welchem Zeitpunkt in den zweiten Checkpoint (aus allen zur Zeit verfügbaren Checkpoints) zu speichern ist (siehe auch Kapitel 3.3.1 und Satz 3.4). An dieser Stelle soll eine ähnliche Herangehenweise verwendet werden, um ein Umkehrschema $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ unter Berücksichtigung der nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ aufzustellen.

Gemäß der im Kapitel 4.1 untersuchten Beispiele, kann das binomiale Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ unter Umständen auf den Fall mit nicht uniformen Kosten übertragen werden bzw. als eine akzeptable Lösung $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ betrachtet werden. Andererseits existieren Folgen von physikalischen Schritten mit Schrittkostenverteilungen, bei denen es erforderlich ist, ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ noch zu verbessern, um eine akzeptable Lösung $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ zu erhalten. Des weiteren wird das Prinzip der Berechnung der Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ bei der Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ verwendet, und zwar für die Berechnung der oberen Schranke für die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$, die ihrerseits auch die Bestimmung des Zwischenzustandes, der in dem zweiten Checkpoint gespeichert werden soll, zur Folge hat.

4.2.1 Konstruktionsprinzip von $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$

Für die Konstruktion des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ bzw. zur Herleitung der Regel, durch die jedem Checkpoint zu jedem Zeitpunkt die Nummer des gespeicherten Zwischenzustandes zugeordnet wird, wird das Berechnungsprinzip der oberen Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ einbezogen. Dabei wird für die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ eine obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$, ähnlich wie $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ für die Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ des Schemas $S_{bin}(l, s)$, berechnet. Die Berechnung von $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{bin}(l, s))$ hängt wesentlich davon ab, welcher Zwischenzustand in dem zweiten Checkpoint gespeichert ist. Bei der Aufstellung von $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ ist das ebenso zu berücksichtigen. Es wird im weiteren mit $\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ - eine obere Schranke für die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ bezeichnet, wobei der $\check{l}$-te Zwischenzustand in dem zweiten Checkpoint gespeichert ist. Die Berechnung der oberen Schranke $\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ erfolgt folgendermaßen:

$$\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)) = \sum_{i=1}^{l} \widehat{r}_i \cdot t_i =$$

$$(r_{bin}(s, \check{l}) + 1) \cdot \sum_{i=1}^{\check{l}-r_{bin}(s,\check{l})} t_i + \sum_{i=\check{l}-r_{bin}(s,\check{l})+1}^{\check{l}} (\check{l} - i + 1) \cdot t_i + \tag{4.9}$$

$$+ r_{bin}((s-1, l-\check{l})) \cdot \sum_{i=\check{l}+1}^{l-r_{bin}(s-1,l-\check{l})} t_i + \sum_{i=l-r_{bin}(s,\check{l})+1}^{l} (l-i) \cdot t_i,$$

wobei $r_{bin}(s, \check{l})$ und $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ aus den Beziehungen (4.6) bzw. (4.7) zu berechnen sind.

Bei der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ wird zunächst der erste Zwischenzustand wie bei der Konstruktion des Schemas $S_{bin}(l, s)$ in den ersten Checkpoint gespeichert. Danach wird die obere Schranke $\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ für alle $\check{l}$, $0 < \check{l} < l$, berechnet. Alle Werte $\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$, $0 < \check{l} < l$, werden miteinander verglichen, das Minimum

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)) = \min_{0<\check{l}<l} \{\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))\}$$

von diesen Werten wird ausgewählt und dem Wert $\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ zugewiesen:

$$\mathbf{G}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)) \equiv \mathbf{G}_k(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)) = \min_{0<\check{l}<l} \{\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))\}. \tag{4.10}$$

Dabei wird die Nummer k des Zwischenzustandes bestimmt, bei der die oberen Schranken $\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)),\ 0 < \check{l} < l$, ihren Minimalwert erreichen. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ am kleinsten sind, wenn der k-te Zwischenzustand in den zweiten Checkpoint gespeichert wird. Die Minimierung der Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ wird als Voraussetzung bei der Aufstellung des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ angenommen.
Somit ist eine Regel hergeleitet worden, durch die die Nummer des Zwischenzustandes berechnet werden kann, der bei der Aufstellung des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ in dem zweiten Checkpoint gespeichert wird.
Weiterhin wird dasselbe Prinzip auf die Folgen $(F_1, ..., F_k)$ bzw. $(F_{k+1}, ..., F_l)$ von physikalischen Schritten angewendet. Bei der Umkehrung der Folge $(F_1, ..., F_k)$ stehen s Checkpoints und bei der Umkehrung der Folge $(F_{k+1}, ..., F_l)$ $(s-1)$ Checkpoints zur Verfügung. Wenn alle Checkpoints belegt sind, werden die restlichen physikalischen Schritte einer nach dem anderen umgekehrt, wobei alle davorstehenden Schritte, angefangen von dem im letzten Checkpoint gespeicherten Zwischenzustand, wiederholt ausgeführt werden. Das Umkehrschema $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ wird solange mit dem beschriebenen Verfahrensprinzip konstruiert, bis alle physikalischen Schritte $F_i,\ 1 \leq i \leq l$, umgekehrt sind.

4.2.2 Algorithmus zur Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$

$\mathbf{t_{b_0+1,l_0}} = \langle t_{b_0+1}, ..., t_{l_0}\rangle;$
$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{kg}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) = 0;$
$b := b_0; \qquad e := l_0; \qquad c = s;$
$\mathbf{Verfahren(b, e, c)}$
begin
  if $((e - b > c) \wedge (c > 1))$
    $finde \quad k:$
    $\mathbf{G}_k(\mathbf{t_{b+1,e}}, S_{kg}(\mathbf{t_{b+1,e}}, s)) \equiv \min\limits_{b<\tilde{l}<e}\{\mathbf{G}_{\tilde{l}}(\mathbf{t_{b+1,e}}, S_{kg}(\mathbf{t_{b+1,e}}, s))\}$
    speichere $k - ten$ Zwischenzustand in den zweiten Checkpoint;
    $$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{kg}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) += \sum_{i=b+1}^{k} t_i;$$
    $\mathbf{Verfahren(b, k, c)};$
    $\mathbf{Verfahren(k, e, c - 1)};$
  fi;
  if $(e - b \leq c)$
    $$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{kg}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) += \sum_{i=b+1}^{e-1} t_i;$$
  fi;
  if $(c = 1)$
    $$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{kg}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) += \sum_{j=b+1}^{e} (e - j) \cdot t_j;$$
  fi;
end

4.2.3 Beispiel des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$

Die Abbildung 4.8 zeigt ein Beispiel für die Konstruktion des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ mit dem oben beschriebenen Verfahren. Dabei wird eine Folge von 7 physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, ..., t_7\rangle$ betrachtet. Die Schrittkostenverteilung für diese Folge ist in der Abbildung 4.7 dargestellt. Der Kostenaufwand $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ für die Abarbeitung dieses Umkehrschemas beträgt 28. Dabei ist der Kostenaufwand $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$, der bei der Umkehrung dieser Schrittfolge mit einem binomialen Umkehrschema $S_{bin}(7, 3)$ entsteht, 30 w-Einheiten.

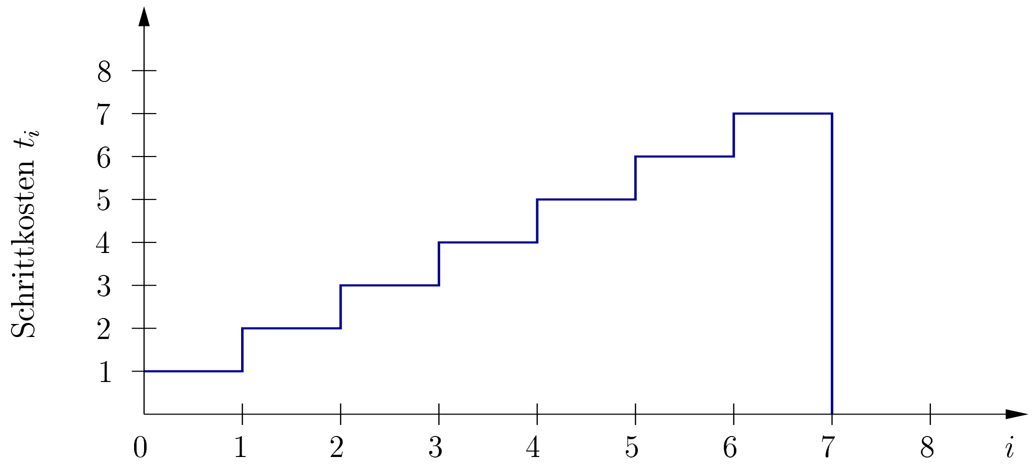

Abbildung 4.7: Schrittkosten $\mathbf{t_1}$

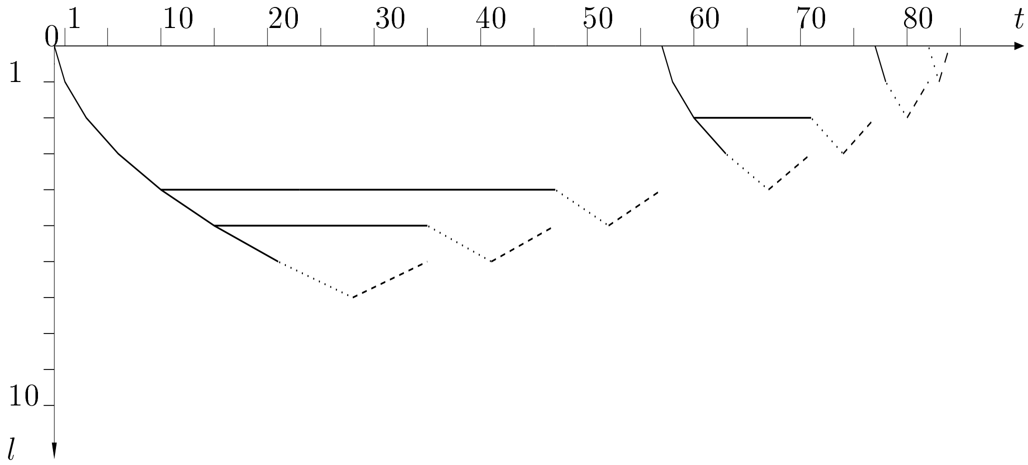

Abbildung 4.8: Umkehrschema $S_{kg}(\mathbf{t_1}, 3)$

4.3 Untersuchung des Kostenaufwandes von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$

Die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ werden in diesem Kapitel mit dem Kostenaufwand der folgenden zwei Umkehrschemata verglichen.

- Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ eines optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ unter Berücksichtigung der nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_l}$
- Ausführungskosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ eines binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$

In der Abbildung 4.9 erfolgt die Gegenüberstellung der Abweichungen

$$\big(\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)\big)$$

für verschiedene Schrittkostenverteilungen, bei einer unterschiedlichen Anzahl l an physikalischen Schritten, wobei l die Werte zwischen 0 und 500 annimmt. Die Schrittkostenverteilungen der einzelnen Folgen, die in der Abb. 4.9 untersucht werden, sind bereits in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt worden. Die Anzahl der verfügbaren Checkpoints ist jeweils mit angegeben. Dabei werden die Werte $\big(\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)\big)$ für jede Schrittkostenverteilung und für jede Folgenlänge l, $0 \le l \le 500$, berechnet und prozentual in der Abb. 4.9 graphisch dargestellt, wobei $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) = 100\,\%$ gesetzt wird.
Wie aus Abbildung 4.9 hervorgeht, liegen die Abweichungen zwischen den Werten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ und $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ bei einer großen Anzahl an physikalischen Schritten unter 10 %, was als ein akzeptabler Bereich zu betrachten ist.
Da die Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ auf der Basis des Schemas $S_{bin}(l, s)$ erfolgt, bleibt noch zu klären, wie sich die Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s)$ und $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ der beiden Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$ bzw. $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ unterscheiden. Dabei werden die Abweichungen $\big(\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t_l}, s) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)\big)$ und $\big(\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)\big)$ für verschiedene Kostenverteilungen berechnet und in den Abbildungen 4.10 - 4.14 dargestellt, wobei die Anzahl l der physikalischen Schritte zwischen den Werten 0 und 500 variiert und $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) = 100\,\%$ gesetzt wird. Die Schrittkostenverteilungen der Folgen von physikalischen Schritten, die in Abb. 4.10 - Abb. 4.14 untersucht werden, sind in den Abbildungen 4.1, 4.2, 3.13, 3.14 und 3.15 dargestellt worden. Die Anzahl der verwendeten Checkpoints ist bei der jeweiligen Abbildung mit angegeben.

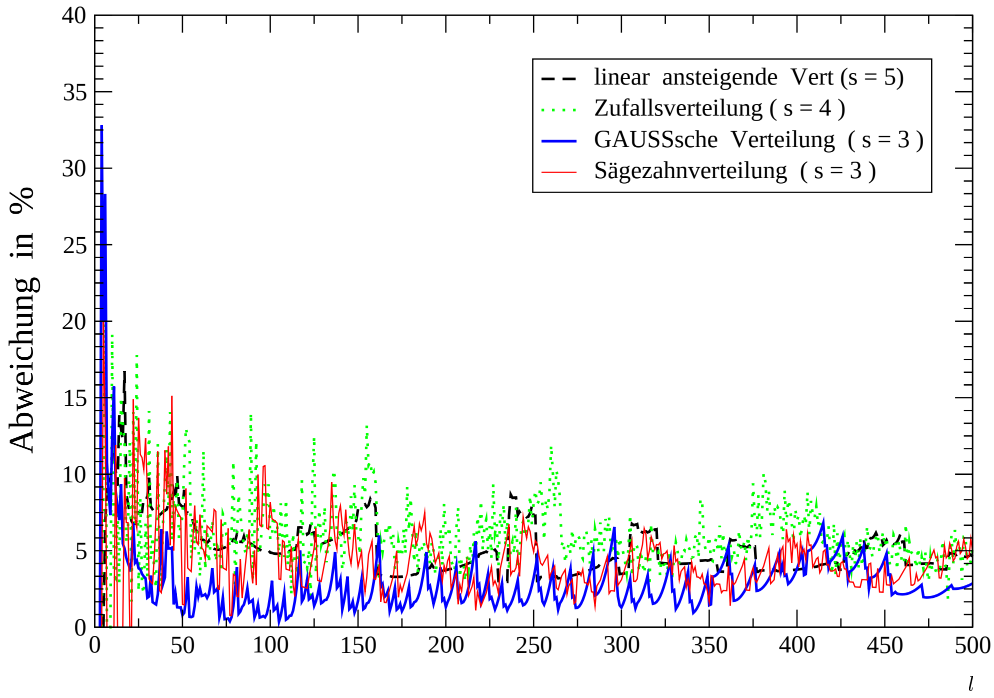

Abbildung 4.9: Vergleich der Ausführungskosten

Daraus ist zu schließen, dass bei den Schrittkostenverteilungen, für die die binomialen Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$ eine akzeptable Lösung darstellen bzw. die Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ und die optimalen Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_1, s)$ nahezu gleich sind, liegen auch die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ in einem akzeptablen Bereich bzw. nahe den Kosten $\mathbf{T}_{bin}(\mathbf{t}_1, s)$ und $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_1, s)$.

In dem Fall, wenn die binomialen Umkehrschemata bei der Behandlung der nicht uniformen Probleme einen hohen Kostenaufwand verursachen, liegen die Abweichungen der Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ der kostengünstig aufgestellten Umkehrschemata $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ zu $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_1, s)$ im Bereich bis zu 10 % (siehe Abb. 4.11). Somit sind auch diese Ergebnisse als akzeptabel zu bewerten.

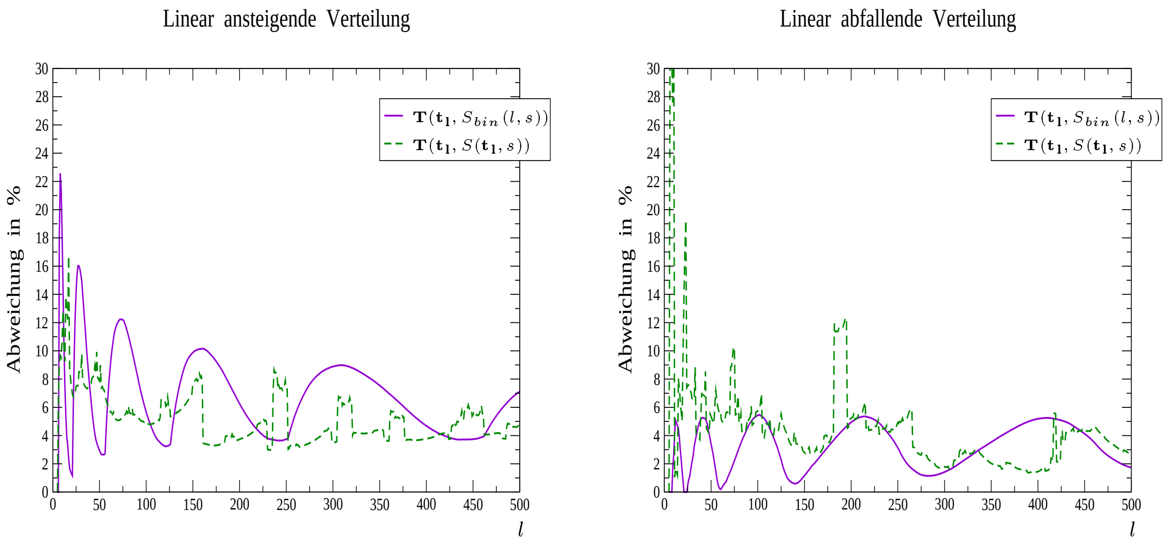

Abbildung 4.10: Vergleich der Ausführungskosten für linear ansteigende und abfallende Verteilung (vgl. Abb. 4.1 und 3.13 s=5)

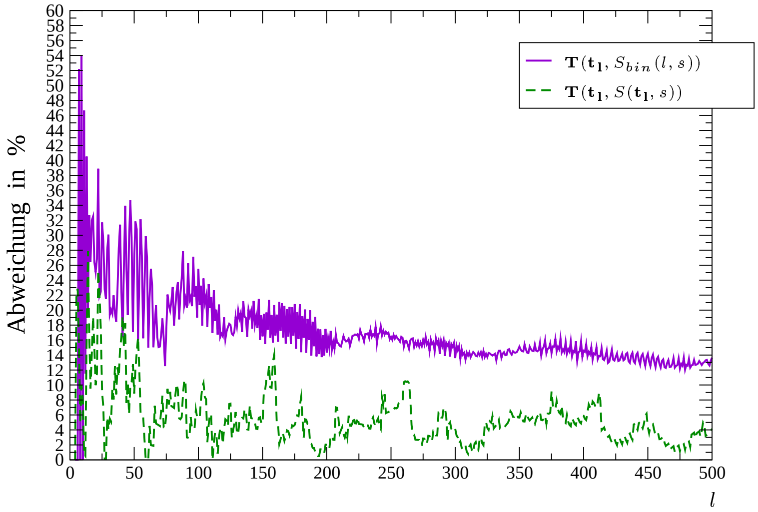

Abbildung 4.11: Vergleich der Ausführungskosten für Sägezahnverteilung (vgl. Abb. 3.14 s=4)

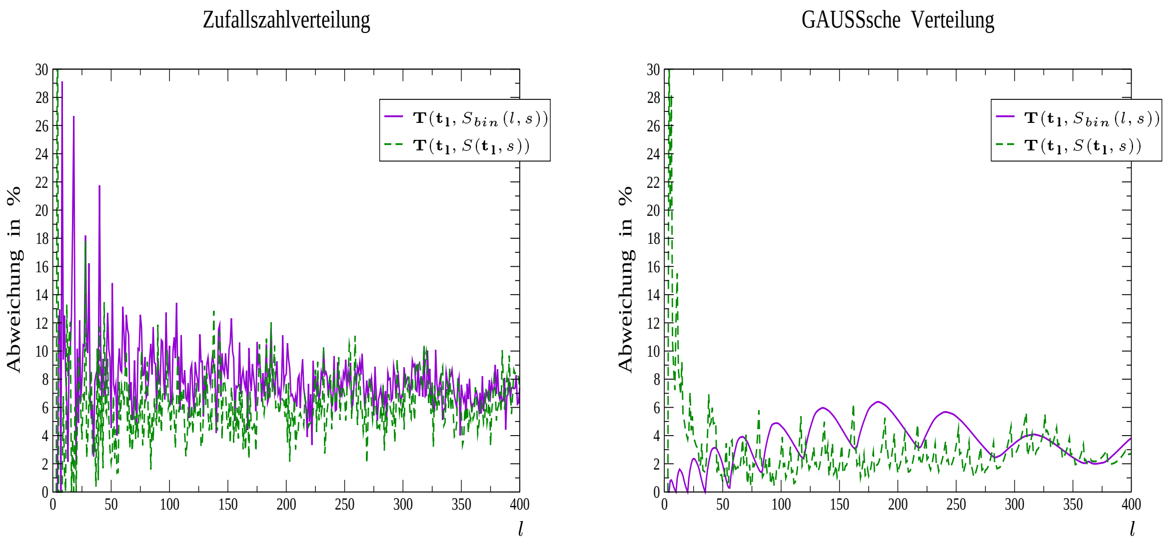

Abbildung 4.12: Vergleich der Ausführungskosten für Zufallszahlverteilung und GAUSSsche Verteilung (vgl. Abb. 4.1 und Abb. 4.2 s=3)

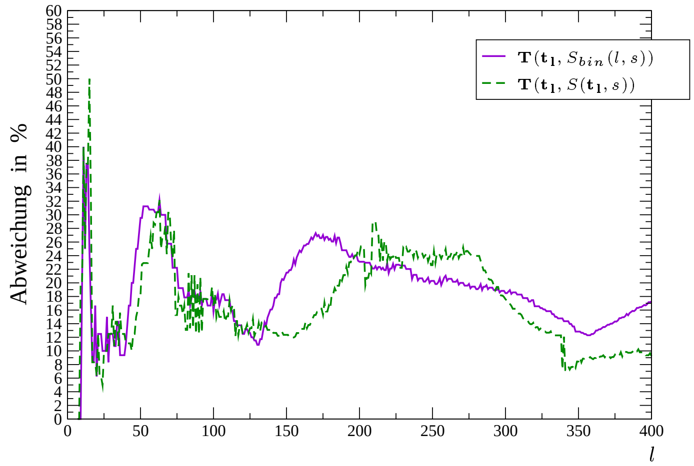

Abbildung 4.13: Vergleich der Ausführungskosten für die Stufenverteilung (vgl. Abb. 3.15 s=7)

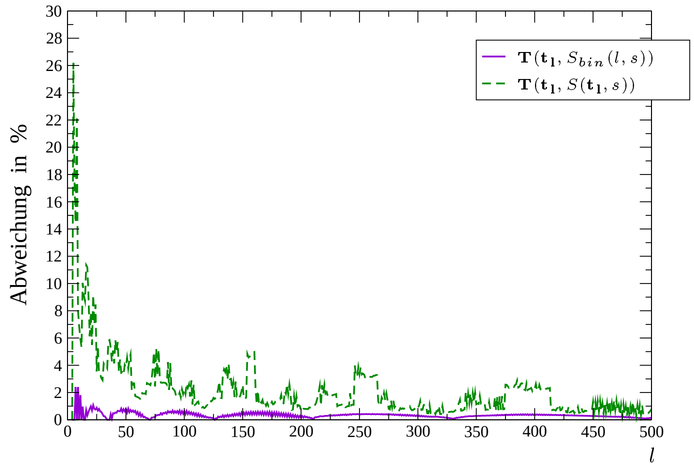

Abbildung 4.14: Vergleich der Ausführungskosten für Sägezahnverteilung (vgl. Abb. 4.2 s=4)

4.4 Berechnung der Ausführungskosten $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$

Bei der Herleitung des Algorithmus im Kapitel 4.2.2 zur Berechnung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ war es entscheidend, dass die bisher untersuchten Kosten $O(sl^2)$ (gemäß Kapitel 3.3.2) für die Konstruktion des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten dabei reduziert werden. In diesem Kapitel 4.4 wird bestätigt, dass die Aufstellung des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ mit weniger Kosten verbunden ist als die Konstruktion des optimalen Schemas $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$, wobei eine explizite Beziehung zwischen den Kosten $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ zur Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ und den Größen l bzw. s aufgestellt wird. Dabei werden der Algorithmus schrittweise untersucht bzw. die Kosten der einzelnen Operationen berechnet.
Es wird eine Folge von l physikalischen Schritten betrachtet, wobei s Checkpoints zur Verfügung stehen. Zunächst wird der erste Schritt des Verfahrens zur Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ untersucht, und seine Ausführungskosten werden berechnet. In dem ersten Schritt des Algorithmus ist es erforderlich, das Minimum

$$\min_{0<\check{l}<l} \left(\sum_{i=1}^{l} \hat{r}_i \cdot t_i \right) \tag{4.11}$$

von höchstens l Größen zu finden (vgl. Kapitel 4.2.2 und Gleichung (4.10)). Für jede Summe $\sum_{i=1}^{l} \hat{r}_i \cdot t_i$ sind die Werte $\hat{r}_i$ so definiert, dass sie von $r_{bin}(s, \check{l})$ und $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ abhängen. Die Implementierung des Verfahrens lässt sich so vereinfachen, dass eine von den beiden Größen $r_{bin}(s, \check{l})$ oder $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ einmal pro Verfahrensschritt gemäß Beziehung (4.6) oder (4.7) zu berechnen ist, und zwar für $\check{l} = (l-1)$. Damit ergibt sich ein Kostenaufwand von $\mathcal{O}(l^{1/s})$ arithmetischen Operationen (siehe [Gri00]). Für alle anderen $\check{l} : 0 < \check{l} < (l-1)$ lassen sich diese Größen $r_{bin}(s, \check{l})$ bzw. $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ aufgrund der bereits berechneten Werte rekursiv ermitteln. Es ergibt sich dabei eine obere Grenze für die Anzahl der notwendigen Operationen, wobei eine Konstante α eingeführt wird, die von l und s unabhängig ist. Somit wird der Kostenaufwand zur Bestimmung Größe $r_{bin}(s, \check{l})$ oder $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ für $\check{l},\ 0 < \check{l} < l$, folgendermaßen erfasst:

$$\mathcal{O}\left(l^{1/s} + (l-2)\alpha\right). \tag{4.12}$$

Für alle $\check{l}, 0 < \check{l} < l$, und unter Berücksichtigung der berechneten Größen

$r_{bin}(s, \check{l})$ bzw. $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ ist die entsprechende Summierung

$$(r_{bin}(s,\check{l})+1) \cdot \sum_{i=1}^{\check{l}-r_{bin}(s,\check{l})} t_i + \sum_{i=\check{l}-r_{bin}(s,\check{l})+1}^{\check{l}} (\check{l}-i+1) \cdot t_i +$$
$$r_{bin}(s-1,l-\check{l}) \cdot \sum_{i=\check{l}+1}^{l-r_{bin}(s-1,l-\check{l})} t_i + \sum_{i=l-r_{bin}(s-1,l-\check{l})+1}^{l} (l-i) \cdot t_i$$

durchzuführen. Um die notwendigen Schrittkosten $\sum t_i$ nicht jedesmal neu aufsummieren zu müssen, werden die Kosten t_i, $1 \leq i \leq l$, am Anfang des Algorithmus in entsprechenden Kombinationen aufsummiert. Demzufolge wird bei der Summation in jedem Schritt des Verfahrens mit bekannten Größen gearbeitet (zumindest bei dem ersten und dritten Summand). Dadurch kann der Kostenaufwand bei dieser Summation beschränkt werden, wobei die Konstante β eingeführt wird.

Damit ergibt sich der Kostenaufwand zur Berechnung der Summe $\sum_{i=1}^{l} \widehat{r}_i \cdot t_i$ unter Berücksichtigung des Kostenaufwandes für die Bestimmung der Werte $r_{bin}(s, \check{l})$ bzw. $r_{bin}(s-1, l-\check{l})$ für $\check{l}$, $0 < \check{l} < l$, gemäß Beziehung (4.12) als

$$\mathcal{O}\left(\left(l^{1/s} + (l-2)\alpha\right)\beta\right). \tag{4.13}$$

Die Suche nach dem minimalem Wert in der Beziehung (4.11) ist so implementiert worden, dass jeder neu berechnete Wert

$$\sum_{i=1}^{l} \widehat{r}_i \cdot t_i$$

für $\check{l}$, $1 < \check{l} < l$, mit dem bisherigen Wert für $\check{l}$, $0 < \check{l} < l-1$, verglichen wird, wobei jeweils das Minimum der beiden Werte angenommen wird. Der Kostenaufwand für den Vergleich der beiden Größen wird mit der Konstante γ erfasst.
Somit ergibt sich der gesamte Kostenaufwand für den ersten Schritt des Algorithmus zur Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ formelmäßig zu

$$\mathcal{O}\left(\left(l^{1/s} + (l-2)\alpha\right)\beta\gamma\right). \tag{4.14}$$

Bei allen anderen Schritten des Algorithmus wird eine Anzahl an physikalischen Schritten betrachtet, die kleiner als l ist ($l \equiv$ die Anzahl der in dem ersten Schritt des Algorithmus betrachteten Schritte). Deshalb wird der

Kostenaufwand von jedem Schritt des Algorithmus höchsten der Anzahl an arithmetischen Operationen entsprechen, die in der Beziehung (4.14) angegeben ist.

Um den gesamten Kostenaufwand $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s))$ des Algorithmus zu erfassen, bleibt noch zu klären, wieviele Schritte dieser Algorithmus beinhaltet. Es ist offensichtlich, dass im ungünstigsten Fall, wenn die Schrittkosten so verteilt sind, dass in jedem Schritt des Algorithmus die Daten des vorletzten Schrittes jeweils in dem zweiten Checkpoint abzuspeichern sind, die Anzahl der Schritte des Algorithmus l beträgt, wobei l die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten ist.

Daraus lässt sich eine obere Grenze für die gesamten Ausführungskosten $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s))$ des Algorithmus zur Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ ermitteln:

$$\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)) = \mathcal{O}\left(l \cdot \left(l^{1/s} + (l-2)\alpha\right)\beta\gamma\right), \tag{4.15}$$

wobei α, β und γ die zuvor eingeführte Konstanten sind, die unabhängig von l und s sind.

Dabei ist anzumerken, dass der Fall, dass der Algorithmus $\approx l$ Schritte benötigt, um eine Folge von l physikalischen Schritten umzukehren, in den praktischen Anwendungen sehr selten auftritt. Die Aufstellung des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ mit dem angegebenen Algorithmus ist oft wesentlich günstiger als der Aufwand, der sich aus den theoretischer Grenzwertbetrachtungen in der Beziehung (4.15) ergibt. Das wird in der Abb. 4.15 verdeutlicht. Dabei werden die Folgen von physikalischen Schritten der Länge l, $0 \leq l \leq 70$, betrachtet, wobei die Schrottkosten in dieser Folge linear ansteigen (für das Beispiel der Schrittkostenverteilung siehe die Abb. 4.1). Für die variierte Anzahl s, $s = 3, 4, 5$, an Checkpoints wird die Zeit $\mathbf{Z}_{opt}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ und $\mathbf{Z}_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ berechnet, mit der ein optimales Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ (gemäß [Wal99]) bzw. ein kostengünstig aufgestelltes Schema $S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ konstruiert werden.

Aus der Abb. 4.15 wird ersichtlich, dass die Aufstellungszeit $\mathbf{Z}_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ wesentlich geringer als die Zeit $\mathbf{Z}_{opt}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ bei allen untersuchten Werten der Parameter l und s ist.

Abgesehen von der beschränkten Anzahl an Hilfsvariablen, die von l und s unabhängig sind, beträgt der Speicherplatz, der im Laufe des Verfahrens zur Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ notwendig ist, $O(2l)$ Einheiten. Dabei sind die l Schrittkosten t_i, $1 \leq i \leq l$, und die entsprechenden l Summen $\sum_{i=1}^{j} t_i$, $1 \leq j \leq l$, zu speichern.

Im Vergleich mit dem Kostenaufwand des Verfahrens zur Aufstellung des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t}_\mathbf{l}, s)$ für eine Folge von l physikalischen Schrit-

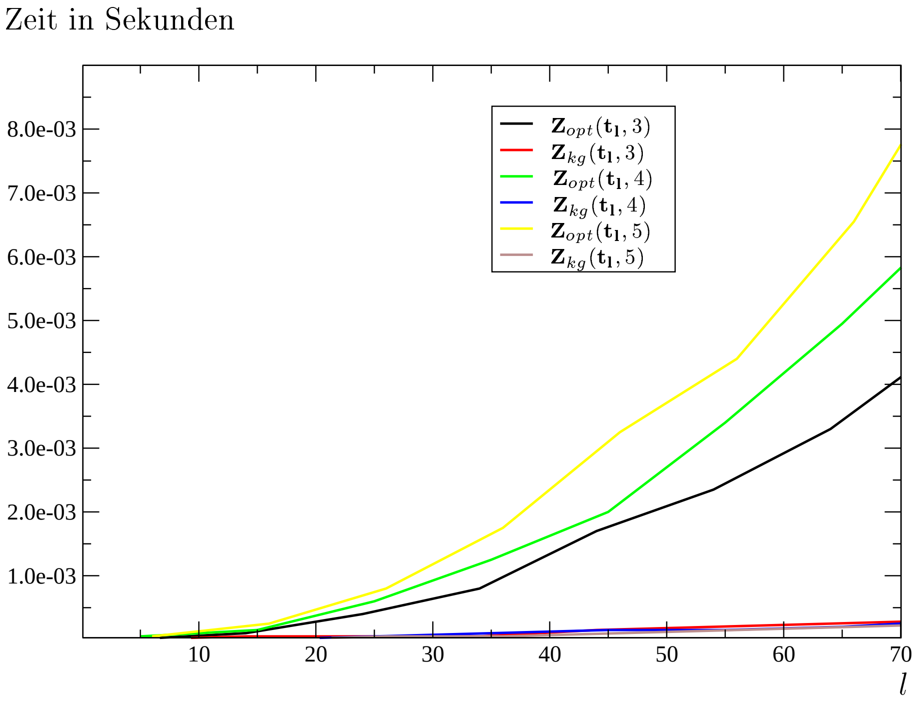

Abbildung 4.15: Aufstellungszeiten

ten mit nicht uniformen Kosten, der $O(sl^2)$ arithmetische Operationen beträgt (siehe [Wal99]), sind die Ausführungskosten $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t_1}, s))$ des untersuchten Algorithmus wesentlich geringer (vgl. Gleichung (4.15)).

Das gleiche Ergebnis ist auf den Speicherplatzbedarf zu übertragen, der bei der Ausführung des vorgestellten Algorithmus notwendig ist. Für die Ausführung des Verfahrens zur Aufstellung des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_1}, s)$ beträgt der Speicherplatzbedarf $O(sl^2)$ Einheiten. Bei der Ausführung des Algorithmus zur Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_1}, s)$ wird er zu $O(2l)$ Einheiten reduziert.

4.5 Interpretation der Umkehrschemata als binäre Suchbäume

Die in [Knu98] diskutierten Algorithmen zur Konstruktion optimaler Suchbäume werden auf die Konstruktion der optimalen Umkehrschemata übertragen.

Sofern die in [Knu98] angesprochene Monotonieeigenschaft ausgenutzt wird, lässt sich der Kostenaufwand zur Aufstellung der optimalen Umkehrschemata für nicht uniforme Probleme von $O(sl^3)$ auf $O(sl^2)$ reduzieren. Dieser Ansatz ist bereits implementiert worden (siehe [Wal99]).

Im Rahmen dieser Arbeit soll das Verfahren zur kostengünstigen Aufstellung von Umkehrschemata untersucht worden, wobei nahezu optimale Suchbäume herangezogen werden. Der Algorithmus zur Aufstellung der optimal-ähnlichen Suchbäume ist in [Mehl84] vorgeschlagen worden. Gemäß dieser Literaturquelle wird der Kostenaufwand zur Aufstellung derartiger Suchbäume von $\mathcal{O}(n^3)$ auf $\mathcal{O}(n)$ reduziert, wobei n die Größe der Knotenmenge in diesem Fall bezeichnet.

Bei der Implementierung des Algorithmus zur kostengünstigen Aufstellung von Umkehrschemata auf der Basis der optimal-ähnlichen Suchbäume wird eine Schrittfolge mit l physikalischen Schritten und $\mathbf{t_l}$ Schrittkosten als eine Menge von $(l+1)$ Knoten und l gewichteten Kanten betrachtet. Jeder Knoten entspricht einem Zwischenzustand und jede Kante einem physikalischen Schritt mit den entsprechenden Kosten. Jeder Kante i, $1 \leq i \leq l$, werden die Kosten t_i des Schrittes F_i zugewiesen. Die Kosten der Kanten werden bei der Aufstellung des Baums bzw. des Umkehrschemas berücksichtigt.

Gemäß der Aufteilung (Kapitel 3.1) wird ein Umkehrschema mit jedem Checkpoint in jeweils zwei Teile zerlegt, was dem Grundprinzip eines binären Baums entspricht. Die Bestimmung des Knotens, der der Wurzel des entsprechenden Teils des Baums zugeordnet wird, bzw. der Nummer des als Checkpoint gespeicherten Zwischenzustandes ist gemäß dem Algorithmus in [Mehl84] vorzunehmen. Dabei werden die Kosten der Kanten bzw. die Kosten der physikalischen Schritte betrachtet. Das Beispiel in der Abb. 4.16 verdeutlicht die Bestimmung der Nummer des Zwischenzustandes.

Es wird eine Folge von 6 physikalischen Schritten mit den Schrittkosten $\mathbf{t_l} = \langle 2, 2, 5, 5, 3, 3 \rangle$ betrachtet, wobei 2 Checkpoints zur Verfügung stehen. Als erstes wird der Anfangszustand durch die Aktion R_0 aus dem ersten Checkpoint eingelesen. Danach wird unter Verwendung von Satz 3.4 die Nummer $\check{l}_2$ des in dem zweiten Checkpoint gespeicherten Zwischenzustandes ermittelt, wobei ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(6,2)$ zugrunde gelegt wird. Für $l = 6$ beträgt der Wert $\check{l}_2 = 3$. Damit wird die Aufteilung der gesamten Länge $l = 6$ durch den zweiten Checkpoint bestimmt, hier ergibt sich eine Aufteilung von $\frac{\check{l}_2}{l} = \frac{3}{6}$. Anschließend wird unter Berücksichtigung der nicht uniformen Kosten die Nummer i des Zwischenzustandes bestimmt,

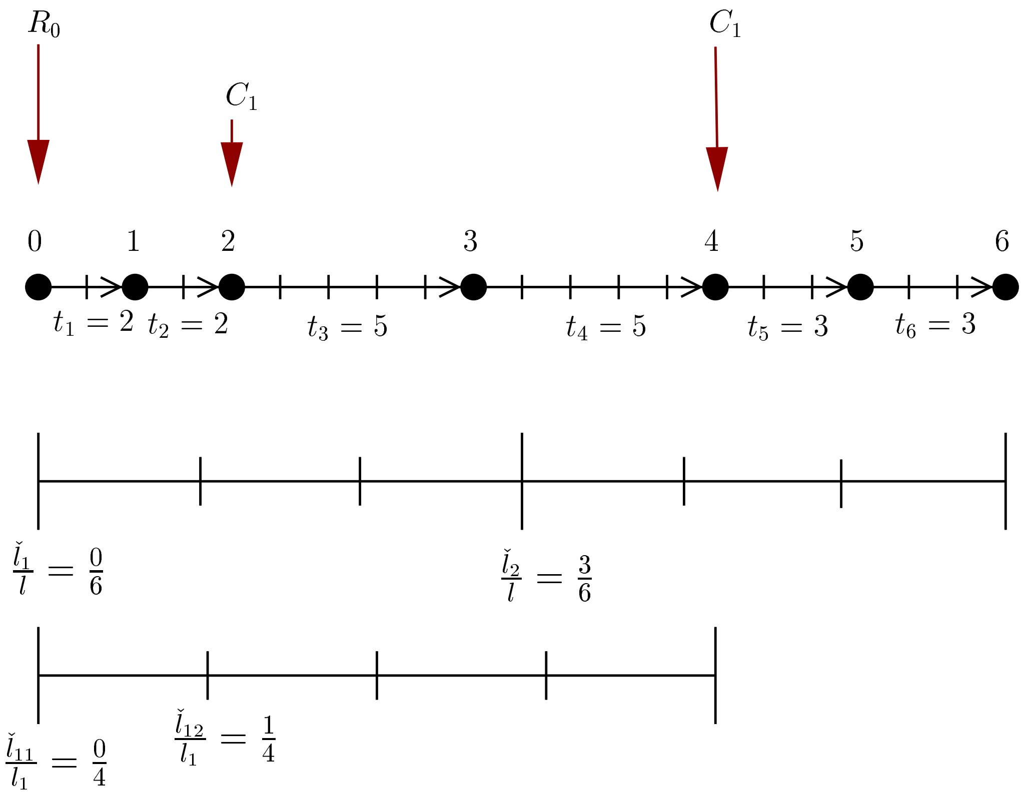

Abbildung 4.16: Binäre Aufteilung

für den folgendes gilt:

$$\frac{\sum_{k=1}^{i} t_k}{\sum_{k=1}^{l} t_k} \geq \frac{\check{l}_2}{l} = \frac{3}{6} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\sum_{k=1}^{i-1} t_k}{\sum_{k=1}^{l} t_k} < \frac{\check{l}_2}{l} = \frac{3}{6}. \tag{4.16}$$

In diesem Fall ist damit $i = 4$ zu setzen. Dementsprechend werden vier physikalische Schritte F_1, F_2, F_3 und F_4 ausgeführt und der $4-$te Zwischenzustand in dem zweiten Checkpoint gespeichert. Danach werden die physikalischen Schritte F_6 und F_5 umgekehrt. Anschließend wird die Nummer i für die Teilfolge mit $l = 4$, $s = 2$ und $\mathbf{t_l} = \langle 2, 2, 5, 5\rangle$ mit dem gleichen Prinzip bestimmt. Es ergibt sich $i = 2$. Das daraus resultierende gesamte Umkehrschema $S_{b_1}(\mathbf{t_l}, 2)$ ist in der Abb. 4.17 dargestellt.

Dieses Umkehrschema kann als ein binärer Baum betrachtet werden, der in der Abb. 4.18 dargestellt ist.

Die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{b_1}(\mathbf{t_l}, s))$ des Umkehrschemas $S_{b_1}(\mathbf{t_l}, s)$ entsprechen der Summe der Kosten aller Kanten des zu diesem Schema gehören-

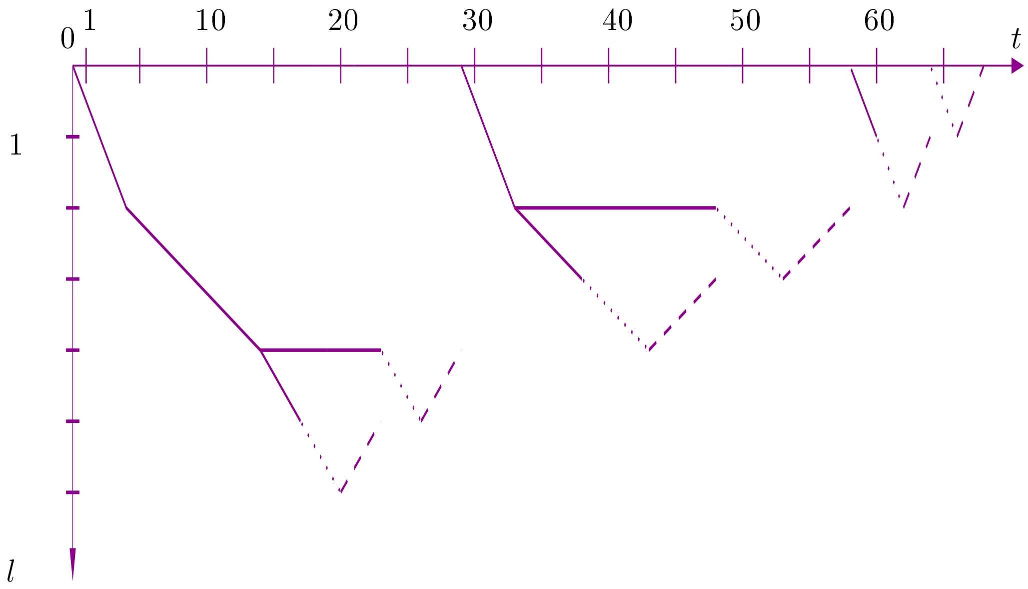

Abbildung 4.17: Das Umkehrschema $S_{b_1}(\mathbf{t_l}, 2)$

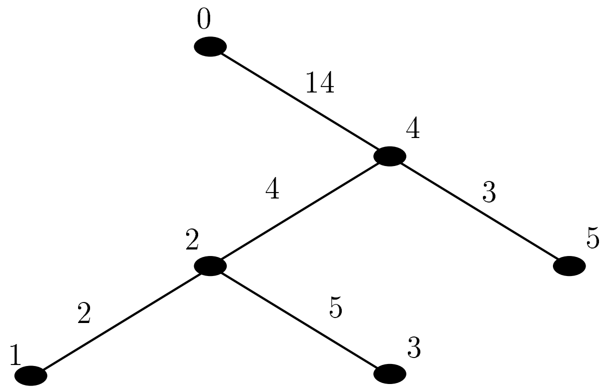

Abbildung 4.18: Darstellung des Umkehrschemas $S_{b_1}(\mathbf{t_l}, 2)$ als ein binärer Baum

den Baums. Für das Beispiel in der Abb. 4.18 betragen die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{b_1}(\mathbf{t_l}, 2)) = 28$.
Der formale Algorithmus zur Aufstellung derartiger Bäume lautet folgendermaßen:

$\mathbf{t_{b_0+1,l_0}} = \langle t_{b_0+1}, ..., t_{l_0} \rangle;$
$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{b_1}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) = 0;$
$b := b_0; \qquad e := l_0; \qquad c = s;$
$\mathbf{Baum}(\mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{c})$
<u>**begin**</u>
  <u>**if**</u> $((e - b > c) \wedge (c > 1))$
    $finde \qquad k:$

$$\frac{\sum\limits_{i=b+1}^{k} t_i}{\sum\limits_{i=b+1}^{e} t_i} \geq \frac{\check{l}}{e-b} \qquad und \qquad \frac{\sum\limits_{i=b+1}^{k-1} t_i}{\sum\limits_{i=1}^{e} t_i} < \frac{\check{l}}{e-b},$$

    wobei $\check{l}$ *mit dem Satz*3.4 *fur* $l = e - b$ *und* $s = c$ *zu bestimmen ist.*
    speichere $k -$ *ten Zwischenzustand in den zweiten Checkpoint*;

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{b_1}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) += \sum_{i=b+1}^{k} t_i;$$

    $\mathbf{Baum}(\mathbf{b}, \mathbf{k}, \mathbf{c});$
    $\mathbf{Baum}(\mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{c - 1});$
    *Konstruktionsbeispiel siehe Abb.*4.19
  <u>**fi**</u>;
  <u>**if**</u> $(e - b \leq c)$

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{b_1}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, s)) += \sum_{i=b+1}^{e-1} t_i;$$

    *Konstruktionsbeispiel siehe Abb.*4.20
  <u>**fi**</u>;
  <u>**if**</u> $(c = 1)$

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{b_0+1,l_0}}, S_{b_1}(\mathbf{t_l}, s)) += \sum_{j=b+1}^{e} (e - j) t_j;$$

    *Konstruktionsbeispiel siehe Abb.*4.21
  <u>**fi**</u>;
<u>**end**</u>

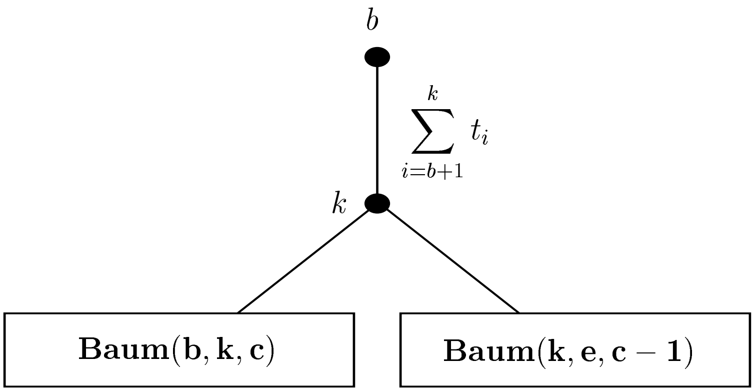

Abbildung 4.19: Konstruktion des Suchbaums: Abschnitt A

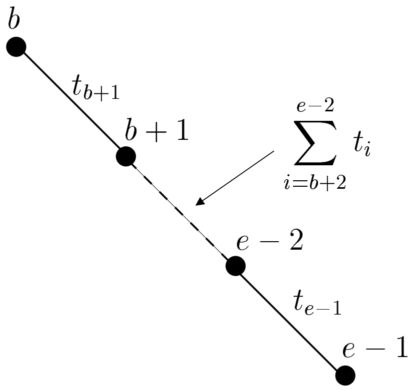

Abbildung 4.20: Konstruktion des Suchbaums: Abschnitt B

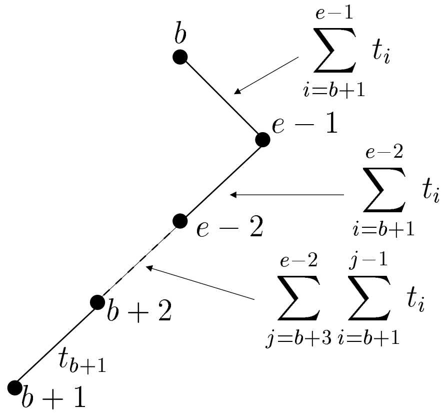

Abbildung 4.21: Konstruktion des Suchbaums: Abschnitt C

Aufgrundessen, dass nur eine begrenzte Anzahl an Checkpoints zur Verfügung steht, sind der binären Aufteilung des Umkehrschemas Grenzen gesetzt, was bei dem Originalalgorithmus in [Mehl84] nicht der Fall ist. Deshalb können die Lösungen, die mit dem oben beschriebenen Verfahren konstruiert worden sind, mit den Lösungen des Originalalgorithmus nicht übereinstimmen. Des weiteren gelten auch die Aussagen bezüglich der Lösungen des Ausgangsverfahrens nicht zwangsläufig für die Ausführungskosten der mit dem oben beschriebenen Verfahren aufgestellten Umkehrschemata.

Aufgrunddessen weichen die Ausführungskosten dieser Umkehrschemata teilweise gravierend von den optimalen Kosten ab. Ein Beispiel ist in der Abb. 4.22 dargestellt. Dabei werden die Umkehrschemata für Folgen von l, $0 \leq l \leq 100$, physikalischen Schritten unter Verwendung des Suchbaums aufgestellt. 3 Checkpoints stehen zur Verfügung. Die Schrittkostenverteilung ist in der Abbildung mit angegeben.

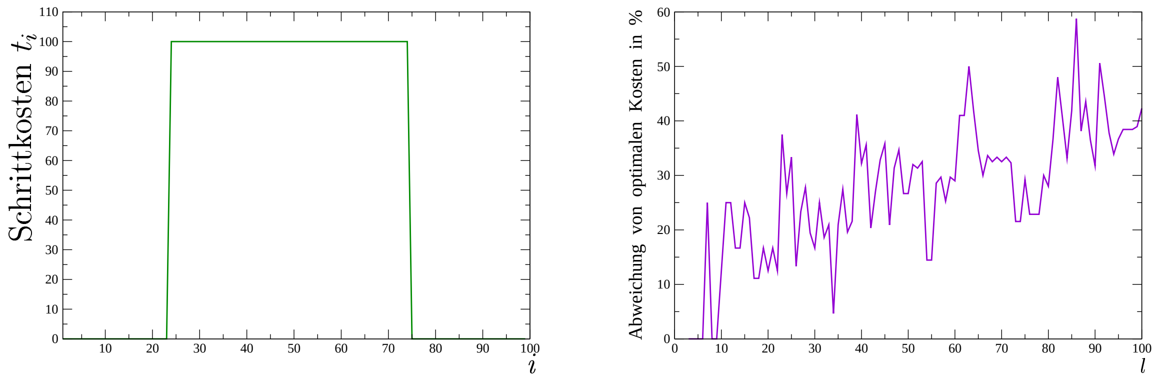

Abbildung 4.22: Abweichung von den optimalen Ausführungskosten

Eine wesentliche Rolle dabei spielt auch die Tatsache, dass bei der Aufteilung der Umkehrschemata nur die entsprechende Kostensumme beachtet wird, jedoch nicht die Anzahl der physikalischen Schritte, die den Kostenaufwand verursachen. Die Konsequenz daraus ist die, dass die Auswahl des als Checkpoint gespeicherten Zustandes von zwei Faktoren abhängen muß: der Schrittkostenverteilung und der Anzahl der physikalischen Schritte. Bei den Untersuchungen im Kapitel 4.1-4.4 wurde das berücksichtigt.

Eine andere Möglichkeit die Erstellungskosten des Umkehrschemas für nicht uniforme Probleme zu reduzieren, ist die, den physikalischen Schritt mit minimalen Kosten als eine Einheit zu betrachten. Demzufolge wird die Anzahl der physikalischen Schritte auf der Basis der geringsten Kosten entsprechend neu berechnet. Dann wird die Nummer $\check{l}$ für die neu berechnete Anzahl an physikalischen Schritten gemäß Satz 3.4 bestimmt. Anschließend ist daraus die Nummer des Zwischenzustandes in der Ausgangsfolge zu berechnen. Dieser Zwischenzustand wird dann in einem Checkpoint abgespeichert.

Dabei werden die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{b_2}(\mathbf{t}_1, s))$ des derartig auf der Basis von Suchbäumen aufgestellten Umkehrschemas $S_{b_2}(\mathbf{t}_1, s)$ jedoch nicht geringer als die Ausfuhrungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{b_1}(\mathbf{t}_1, s))$ des Schemas $S_{b_1}(\mathbf{t}_1, s)$, das am Anfang dieses Kapitels untersucht worden ist. Dementsprechend wird auf dieses Verfahren im folgenden nicht näher eingegangen.

Kapitel 5

Adaptive Berechnung von Umkehrschemata

Im Rahmen dieses Kapitels wird eine Evolution F betrachtet, die sich in einzelne physikalische Schritte aufteilen lässt, wobei die Anzahl von Zwischenzuständen, die bei der Ausführung von F berechnet werden, zu dem Zeitpunkt, als das Berechnungsprogramm für F gestartet wird, jedoch unbekannt ist. Das stellt eine besondere Problematik dar, die bei den praktischen Anwendungen oft der Fall ist. Die Aufstellung von Umkehrschemata für derartige Folgen hat dabei adaptiv zu erfolgen. Dabei wird zwischen uniformen und nicht uniformen Schrittkosten unterschieden. Es werden mit $S_{adapt}(l, s)$ und mit $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ Umkehrschemata bei nicht bekannter Anzahl l von Zwischenzuständen bzw. physikalischen Schritten bezeichnet, wobei einerseits uniforme und andererseits nicht uniforme Schrittkosten $\mathbf{t_l} = \langle t_1, t_2, ...t_l \rangle$ zugrunde gelegt werden.
In diesem Kapitel wird ein Prinzip hergeleitet, mit dessen Hilfe die Umkehrschemata $S_{adapt}(l, s)$ bzw. $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ aufgestellt werden können.
Die Ausführungskosten für diese Umkehrschemata werden mit $\mathbf{T}(S_{adapt}(l, s))$ bzw. mit $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$ erfasst. In der Abb. 5.1 ist die Klassifizierung der adaptiven Umkehrschemata graphisch dargestellt.

5.1 Beispiele für mögliche adaptiven Umkehrschemata

Bevor die Verfahren für die Aufstellung des Umkehrschemas $S_{adapt}(l, s)$ bzw. des Schemas $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ hergeleitet werden, sind verschiedene mögliche Ansätze zur Lösung derartiger Probleme zu untersuchen.

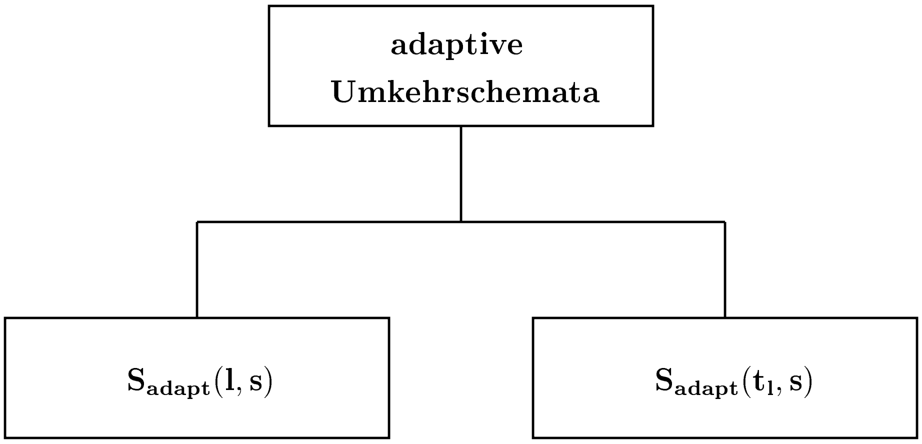

Abbildung 5.1: Klassifizierung der adaptiven Umkehrschemata

5.1.1 Übergang zum Fall mit bekannter Folgenlänge l

Die einfachste Herangehensweise bei der Behandlung von solchen Problemen mit unbekannter Anzahl der physikalischen Schritte ist es, zunächst die Funktion F ohne Speichern der Zwischenzustände in die Checkpoints zu berechnen, um die Anzahl von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, festzustellen. Wenn die gesamte Anzahl der Zwischenzustände ermittelt worden ist, kann diese Folge von physikalischen Schritten dann mit dem binomialen Umkehrschema $S_{bin}(l, s)$ bei uniformen Kosten oder mit dem optimalen Umkehrschema $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ bei nicht uniformen Kosten umgekehrt werden.

Der Kostenaufwand zur Bestimmung der Schrittanzahl entspricht der Summe $\sum_{i=1}^{(l-1)} t_i$ an Kosten aller physikalischen Schritte $F_i, 1 \leq i \leq l-1$. Bei der Bestimmung des zusätzlichen Kostenaufwandes für die Abarbeitung der derartig aufgestellten Umkehrschemata $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ oder $\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ ist jedoch zu berücksichtigen, dass ein physikalischer Schritt nach einem Gesamtdurchlauf von F bereits umgekehrt wird, so dass sich der zusätzliche Kostenaufwand zu $(l-1) - \mathbf{T}_{min}(l, s) + \mathbf{T}_{min}(l-1, s)$ oder zu $\sum_{i=1}^{(l-1)} t_i - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) + \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_{l-1}}, s)$ ergibt. Diese zusätzlichen Ausführungskosten entstehen bei der Bestimmung der gesamten Anzahl an physikalischen Schritten.

Die folgende Abb. 5.2 stellt ein Beispiel für das Umkehrschema $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ dar, das nach dem oben beschriebenen Prinzip aufgestellt ist. Dabei wird eine Folge von 11 physikalischen Schritten mit uniformen Schrittkosten und 3 Checkpoints betrachtet.

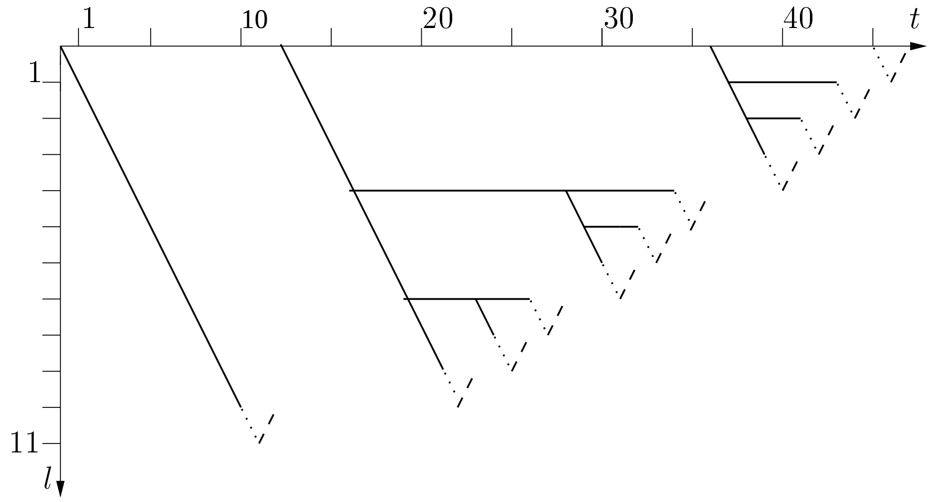

Abbildung 5.2: Umkehrschema $\widetilde{S}_{adapt}(11, 3)$

Die gesamte Anzahl der physikalischen Schritte ist zunächst bei der Abarbeitung des Umkehrschemas $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ festzustellen. In der Abb. 5.2 wird dieser Vorgang mit der schräg durchgezogenen Linie am Anfang des Umkehrschemas $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ dargestellt. Dabei werden die physikalischen Schritte F_i, $1 \leq i \leq 10$, jeweils einmal ausgeführt. Weiterhin wird der letzte elfte physikalische Schritt gleich umgekehrt. Der restliche Teil des Umkehrschemas $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ stimmt mit dem binomialen Umkehrschema $S_{bin}(10, 3)$ überein.
Des weiteren unterscheiden sich die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(11, 3))$ und $\mathbf{T}_{min}(10, 3)$ der beiden Umkehrschemata $\widetilde{S}_{adapt}(11, 3)$ bzw. $S_{bin}(10, 3)$ aufgrund der unterschiedlichen Anzahl der zu berücksichtigenden physikalischen Schritte, die umzukehren sind, da die Umkehrung eines Schrittes bei $\widetilde{S}_{adapt}(11, 3)$ bereits im voraus ausgeführt wird. Formelmäßig wird es folgendermaßen ausgedrückt:

$$\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(l, s)) = \mathbf{T}_{min}(l - 1, s) + (l - 1). \tag{5.1}$$

Bei der Behandlung derartiger Probleme unter Berücksichtigung der nicht uniformen Schrittkosten $\mathbf{t_l}$ bzw. bei der Aufstellung des Umkehrschemas $\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ wird ähnlich, wie bei der Aufstellung von $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$, zunächst die gesamte Anzahl der umzukehrenden physikalischen Schritte festgestellt. Danach wird der letzte $l-$te physikalische Schritt umgekehrt. Der restliche Verlauf des Umkehrschemas $\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ stimmt mit der Abarbeitung des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_{l-1}}, s)$ für $(l-1)$ physikalische Schritte bei nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_{l-1}} = \langle t_1, ..., t_{l-1}\rangle$ überein. Dementsprechend werden die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, \widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$ des Schemas $\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ berechnet:

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, \widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)) = \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_{l-1}}, s) + \sum_{i=1}^{(l-1)} t_i. \tag{5.2}$$

5.1.2 Verbesserung der Checkpointverteilung

Um die Ausführungskosten der adaptiven Umkehrschemata sowohl bei uniformen als auch bei nicht uniformen Schrittkosten zu reduzieren, ist es erforderlich, eine günstige Auswahl an Zwischenzuständen bei der Ausführung von F zu speichern. Des weiteren sollen zu dem Zeitpunkt, wenn die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten bekannt ist, bereits alle Checkpoints belegt sein. Demzufolge sind alle weiteren Aktionen zur Umkehrung der Folge von physikalischen Schritten nicht von dem Anfangszustand, sondern von dem im letzten Checkpoint gespeicherten Zwischenzustand zu starten. Die Kosten des aufgestellten Umkehrschemas hängen wesentlich davon ab, welche Zwischenzustände zu dem Zeitpunkt, wenn die gesamte Anzahl der physikalischen Schritte ermittelt worden ist, in die Checkpoints gespeichert sind. Ein möglicher Ansatz zur optimalen Auswahl der Checkpoints wird im weiteren erläutert.

Da für den Fall mit bekannter Anzahl von physikalischen Schritten bereits entsprechende optimale Umkehrschemata festgelegt worden sind, ist es erforderlich, dass zum Zeitpunkt, wenn die Anzahl von physikalischen Schritten bekannt ist, die Checkpointverteilung bzw. die dort gespeicherten Zwischenzustände mit denen übereinstimmen, die bei bekannter Anzahl von physikalischen Schritten zu demselben Zeitpunkt gespeichert werden. Es ist also zunächst eine feste Anzahl an physikalischen Schritten anzunehmen, wobei die zu jedem Zeitpunkt bekannte Anzahl an Schritten einzusetzten ist. Dabei ergibt sich eine Möglichkeit zur Verbesserung der Checkpointverteilung mit anschließender Minimierung der Ausführungskosten, worauf später noch einmal eingegangen wird.

Ein Beispiel für ein Umkehrschema $\widehat{S}_{adapt}(l, s)$ für eine Folge an physikalischen Schritten, wobei ihre gesamte Anzahl unbekannt ist, ist in der Abb. 5.3 dargestellt. Dabei wird das oben beschriebene Prinzip der Verbesserung der Checkpointverteilung angewendet. Beispielhaft wird eine Folge mit insgesamt 10 physikalischen Schritten betrachtet, die umgekehrt werden sollen, wobei 3 Checkpoints zu jedem Zeitpunkt gespeichert werden können. Die Anzahl von 10 physikalischen Schritten soll zunächst aber unbekannt sein.

Alle physikalischen Schritte haben uniforme Schrittkosten. Für jede Anzahl an physikalischen Schritten l^*, $1 \leq l^* \leq 10$, stimmen die Nummern der Zustände, die in den Checkpoints gespeichert sind, mit den Nummern der Zustände, die bei einem binomialen Umkehrschema $S_{bin}(l^*, s)$ für eine entsprechende Anzahl an physikalischen Schritten l^* zu speichern sind, überein.

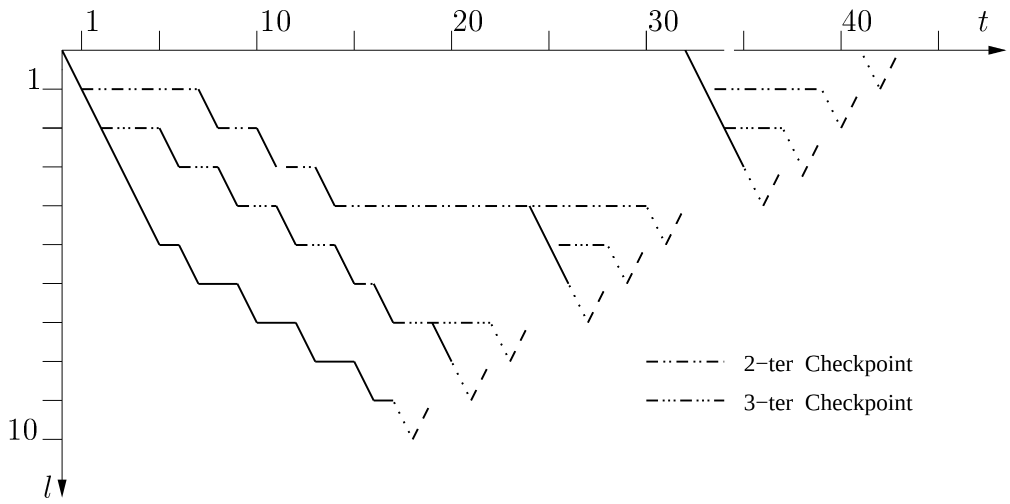

Abbildung 5.3: Umkehrschema $\widehat{S}_{adapt}(10, 3)$

Zunächst wird der Anfangszustand in den ersten Checkpoint gespeichert. Danach werden zwei physikalische Schritte ausgeführt, wobei der erste und der zweite Zwischenzustand in den zweiten bzw. dritten Checkpoint gespeichert werden. Im Anschluss daran werden noch 3 physikalische Schritte ausgeführt, wobei vor jedem durchgeführten Schritt mit Hilfe des Satzes 3.4 die Nummern $\check{l}_2^*$ und $\check{l}_3^*$ der Zwischenzustände berechnet werden, die in dem 2-ten bzw. 3-ten Checkpoint gespeichert werden sollen. Wenn die Anzahl l^* von physikalischen Schritten kleiner als 6 ist, sind die Nummern $\check{l}_2^*$ und $\check{l}_3^*$ gleich 1 bzw. 2. Da die Zwischenzustände 1 und 2 bereits gespeichert worden sind, braucht man keine Verbesserung der Checkpointverteilung für diese Anzahl von physikalischen Schritten durchzuführen. Für $l^* = 6$ ist die Nummer $\check{l}_3^* = 3$. Deshalb werden die Daten aus dem dritten Checkpoint gelesen, dann wird der dritte physikalische Schritt ausgeführt und anschließend der dritte Zwischenzustand in dem dritten Checkpoint abgespeichert. Anschließend wird der 6-te physikalische Schritt ausgeführt und für $l^* = 7$ werden den Größen $\check{l}_2^*$ und $\check{l}_3^*$ die Werte 2 und 4 zugewiesen. Um die Checkpointverteilung zu verbessern, liest man die Daten aus den letzten beiden Checkpoints, führt jeweils die Schritte 2 und 4 aus und speichert die ermittelten Zwischenzustände 2 und

4 in den zweiten bzw. dritten Checkpoint. Dieses Ablaufschema läuft nach diesem Prinzip solange ab, bis die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten bzw. Zwischenzuständen ermittelt worden ist. Somit stimmt der weitere Ablauf des Umkehrschemas mit dem Schemas $S_{bin}(10, 3)$ für die bekannte Anzahl an physikalischen Schritten überein (vgl. Abb. 2.2).
Der Kostenaufwand $\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l, s))$ für das nach diesem Prinzip aufgestellte Umkehrschema $\widehat{S}_{adapt}(l, s)$ wird folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l, s)) = \mathbf{T}_{min}(l, s) + \sum_{i=2}^{s} \big(\check{l}_i - (i-1)\big). \tag{5.3}$$

Bei den nicht uniformen Kosten gilt entsprechend folgendes:

$$\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)) = \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) + \sum_{i=2}^{s} \sum_{j=i}^{\check{l}_i} t_i. \tag{5.4}$$

In beiden Formeln wird mit $\check{l}_i$ die Nummer des in dem i-ten Checkpoint gespeicherten Zwischenzustandes bezeichnet. Die Werte $\check{l}_i$, $2 \leq i \leq s$, die in den Gleichungen (5.3) und (5.4) enthalten und zu berücksichtigen sind, werden gemäß Satz 3.4 für die gesamte Anzahl l der physikalischen Schritte berechnet.
Somit werden die Kosten für die Abarbeitung der Umkehrschemata $\widehat{S}_{adapt}(l, s)$ und $\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ erfasst. Dabei sollte berücksichtigt werden, dass bei der Aufstellung der jeweiligen Schemata $\widehat{S}_{adapt}(l, s)$ bzw. $\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ ein erheblicher Kostenaufwand entstehen kann, und zwar bei der Bestimmung der Werte $\check{l}_i^*$, $2 \leq i \leq s$, für $0 \leq l^* \leq l$. Ein erheblicher Kostenaufwand entsteht allerdings bei der Aufstellung des Umkehrschemas $\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ unter Berücksichtigung nicht uniformer Schrittkosten $\mathbf{t_l}$.
Folgende Abbildung 5.4 stellt den Vergleich zwischen den Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(l, s)$, $\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(l, s))$ und $\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l, s))$ der Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$, $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ bzw. $\widehat{S}_{adapt}(l, s)$ dar. Dabei werden die Folgen von l physikalischen Schritten ($l \leq 100$) betrachtet, wobei 5 Checkpoints zu jedem Zeitpunkt gespeichert werden können. Alle physikalischen Schritte in diesem Beispiel haben uniforme Kosten.
Die Kosten $\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(l, s))$ und $\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l, s))$ sind gemäß Beziehung (5.1) bzw. (5.3) zu berechnen. Wie es aus den Gleichungen (5.1) und (5.3) ersichtlich wird, ergibt sich bei der Abarbeitung des Umkehrschemas $\widehat{S}_{adapt}(l, s)$ insbesondere bei großen Schrittzahl einer höhere Kostenaufwand im Vergleich zu dem Aufwand für Abarbeitung des Schemas $\widetilde{S}_{adapt}(l, s)$ bei gleicher Anzahl an physikalischen Schritte.

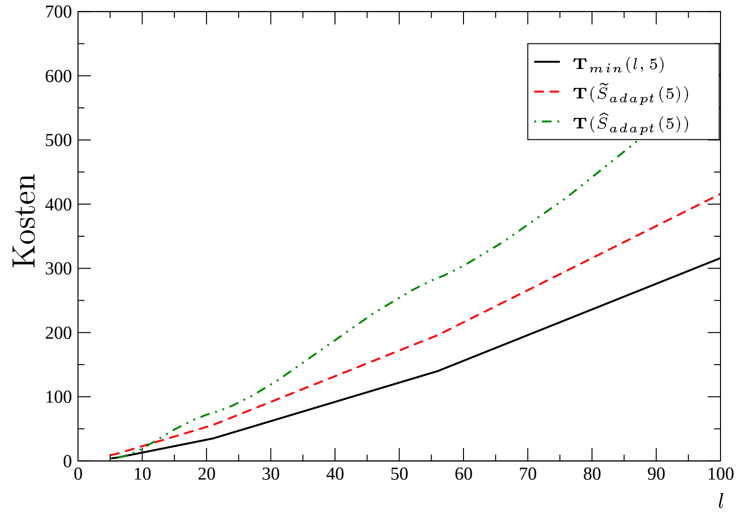

Abbildung 5.4: Vergleich der Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(l,5)$, $\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(l,5))$ und $\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l,5))$

Sowohl die Kosten $\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(l,s))$ als auch die Kosten $\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l,s))$ unterscheiden sich sehr stark von optimalen Kosten $\mathbf{T}_{min}(l,s)$. Demzufolge können diese Prinzipien zur Aufstellung der Umkehrschemata $\widetilde{S}_{adapt}(l,s)$ und $\widehat{S}_{adapt}(l,s)$ nicht angewendet werden. Auf ihren Grundlagen aufbauend soll in dieser Arbeit eine verbesserte Verfahrensweise hergeleitet werden. Deshalb ist es erforderlich, diese detailliert zu erfassen.

5.2 Allgemeines Prinzip zur Konstruktion von adaptiven Umkehrschemata

Bei den im Kapitel 5.1 beschriebenen Verfahren, sowohl zur Aufstellung der Umkehrschemata $\widetilde{S}_{adapt}(l,s)$, $\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t}_1,s)$ als auch der Schemata $\widehat{S}_{adapt}(l,s)$, $\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t}_1,s)$, ist ein zusätzlicher Kostenaufwand erforderlich, um die Checkpointverteilung dieser Umkehrschemata mit der des binomialen Schemas $S_{bin}(l,s)$ oder des optimalen Schemas $S_{opt}(\mathbf{t}_1,s)$ zu jedem Zeitpunkt in Übereinstimmung zu bringen. Damit ergibt sich ein zusätzlicher Kostenaufwand gemäß (5.1) – (5.4) zur Bestimmung der Anzahl der Schritte im Rahmen der Abarbeitung der Schemata $\widetilde{S}_{adapt}(l,s)$, $\widetilde{S}_{adapt}(\mathbf{t}_1,s)$ bzw. $\widehat{S}_{adapt}(l,s)$, $\widehat{S}_{adapt}(\mathbf{t}_1,s)$.

Im folgenden wird ein neues Verfahren zur Aufstellung der adaptiven Umkehrschemata beschrieben. Dabei wird davon ausgegangen, dass bei der Konstruktion dieses Verfahrens folgende Eigenschaften zu berücksichtigen sind:

- Die Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l, s))$ und $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$ für die Abarbeitung der adaptiven Schemata $S_{adapt}(l, s)$ bzw. $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ sind zu minimieren
- Bei der Aufstellung des adaptiven Schemas ist der Kostenaufwand zur Bestimmung der Checkpointverteilung gering zu halten
- Die Checkpointverteilung des adaptiven Schemas $S_{adapt}(l, s)$ oder $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ soll nicht zwangsläufig mit der optimalen Checkpointverteilung des Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$ oder $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ übereinstimmen
- Bei der Abarbeitung des aufgestellten adaptiven Schemas wird keine Verbesserung der Checkpointverteilung bzw. keine 'Verschiebung' der Checkpoints vorgenommen, die eine zusätzliche Ausführung der physikalischen Schritte verursacht

Die Aufstellung des adaptiven Schemas wird in zwei Abschnitte unterteilt. Der erste Abschnitt beinhaltet den Fall, dass die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten noch nicht bekannt ist. Dieser Abschnitt wird mit der Bestimmung der Schrittzahl abgeschlossen. Zu diesem Zeitpunkt ist eine Checkpointverteilung festgelegt worden, die die Grundlage für den zweiten Abschnitt darstellt. Die zweite Phase beginnt damit, dass der letzte physikalische Schritt aus der Gesamtfolge umgekehrt wird und endet mit der Umkehrung des Anfangsschrittes.

5.3 Aufstellung von $S_{adapt}(l, s)$ und $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$

Bei der Aufstellung von $S_{adapt}(l, s)$ und $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ werden zunächst $F_1, ..., F_{s-1}$ physikalische Schritte ausgeführt, wobei die Zwischenzustände $i = 0, ..., i = s - 1$ in die s verfügbaren Checkpoints gespeichert werden.
Die Abb. 5.5 stellt ein Beispiel für diesen Abschnitt des Schemas $S_{adapt}(l, s)$ dar. Dabei sind 5 Checkpoints verfügbar. Zu dem Zeitpunkt $t = 5$ werden 4 physikalische Schritte ausgeführt und 5 Zwischenzustände $i = 0, ..., i = 4$ gespeichert.
Vor der Ausführung des jeweiligen Schrittes F_{l^*}, $1 \leq l^* \leq l$, wird angenommen, dass die Folge mindestens l^* physikalische Schritte enthält.

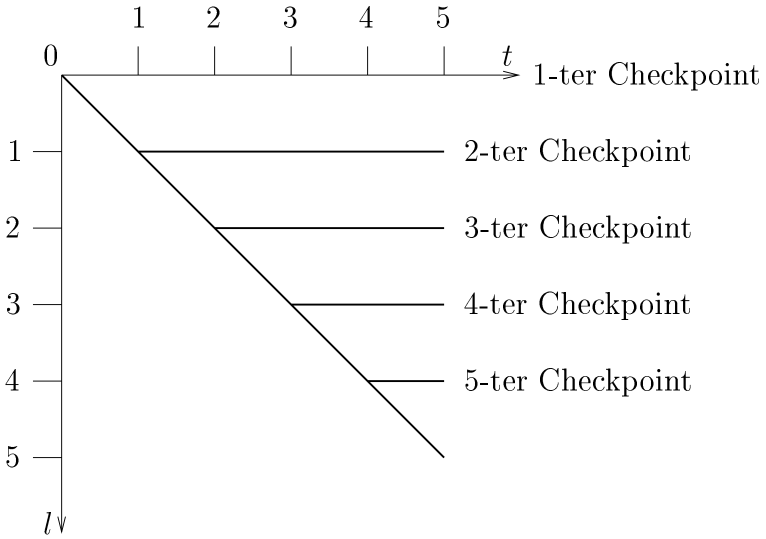

Abbildung 5.5: Ein Beispiel der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{adapt}(6, 5)$ zum Zeitpunkt $t = 5$

Solange die Anzahl der in den Checkpoints gespeicherten Zustände kleiner als die gesamte Anzahl s der Checkpoints ist, wird der aktuelle $(l^* - 1)$-te Zustand in den nächsten freien Checkpoint gespeichert.

Sobald alle verfügbaren Checkpoints belegt sind, ist zu überprüfen, ob die aktuelle Checkpointverteilung zu verändern ist. Dabei wird zunächst geprüft, ob die Ausführungskosten mit der neuen Verteilung kleiner als die Ausführungskosten mit der alten Verteilung sind. Eine Veränderung der Checkpointverteilung bedeutet, dass der Inhalt von einem belegten Checkpoint gelöscht wird und der $(l^* - 1)$-te Zwischenzustand in diesen Checkpoint abgespeichert wird.

Der Grund dafür besteht darin, dass für die Umkehrung der Schrittfolge $\left(F_{\check{l}_s^*+1}, ..., F_{l^*-1}\right)$ nur ein einziger, der s-te Checkpoint zur Verfügung steht. Wenn die Anzahl der $(l^* - 1 - \check{l}_s^*)$ letzten physikalischen Schritte relativ groß ist, werden die Kosten für die Umkehrung dieser Schritte mit einem Checkpoint entsprechend hoch sein, was sich auf die gesamten Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*, s))$ oder $\mathbf{T}(S_{adapt}(\mathbf{t}_{\mathbf{l}^*}, s))$ des Schemas $S_{adapt}(l^*, s)$ bzw. des Schemas $S_{adapt}(\mathbf{t}_{\mathbf{l}^*}, s)$ auswirkt. Wenn der letzte aktuelle $(l^* - 1)$-te Zwischenzustand in einem Checkpoint gespeichert wird, stehen für die Umkehrung der Folge $\left(F_{\check{l}_s^*+1}, ..., F_{l^*-1}\right)$ 2 Checkpoints zur Verfügung. Da alle s Checkpoints jedoch am Anfang belegt worden sind, ist der Inhalt eines Checkpoints zu löschen, damit er für das Speichern des $(l^* - 1)$-ten Zwischenzustandes benutzt werden kann.

Damit ist die Frage unmittelbar zu beantworten, unter welchen Bedingungen die Checkpointverteilung zu ändern ist, um die Kosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,s))$ oder $\mathbf{T}(S_{adapt}(\mathbf{t}_{\mathbf{l}^*},s))$ der adaptiven Umkehrschemata zu reduzieren. Um diese Bedingungen herzuleiten, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Folgen mit uniformen oder mit nicht uniformen Schrittkosten.

Dabei wird in den weiteren Abhandlungen mit einer Folge $\left(\check{l}_1^*,...,\check{l}_s^*\right)$ die Checkpointverteilung bezüglich der l^* physikalischen Schritte angegeben, wobei $\check{l}_i^*$, $1 \le i \le s$, die Nummer des in dem i-ten Checkpoint gespeicherten Zustandes ist.

5.3.1 Aufstellung von $S_{adapt}(l,s)$

Bei der Aufstellung des Schemas $S_{adapt}(l,s)$ werden $F_1,...,F_{l^*-1}$ physikalische Schritte ausgeführt, wobei momentan bekannt ist, dass die Folge mindestens l^* physikalische Schritte $(F_1,...,F_{l^*})$ mit uniformen Kosten enthält.

Es wird davon ausgegangen, dass die Unterfolgen

$$\left(F_{\check{l}_1^*+1},...,F_{\check{l}_2^*}\right),...,\left(F_{\check{l}_s^*+1},...,F_{l^*-1}\right)$$

mittels binomialen Umkehrschemata

$$S_{bin}(\check{l}_2^*-\check{l}_1^*,s),...,S_{bin}(l^*-1-\check{l}_s^*,s)$$

umgekehrt werden (Später in diesem Kapitel wird darauf näher eingegangen). Somit können die Ausführungkosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,s))$ bei der Checkpointverteilung $\left(\check{l}_1^*,...,\check{l}_s^*\right)$ folgendermaßen betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,s)) = \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{T}_{min}(\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*,s-j+1)+ \\ +\mathbf{T}_{min}(l^*-1-\check{l}_s^*,1)+(l^*-1)\end{aligned} \tag{5.5}$$

Gemäß (3.15) lässt sich der Ausdruck 5.5 wie folgt

(5.6)

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,s)) = \sum_{j=1}^{s-1}(r_{bin}(s-j+1,\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*)\cdot(\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*)- \\ -\beta(s-j+2,r_{bin}(s-j+1,\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*)-1))+ \\ +\left(r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*)\cdot(l^*-1-\check{l}_s^*)-\beta(2,r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*)-1)\right)+(l^*-1)\end{aligned}$$

umschreiben, wobei die $r_{bin}(s,l^*)$ aus der Beziehung (3.16) zu bestimmen sind.
Die Folge der letzten $(l^*-1-\check{l}_s^*)$ physikalischen Schritte ist somit mit einem einzigen Checkpoint umzukehren. Wenn der Inhalt von einem beliebigen Checkpoint $k, 2\leq k\leq s$, zu löschen ist, um anschließend den (l^*-1)-ten Zwischenzustand in dem k-ten Checkpoint zu speichern, wird die bisherige Checkpointverteilung dadurch folgendermaßen geändert.

$$(\check{l}_1^*,...,\check{l}_k^*,...,\check{l}_s^*) \quad \Rightarrow \quad (\check{l}_1^*,...,\check{l}_{k-1}^*,\check{l}_{k+1}^*,...,\check{l}_s^*,\check{l}_k^*=l^*-1) \quad \text{falls } 2\leq k\leq s-1$$

$$\left(\check{l}_1^*,...,\check{l}_s^*<l^*-1\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\check{l}_1^*,...,\check{l}_{s-1}^*,\check{l}_s^*=l^*-1\right) \quad \text{falls } k=s$$

Aufgrund der neuen Checkpointverteilung ergibt sich ein neues Umkehrschema für die Folge von l^* physikalischen Schritten. In diesem Fall werden die entsprechenden binomialen Umkehrschemata für die Unterfolgen

$$\left(F_{\check{l}_1^*+1},...,F_{\check{l}_2^*}\right),...,\left(F_{\check{l}_{k-2}^*+1},...,F_{\check{l}_{k-1}^*}\right),\left(F_{\check{l}_{k-1}^*+1},...,F_{\check{l}_{k+1}^*}\right),...,\left(F_{\check{l}_s^*+1},...,F_{l^*-1}\right),$$

falls $2\leq k\leq s-1$ und

$$\left(F_{\check{l}_1^*+1},...,F_{\check{l}_2^*}\right),...,\left(F_{\check{l}_{s-1}^*+1},...,F_{l^*-1}\right),$$

falls $k=s$ gemäß Satz 3.4 aufgestellt. Das Umkehrschema $S_{adapt}(l^*,s)$ mit seinen Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,s))$ ist dabei entsprechend zu modifizieren. Das neue Schema wird im folgenden mit $S_{k,adapt}(l^*,s)$ bezeichnet, und seine Ausführungskosten werden mit $\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*,s))$ erfasst. Gemäß den Beziehungen (5.5) und (5.6) kann der Kostenaufwand $\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*,s))$ folgendermaßen betrachtet werden:
falls $2\leq k\leq s-1$

$$\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*,s))=\sum_{j=1}^{k-2}\mathbf{T}_{min}(\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*,s-j+1)+\mathbf{T}_{min}(\check{l}_{k+1}^*-\check{l}_{k-1}^*,s-k+2)+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{s-1}\mathbf{T}_{min}(\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*,s-j+2)+\mathbf{T}_{min}(\check{l}_k^*-\check{l}_s^*,2)+(l^*-1)$$

und falls $k=s$

$$\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*,s))=\sum_{j=1}^{s-1}\mathbf{T}_{min}(\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*,s-j+1)+(l^*-1).$$

Sofern ein Index $k,\ 2 \leq k \leq s$, existiert, für den folgendes gilt:

$$\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*, s)) < \mathbf{T}(S_{adapt}(l^*, s)), \tag{5.7}$$

wird der k-te Checkpoint zur Umverteilung herangezogen. Falls die Beziehung (5.7) nicht nur für einen Index k, sondern für mehrere $k^{'},\ 2 \leq k^{'} \leq s$, gilt, dann ist der Index k zu wählen, für den gilt:

(5.8)
$$\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*, s)) = \min_{2 \leq k^{'} \leq s} \left\{ \mathbf{T}(S_{k^{'},adapt}(l^*, s)),\ \mathbf{T}(S_{k^{'},adapt}(l^*, s)) < \mathbf{T}(S_{adapt}(l^*, s)) \right\}.$$

Nachdem der k-te Checkpoint ausgewählt und dessen Inhalt gelöscht worden ist, wird der (l^*-1)-te Zwischenzustand in den freien Checkpoint gespeichert. Die Checkpoints $(1, ..., s)$ werden neu nummeriert, so dass folgendes gilt:

$$\check{l}_i^* < \check{l}_{i+1}^*, \qquad 1 \leq i \leq s-1 \tag{5.9}$$

Das entstehende Umkehrschema $S_{k,adapt}(l^*, s)$ wird im weiteren mit $S_{adapt}(l^*, s)$ bezeichnet.
Mit den Formeln (5.7) und (5.8) sind die Bedingungen für den Austausch eines Checkpoints gegeben. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, ist eine Checkpointumverteilung nicht erforderlich.
Danach wird überprüft, ob der Schritt F_{l^*} den letzten in der Gesamtfolge von l physikalischen Schritten darstellt. Falls $l^* = l$ ist, wird mit der Umkehrung der Schrittfolge begonnen, wobei der letzte $l-$te physikalische Schritt zuerst umgekehrt wird. Falls $l^* < l$ ist, wird der l^*-te physikalische Schritt ausgeführt, und für die neue Anzahl der physikalischen Schritte werden die oben eingeführten Bedingungen geprüft.
Die Bedingungen (5.7) und (5.8) sind somit für jeden physikalischen Schritt $F_{l^*},\ (s+1) \leq l^* < l$, zu prüfen. Damit wird der erste Teil zur Konstruktion des Umkehrschemas $S_{adapt}(l, s)$ ausgeführt, indem unter veränderlichen Bedingungen die Checkpointverteilung mehrmals geprüft und gegebenenfalls geändert.
Die Abbildung 5.6 stellt ein Beispiel für die Konstruktion des Umkehrschemas $S_{adapt}(l, s)$ dar. Dabei ist die gesamte Anzahl l von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, 24. Zu jedem Zeitpunkt stehen 4 Checkpoints zur Verfügung.

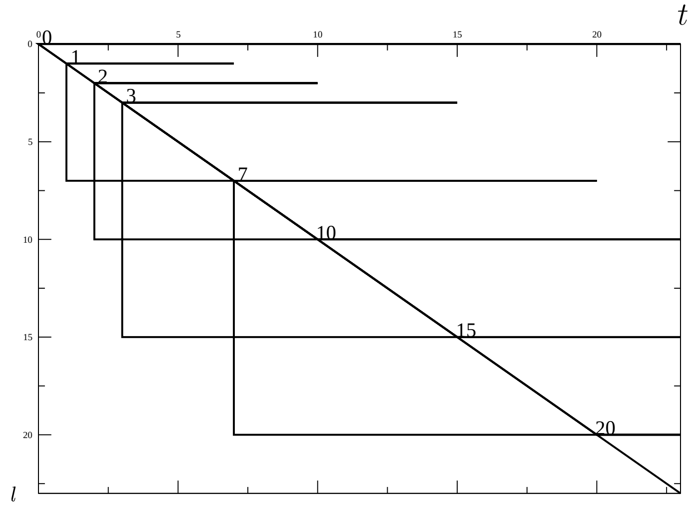

Abbildung 5.6: Beispiel zur Aufstellung von $S_{adapt}(24, 4)$ zum Zeitpunkt $t = 23$

Die durchgezogene schräge Linie in der Abb. 5.6 stellt die Abarbeitung der physikalischen Schritte dar. Die horizontalen Linien, die rechts von dieser Linie liegen, geben die Checkpoints an, in denen die entsprechenden Zwischenzustände gespeichert sind. Die vertikalen und horizontalen Linien links von der Linie der abgearbeiteten physikalischen Schritte zeigen, welcher Checkpointinhalt gelöscht wird bzw. welcher Zwischenzustand in den freien Checkpoint gespeichert wird.
Am Anfang werden 3 physikalische Schritte ausgeführt und die Zwischenzustände $i = 0, 1, 2$ und 3 in die vier Checkpoints gespeichert. Anschließend sind die folgenden vier physikalischen Schritte F_4, F_5, F_6, F_7 auszuführen. Wenn die Anzahl l^* an physikalischen Schritten 8 beträgt, wird für $k = 2$ die Bedingungen (5.8) erfüllt. Somit wird der Inhalt des 2-te Checkpoints gelöscht und der 7-te Zwischenzustand in diesen freien Checkpoint abgespeichert. Für $l^* = 11$, $l^* = 16$ und $l^* = 21$ werden die Bedingungen (5.8) jeweils für $k = 2$ ebenfalls erfüllt. Damit wird der 2-te Checkpoint dreimal umgesetzt.
Bei der Konstruktion des ersten Teils von $S_{adapt}(24, 4)$, der in der Abb. 5.6 dargestellt ist, sind für alle k', $2 \le k' \le 4$, die Kosten $\mathbf{T}(S_{k',adapt}(l^*, 4))$ berechnet worden. Alle Werte $\mathbf{T}(S_{k',adapt}(l^*, 4))$, $2 \le k' \le 4$, werden miteinan-

l^*	$\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,4))$	$\mathbf{T}(S_{2,adapt}(l^*,4))$	$\mathbf{T}(S_{3,adapt}(l^*,4))$	$\mathbf{T}(S_{4,adapt}(l^*,4))$
17	32	35	35	34
18	34	37	37	38
19	37	39	39	42
20	41	42	42	46
21	46	45	45	50

Tabelle 5.1: Vergleich der Kostenaufwände

der verglichen, und das Minimum $\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*,4)) = \min\limits_{2\leq k^{'}\leq 4} \mathbf{T}(S_{k',adapt}(l^*,4))$ von diesen Werten wird ausgewählt. Falls $\mathbf{T}(S_{k,adapt}(l^*,4)) < \mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,4))$ gilt, wird der Inhalt vom $k-$ten Checkpoint gelöscht und der (l^*-1)-te Zwischenzustand in diesen Checkpoint abgespeichert. Diese Berechnungen werden für alle $l^*,\ 5 \leq l^* \leq 23$, durchgeführt.
In der Tabelle 5.1 sind die Werte $\mathbf{T}(S_{k',adapt}(l^*,4))$ und $\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,4))$ für $k^{'} = 2,3,4$, und $l^*, 17 \leq l^* \leq 21$, aufgelistet. Dabei ist zu erkennen, wie diese Werte anwachsen. Folgende Beziehung zeigt, wie sich die Werte $\mathbf{T}(S_{adapt}(l^*,s))$ bei dem Übergang von l^* zu (l^*+1) unterscheiden:

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*+1}}, S_{adapt}(l^*,s)) - \mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(l^*,s)) = l^* - \check{l}^*_s + 1. \tag{5.10}$$

Eine ähnliche Beziehung für die Veränderung von $\mathbf{T}(S_{k',adapt}(l^*,s))$ wird für $k^{'}:\ 2 \leq k^{'} < s$ mit

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*+1}}, S_{k',adapt}(l^*,s)) - \mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(l^*,s)) = r_{bin}(2, l^* - \check{l}^*_s) + 1 \tag{5.11}$$

und für $k^{'} = s$ mit

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*+1}}, S_{k',adapt}(l^*,s)) - \mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(l^*,s)) = r_{bin}(2, l^* - \check{l}^*_{s-1}) + 1 \tag{5.12}$$

erfasst. Bei dem Übergang von l^* zu (l^*+1) ist zu dem Zeitpunkt, in dem die Gleichungen (5.10)-(5.12) berechnet werden, noch keine Umverteilung der Checkpoints vorgenommen worden.
Aus den Werten, die in der Tabelle 5.1 für $l^* = 17, ..., 21$ aufgelistet sind, wird ersichtlich, dass für den Wert $\mathbf{T}(S_{2,adapt}(21,4))$, die folgende Beziehung

gilt

$$\mathbf{T}(S_{2,adapt}(21,4)) = \min_{2 \leq k' \leq 4} \left\{ \mathbf{T}(S_{k',adapt}(21,4)) \right\}.$$

Des weiteren gilt für $\mathbf{T}(S_{2,adapt}(21,4))$ die Beziehung (5.7). Deswegen wird der Inhalt vom 2-ten Checkpoint zu diesem Zeitpunkt gelöscht und der 20-te Zwischenzustand in diesen freien Checkpoint gespeichert.

Die folgenden Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigen weitere Beispiele für die Aufstellung des ersten Teils von $S_{adapt}(l, s)$ bei verschiedenen Werten l und s.

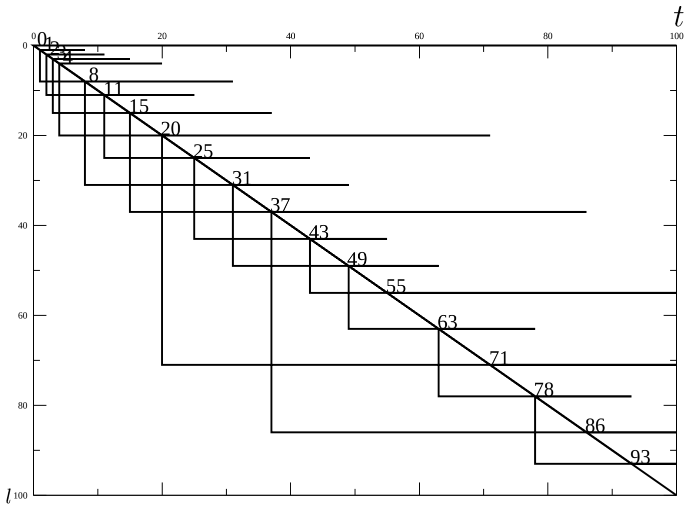

Abbildung 5.7: Beispiel 1 zur Aufstellung von $S_{adapt}(101, 5)$ zum Zeitpunkt $t = 100$

Die Konstruktion des zweiten Teils eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(l, s)$ beginnt zu dem Zeitpunkt, wenn die gesamte Anzahl l von physikalischen Schritten bekannt ist. Nachdem der letzte physikalische Schritt F_{l-1} ausgeführt worden ist, wird der physikalische Schritt F_l umgekehrt, wobei ein Umkehrschritt $\widetilde{F}_l$ ausgeführt wird. Für die restlichen $(l-1)$ physikalischen Schritte gilt folgende Checkpointverteilung:

$$\left(\check{l}_1, \check{l}_2, ..., \check{l}_s\right).$$

Die weitere Konstruktion von $S_{adapt}(l, s)$ beschränkt sich auf die Aufstellung der binomialen Umkehrschemata $S_{bin}(\check{l}_2 - \check{l}_1, s)$,..., $S_{bin}(l - 1 - \check{l}_s, 1)$ für die Folgen

$$\left(F_{\check{l}_1+1}, ..., F_{\check{l}_2}\right), ..., \left(F_{\check{l}_s+1}, ..., F_{l-1}\right)$$

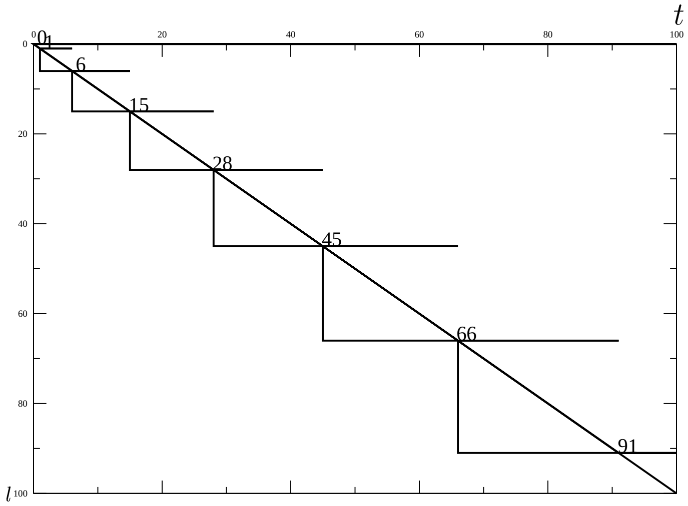

Abbildung 5.8: Beispiel 2 zur Aufstellung von $S_{adapt}(101, 2)$ zum Zeitpunkt $t = 100$

mit uniformen Schrittkosten.
Die folgende Abbildung 5.9 zeigt beispielhaft die Konstruktion von $S_{adapt}(10, 3)$ mit dem oben beschriebenen Verfahren. Dabei ist $\mathbf{T}(S_{adapt}(10, 3)) = 17$ und $\mathbf{T}_{min}(10, 3) = 15$.

5.3.2 Aufstellung von $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$

Die Ausgangssituation in diesem Fall mit nicht uniformen Kosten ist ähnlich der Situation im Kapitel 5.3.1 für uniforme Kosten. Bei der Aufstellung des Schemas $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ werden $F_1, ..., F_{l^*-1}$ physikalische Schritte ausgeführt, wobei momentan bekannt ist, dass die Folge mindestens l^* physikalische Schritte $(F_1, ..., F_{l^*})$ mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_{l^*}}$ enthält.
Es wird davon ausgegangen, dass die Umkehrschemata

$$S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_1^*+1, \check{l}_2^*}}, s), ..., S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_s^*+1, l^*-1}}, 1)$$

für die Unterfolgen

$$\left(F_{\check{l}_1^*+1}, ..., F_{\check{l}_2^*}\right), ..., \left(F_{\check{l}_s^*+1}, ..., F_{l^*-1}\right)$$

gemäß Kapitel 4.2 konstruiert werden, worauf später in diesem Kapitel noch

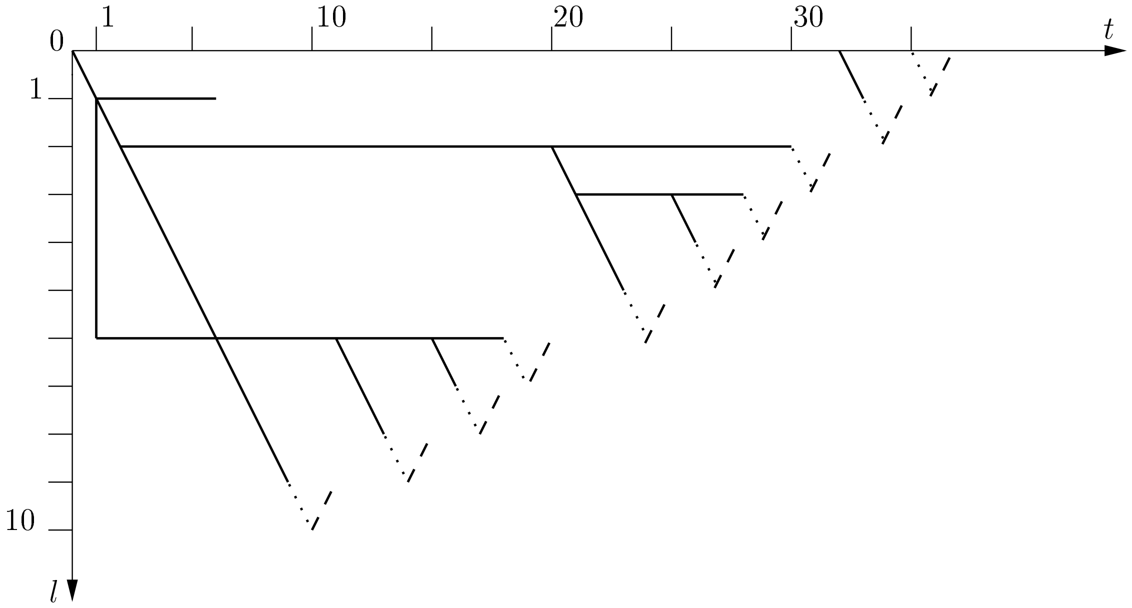

Abbildung 5.9: Umkehrschema $S_{adapt}(10, 3)$

näher eingegangen wird. Somit können die Ausführungkosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s))$ bei der Checkpointverteilung $\left(\check{l}_1^*, ..., \check{l}_s^*\right)$ folgendermaßen berechnet werden:

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) = \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{T}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_j^*+1}, \mathbf{\check{l}_{j+1}^*}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_j^*+1}, \mathbf{\check{l}_{j+1}^*}}, s-j+1))+$$

(5.13)

$$+\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_s^*+1}, \mathbf{l^*-1}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_s^*+1}, \mathbf{l^*-1}}, 1)) + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i,$$

wobei mit $\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_j^*+1}, \mathbf{\check{l}_{j+1}^*}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_j^*+1}, \mathbf{\check{l}_{j+1}^*}}, s-j+1)$ die Ausführungskosten des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_j^*+1}, \mathbf{\check{l}_{j+1}^*}}, s-j+1)$ für eine Folge von $\left(F_{\check{l}_j^*+1}, ..., F_{\check{l}_{j+1}^*}\right)$ physikalischen Schritten mit den Kosten $\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}_j^*+1}, \mathbf{\check{l}_{j+1}^*}} = \langle t_{\check{l}_j^*+1}, ..., t_{\check{l}_{j+1}^*}\rangle$ bezeichnet werden. Mit $(s-j+1)$ wird die Anzahl der verfügbaren Checkpoints erfasst, wobei für $j: \ 1 \leq j \leq s-1$, gilt.

Bei der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ wird eine obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{kg}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ für die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{kg}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ berechnet, jedoch die Ausführungskosten selbst werden nicht berechnet. Dasgleiche Prinzip wird auf die Aufstellung des Schemas $S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ übertragen. Demzufolge wird eine obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s))$ für die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s))$

folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) = \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_{\mathbf{j+1}}^*}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_{\mathbf{j+1}}^*}, s-j+1))+$$

$$+\mathbf{G}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{s}^*+\mathbf{1},\mathbf{l}^*-\mathbf{1}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{s}^*+\mathbf{1},\mathbf{l}^*-\mathbf{1}}, 1)) + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=\check{l}_j^*+1}^{\check{l}_{j+1}^*} \widehat{r}_i \cdot t_i + \sum_{i=\check{l}_s^*+1}^{l^*-1} \widehat{r}_i \cdot t_i + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \Bigg(r_{bin}(s-j+1, \check{l}_{j+1}^* - \check{l}_j^*) \sum_{i=\check{l}_j^*+1}^{\check{l}_{j+1}^* - r_{bin}(s-j+1,\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*)} t_i + \tag{5.14}$$

$$+ \sum_{i=\check{l}_{j+1}^* - r_{bin}(s-j+1,\check{l}_{j+1}^*-\check{l}_j^*)+1}^{\check{l}_{j+1}^*} \left(\check{l}_{j+1}^* - i\right) t_i \Bigg) +$$

$$+ r_{bin}(1, l^*-1-\check{l}_s^*) \sum_{i=\check{l}_s^*+1}^{l^*-1-r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*)} t_i +$$

$$+ \sum_{i=l^*-r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*)}^{l^*-1} (l^*-1-i)\, t_i + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i.$$

Die Folge der letzten $(l^* - 1 - \check{l}_s^*)$ physikalischen Schritte ist somit mit einem einzigen Checkpoint umzukehren. Wenn der Inhalt von einem beliebigen Checkpoint $k, 2 \leq k \leq s$, zu löschen ist, ist anschließend der (l^*-1)-te Zwischenzustand in dem k-ten Checkpoint zu speichern. Dadurch wird die bisherige Checkpointverteilung folgendermaßen geändert:

$$\left(\check{l}_1^*, ..., \check{l}_k^*, ..., \check{l}_s^*\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\check{l}_1^*, ..., \check{l}_{k-1}^*, \check{l}_{k+1}^*, ..., \check{l}_s^*, \check{l}_k^* = l^*-1\right) \quad \text{falls } 2 \leq k \leq s-1$$

$$\left(\check{l}_1^*, ...\check{l}_s^* < l^*-1\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\check{l}_1^*, ..., \check{l}_{s-1}^*, \check{l}_s^* = l^*-1\right) \quad \text{falls } k = s.$$

Aufgrund der neuen Checkpointverteilung ergibt sich ein neues Umkehrschema für die Folge von l^* physikalischen Schritten. In diesem Fall werden die entsprechenden Umkehrschemata für die Unterfolgen

$$\left(F_{\check{l}_1^*+1}, ..., F_{\check{l}_2^*}\right), ..., \left(F_{\check{l}_{k-2}^*+1}, ..., F_{\check{l}_{k-1}^*}\right), \left(F_{\check{l}_{k-1}^*+1}, ..., F_{\check{l}_{k+1}^*}\right), ..., \left(F_{\check{l}_s^*+1}, ..., F_{l^*-1}\right),$$

falls $2 \leq k \leq s-1$ und

$$\left(F_{\check{l}_1^*+1},...,F_{\check{l}_2^*}\right),...,\left(F_{\check{l}_{s-1}^*+1},...,F_{l^*-1}\right),$$

falls $k=s$ gemäß Kapitel 4.2 aufgestellt. Das Umkehrschema $S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s)$ mit seinen Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}},S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$ ist dabei entsprechend zu modifizieren. Das neue Schema wird im folgenden mit $S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s)$ bezeichnet, und seine Ausführungskosten werden mit $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}},S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$ erfasst. Gemäß der Beziehung (5.13) kann der Kostenaufwand $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}},S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$ folgendermaßen betrachtet werden:
falls $2 \leq k \leq s-1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}},S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s)) &= \sum_{j=1}^{k-2}\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j+1}^*},S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j+1}^*},s-j+1))+\\
&+\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{k-1}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{k+1}^*},S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{k-1}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{k+1}^*},s-k+2))+\\
&+\sum_{j=k+1}^{s-1}\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j+1}^*},S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j+1}^*},s-j+2))+\\
&+\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{s}^*+\mathbf{1},\mathbf{l}^*-\mathbf{1}},S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{s}^*+\mathbf{1},\mathbf{l}^*-\mathbf{1}},2))+\sum_{i=1}^{l^*-1}t_i
\end{aligned} \tag{5.15}$$

und falls $k=s$

$$\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}},S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))=\sum_{j=1}^{s-1}\mathbf{T}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j+1}^*},S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j}^*+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}_\mathbf{j+1}^*},s-j+1))+\sum_{i=1}^{l^*-1}t_i.$$

Für die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}},S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$ wird eine obere Schranke $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}},S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$, $2 \leq k \leq s$, berechnet (gemäß Kapitel 4.2):

falls $2 \le k \le s-1$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{t}_{\mathbf{l}^*}, S_{k,adapt}(\mathbf{t}_{\mathbf{l}^*}, s)) \;&=\; \sum_{j=1}^{k-2} \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_\mathbf{j}+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{j+1}}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_\mathbf{j}+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{j+1}}}, s-j+1)) + \\
&+\; \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{k-1}}+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{k+1}}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{k-1}}+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{k+1}}}, s-k+2)) + \\
&+\; \sum_{j=k+1}^{s-1} \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_\mathbf{j}+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{j+1}}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_\mathbf{j}+\mathbf{1},\check{\mathbf{l}}^*_{\mathbf{j+1}}}, s-j+2)) + \\
&+\; \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_\mathbf{s}+\mathbf{1},\mathbf{l}^*-\mathbf{1}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\check{\mathbf{l}}^*_\mathbf{s}+\mathbf{1},\mathbf{l}^*-\mathbf{1}}, 2)) + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i = \\
&=\; \sum_{j=1}^{k-2} \Bigg(r_{bin}(s-j+1, \check{l}^*_{j+1}-\check{l}^*_j) \sum_{i=\check{l}^*_j+1}^{\check{l}^*_{j+1}-r_{bin}(s-j+1,\check{l}^*_{j+1}-\check{l}^*_j)} t_i + \\
&+\; \sum_{i=\check{l}^*_{j+1}-r_{bin}(s-j+1,\check{l}^*_{j+1}-\check{l}^*_j)+1}^{\check{l}^*_{j+1}} \left(\check{l}^*_{j+1}-i\right) t_i \Bigg) + \\
&+\; \Bigg(r_{bin}(s-k+2, \check{l}^*_{k+1}-\check{l}^*_{k-1}) \sum_{i=\check{l}^*_{k-1}+1}^{\check{l}^*_{k+1}-r_{bin}(s-k+2,\check{l}^*_{k+1}-\check{l}^*_{k-1})} t_i + \\
&+\; \sum_{i=\check{l}^*_{k+1}-r_{bin}(s-k+2,\check{l}^*_{k+1}-\check{l}^*_{k-1})+1}^{\check{l}^*_{k+1}} \left(\check{l}^*_{k+1}-i\right) t_i \Bigg) + \\
&+\; \sum_{j=k+1}^{s-1} \Bigg(r_{bin}(s-j+2, \check{l}^*_{j+1}-\check{l}^*_j) \sum_{i=\check{l}^*_j+1}^{\check{l}^*_{j+1}-r_{bin}(s-j+2,\check{l}^*_{j+1}-\check{l}^*_j)} t_i + \\
&+\; \sum_{i=\check{l}^*_{j+1}-r_{bin}(s-j+2,\check{l}^*_{j+1}-\check{l}^*_j)+1}^{\check{l}^*_{j+1}} \left(\check{l}^*_{j+1}-i\right) t_i \Bigg) + \\
&+\; \Bigg(r_{bin}(2, l^*-1-\check{l}^*_s) \sum_{i=\check{l}^*_s+1}^{l^*-1-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}^*_s)} t_i + \\
&+\; \sum_{i=l^*-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}^*_s)}^{l^*-1} (l^*-1-i)\, t_i \Bigg) + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

und falls $k = s$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) &= \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}^*_j+1,\check{l}^*_{j+1}}}, S_{kg}(\mathbf{t}_{\mathbf{\check{l}^*_j+1,\check{l}^*_{j+1}}}, s-j+1)) + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i. \\
&= \sum_{j=1}^{s-1} \left(r_{bin}(s-j+1, \check{l}^*_{j+1} - \check{l}^*_j) \sum_{i=\check{l}^*_j+1}^{\check{l}^*_{j+1} - r_{bin}(s-j+1, \check{l}^*_{j+1} - \check{l}^*_j)} t_i + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=\check{l}^*_{j+1} - r_{bin}(s-j+1, \check{l}^*_{j+1} - \check{l}^*_j)+1}^{\check{l}^*_{j+1}} (\check{l}^*_{j+1} - i)\, t_i \right) + \sum_{i=1}^{l^*-1} t_i.
\end{aligned}
$$

Sofern ein Index $k,\ 2 \leq k \leq s$, existiert, für den folgendes gilt:

$$
\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) < \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)), \tag{5.17}
$$

wird der k-te Checkpoint zur Umverteilung herangezogen. Falls die Beziehung (5.17) nicht nur für einen Index k, sondern für mehrere $k^{'},\ 2 \leq k^{'} \leq s$, erfüllt wird, ist der Index k zu wählen, für den gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) &= \min_{2 \leq k^{'} \leq s} \{ \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k^{'},adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)), \\
&\qquad \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k^{'},adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) < \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) \}.
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

Nachdem der k-te Checkpoint ausgewählt und dessen Inhalt gelöscht worden ist, wird der (l^*-1)-te Zwischenzustand in den freien Checkpoint gespeichert. Die Checkpoints werden neu nummeriert, so dass folgendes gilt:

$$
\check{l}^*_i < \check{l}^*_{i+1}, \qquad 1 \leq i \leq s-1. \tag{5.19}
$$

Das ausgewählte Umkehrschema $S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ wird im weiteren mit $S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ bezeichnet.

Mit den Formeln (5.17) und (5.18) sind die Bedingungen für den Austausch eines Checkpoints gegeben. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, ist eine Checkpointumverteilung nicht erforderlich.

Danach wird überprüft, ob der Schritt F_{l^*} den letzten in der Gesamtfolge von l physikalischen Schritten darstellt. Falls $l^* = l$ ist, wird mit der Umkehrung der Schrittfolge begonnen, wobei der letzte $l-$te physikalische Schritt zuerst umgekehrt wird. Falls $l^* < l$ ist, wird der l^*-te physikalische Schritt ausgeführt, und für die neue Anzahl der physikalischen Schritte werden die oben eingeführten Bedingungen erneut geprüft.

Die Bedingungen (5.17) und (5.18) sind somit für jeden physikalischen Schritt F_{l^*}, $(s+1) \le l^* < l$, zu prüfen. Damit wird der erste Teil des Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ konstruiert, indem unter veränderlichen Bedingungen die Checkpointverteilung mehrmals geprüft und gegebenenfalls geändert wird.

Die Abbildung 5.10 stellt ein Beispiel für die Konstruktion des ersten Abschnittes von einem Umkehrschema $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ dar. Dabei ist die gesamte Anzahl l von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, 31. Zu jedem Zeitpunkt stehen 3 Checkpoints zur Verfügung.

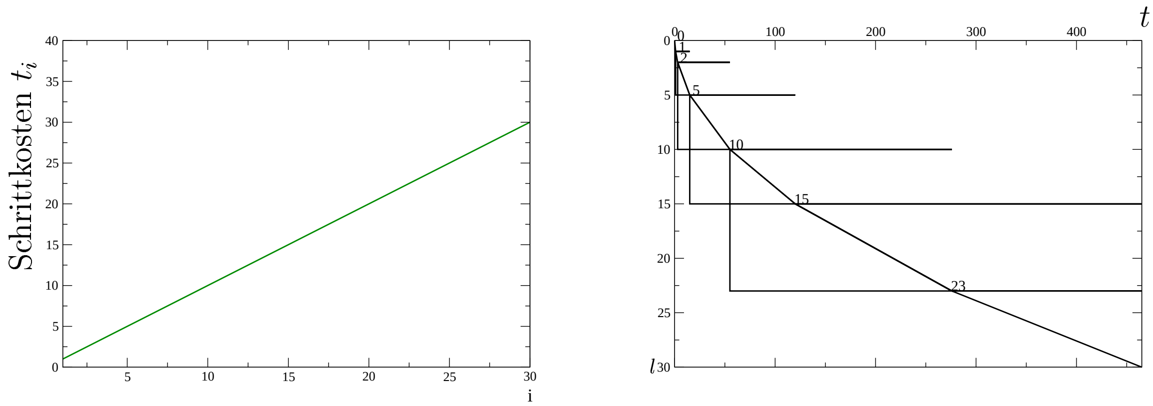

Abbildung 5.10: Beispiel zur Aufstellung des ersten Teils von $S_{adapt}(\mathbf{t_{31}}, 3)$

Am Anfang des Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$, das in der Abb. 5.10 dargestellt ist, werden 2 physikalische Schritte F_1 und F_2 ausgeführt und die Zwischenzustände $i = 0, 1$ und 2 in die drei Checkpoints gespeichert. Anschließend werden die folgenden drei physikalischen Schritte ausgeführt und der Zwischenzustand $i = 5$ in einen freien Checkpoint gespeichert. Dazu wird der Inhalt des 2-ten Checkpoints gelöscht. In dem weiteren Ablauf werden noch drei Zwischenzustände gespeichert ($i = 10$, 15 und 23). Dazu wird jeweils der Inhalt des 2-ten Checkpoints wieder gelöscht.

Bei der Konstruktion des ersten Teils von $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$, der in der Abb. 5.10 dargestellt ist, sind für alle k', $2 \le k' \le 3$, die oberen Schranken $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3))$ für die Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3))$ berechnet worden. Alle Werte

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3)),\ 2 \le k' \le 3,$$

werden miteinander verglichen, und das Minimum

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3)) = \min_{2 \le k' \le 3} \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3))$$

von diesen Werten wird ausgewählt. Falls

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k,adapt}(\mathbf{t_{l^*}},3)) < \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},3))$$

gilt, wird der Inhalt vom $k-$ten Checkpoint gelöscht und der (l^*-1)-te Zwischenzustand in diesen Checkpoint abgespeichert. Diese Berechnungen werden für alle l^*, $4 \le l^* \le 30$, durchgeführt.
In der Tabelle 5.2 sind die Werte $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},3))$ und $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{l^*}},3))$ für $k^{'} = 2,3$ und $l^*, 17 \le l^* \le 24$, aufgelistet. Dabei ist festzustellen, wie diese Werte ansteigen. Folgende Beziehung zeigt, wie sich die Werte $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$ bei dem Übergang von l^* zu (l^*+1) unterscheiden:

(5.20)

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*+1}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*+1}},s)) - \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s)) =$$

$$r_{bin}(1,l^*-\check{l}_s^*) \sum_{i=\check{l}_s^*+1}^{l^*-r_{bin}(1,l^*-\check{l}_s^*)} t_i + \sum_{i=l^*-r_{bin}(1,l^*-\check{l}_s^*)+1}^{l^*} (l^*-i)\, t_i + t_{l^*} -$$

$$-r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*) \sum_{i=\check{l}_s^*+1}^{l^*-1-r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*)} t_i - \sum_{i=l^*-r_{bin}(1,l^*-1-\check{l}_s^*)}^{l^*-1} (l^*-1-i)\, t_i.$$

Eine ähnliche Beziehung für die Veränderung von $\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s))$ wird für $k^{'}$, $1 < k^{'} < s$, mit

(5.21)

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*+1}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*+1}},s)) - \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}},s)) =$$

$$= r_{bin}(2,l^*-\check{l}_s^*) \sum_{i=\check{l}_s^*+1}^{l^*-r_{bin}(2,l^*-\check{l}_s^*)} t_i + \sum_{i=l^*-r_{bin}(2,l^*-\check{l}_s^*)+1}^{l^*} (l^*-i)\, t_i + t_{l^*} -$$

$$-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}_s^*) \sum_{i=\check{l}_s^*+1}^{l^*-1-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}_s^*)} t_i - \sum_{i=l^*-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}_s^*)}^{l^*-1} (l^*-1-i) t_i$$

und für $k^{'} = s$ mit

l^*	$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3))$	$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{2,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3))$	$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{3,adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, 3))$
17	303	410	332
18	336	443	430
19	387	478	496
20	457	548	566
21	547	605	640
22	658	665	816
23	791	798	916
24	947	884	1021

Tabelle 5.2: Vergleich der Kosten

(5.22)

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*+1}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*+1}}, s)) - \mathbf{G}(\mathbf{t_{l^*}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)) =$$

$$= r_{bin}(2, l^* - \check{l}^*_{s-1}) \sum_{i=\check{l}^*_{s-1}+1}^{l^*-r_{bin}(2,l^*-\check{l}^*_{s-1})} t_i + \sum_{i=l^*-r_{bin}(2,l^*-\check{l}^*_{s-1})+1}^{l^*} (l^*-i)\, t_i + t_{l^*} -$$

$$-r_{bin}(2, l^*-1-\check{l}^*_{s-1}) \sum_{i=\check{l}^*_{s-1}+1}^{l^*-1-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}^*_{s-1})} t_i - \sum_{i=l^*-r_{bin}(2,l^*-1-\check{l}^*_{s-1})}^{l^*-1} (l^*-1-i)\, t_i$$

erfasst.

Aus den Werten, die in der Tabelle 5.2 für $l = 17, ..., 24$ aufgelistet sind, wird ersichtlich, dass für den Wert $\mathbf{G}(\mathbf{t_{24}}, S_{2,adapt}(\mathbf{t_{24}}, 3))$, die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{24}}, S_{2,adapt}(\mathbf{t_{24}}, 3)) = \min_{k'=2,3} \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{t_{24}}, S_{k',adapt}(\mathbf{t_{24}}, 3)) \right\}.$$

Des weiteren gilt für $\mathbf{G}(\mathbf{t_{24}}, S_{2,adapt}(\mathbf{t_{24}}, 3))$ die Beziehung (5.17). Deshalb wird der Inhalt vom 2-ten Checkpoint zu diesem Zeitpunkt gelöscht und der 23-te Zwischenzustand in diesen freien Checkpoint gespeichert.

Die folgenden Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen weitere Beispiele für die Aufstellung des ersten Teils von $S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ bei verschiedenen Werten l und s.

Die Konstruktion des zweiten Teils eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_{l^*}}, s)$ beginnt zu dem Zeitpunkt, wenn die gesamte Anzahl l von physikalischen Schritten bekannt ist. Nachdem der letzte physikalische Schritt F_{l-1} ausgeführt worden ist, wird der physikalische Schritt F_l umgekehrt, wobei ein

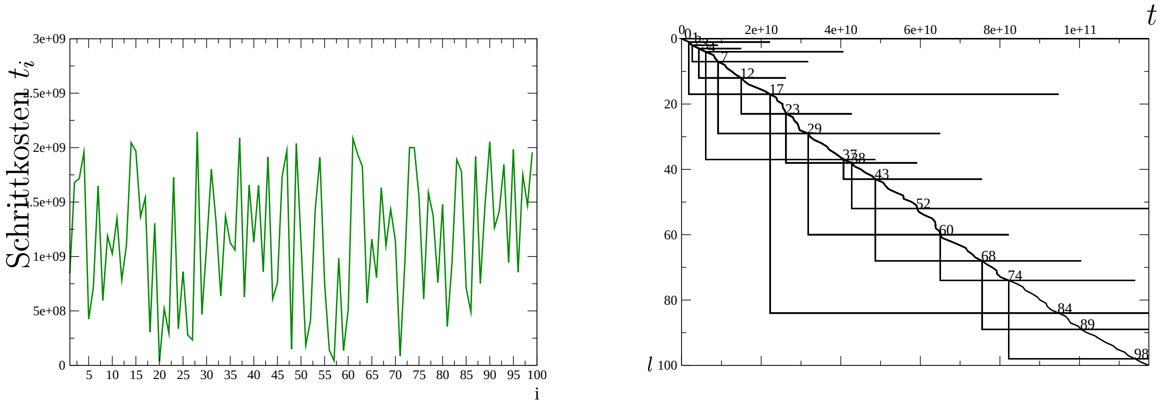

Abbildung 5.11: Beispiel 1 zur Aufstellung des ersten Teils von $S_{adapt}(\mathbf{t_{101}}, 5)$

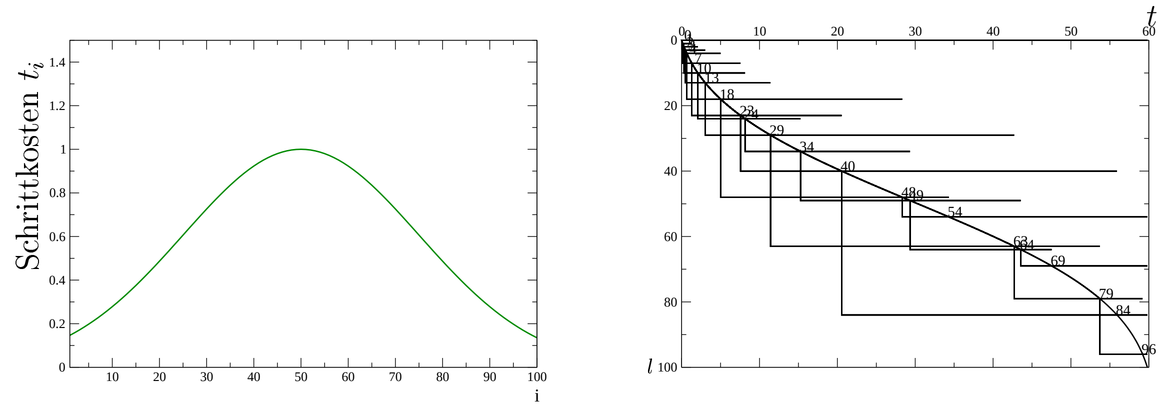

Abbildung 5.12: Beispiel 2 zur Aufstellung des ersten Teils von $S_{adapt}(\mathbf{t_{101}}, 5)$

Umkehrschritt $\widetilde{F}_l$ ausgeführt wird. Für die restlichen $(l-1)$ physikalischen Schritte gilt folgende Checkpointverteilung:

$$\left(\check{l}_1, \check{l}_2, ..., \check{l}_s\right).$$

Die weitere Konstruktion von $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ beschränkt sich auf die Aufstellung der kostengünstig aufgestellten Umkehrschemata $S_{kg}(\mathbf{t_{\check{l}_1+1,\check{l}_2}}, s)$,..., $S_{kg}(\mathbf{t_{\check{l}_s+1,l-1}}, 1)$ für die Unterfolgen

$$\left(F_{\check{l}_1+1}, ..., F_{\check{l}_2}\right), ..., \left(F_{\check{l}_s+1}, ..., F_{l-1}\right).$$

In der Abbildung 5.13 ist ein Beispiel für das Schema $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ dargestellt.

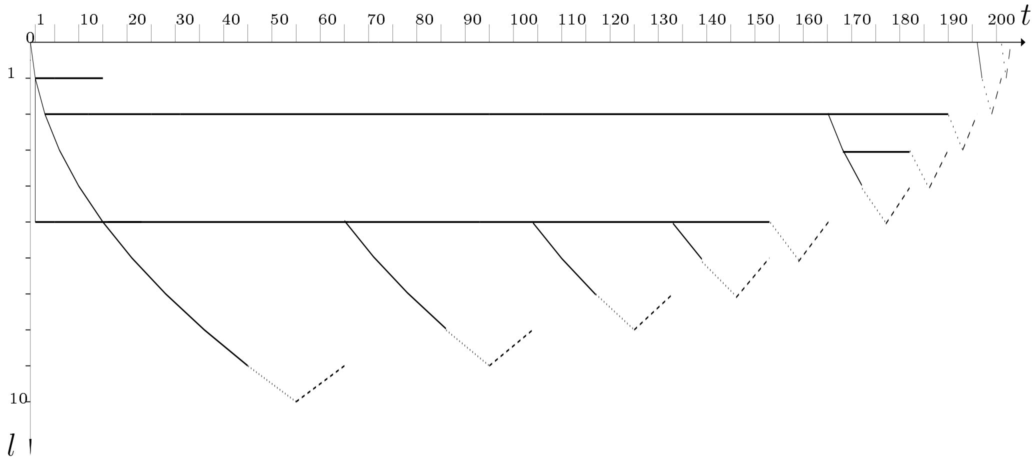

Abbildung 5.13: Umkehrschema $S_{adapt}(\mathbf{t_{10}}, 3)$

Die Schrittkostenverteilung der untersuchten Folge mit 10 physikalischen Schritten zeigt die Abb. 5.14.

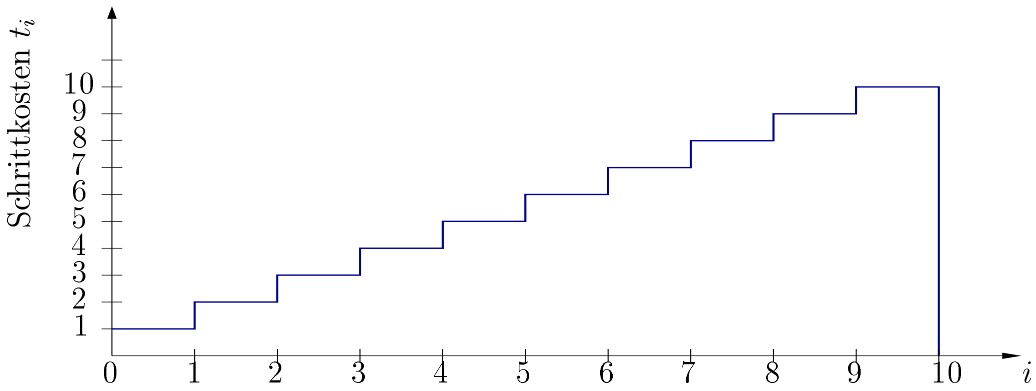

Abbildung 5.14: Schrittkostenverteilung für das Beispiel in Abb. 5.13

5.4 Untersuchung des Kostenaufwandes von adaptiven Umkehrschemata

Bei der Untersuchung der Ausführungskosten von adaptiven Umkehrschemata wird wie bei deren Konstruktion zwischen zwei Fällen unterschieden; zum einen werden uniforme und zum anderen nicht uniforme Schrittkosten betrachtet.

5.4.1 Vergleich von $\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s))$ mit den Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ von $S_{bin}(l,s)$

Die folgende Abbildung 5.15 zeigt einige Beispiele, bei denen die Abweichungen von der Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s))$ und $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ bei verschiedener Anzahl an Checkpoints s und unterschiedlicher Länge l eingetragen sind. Für alle $l, 1 \leq l \leq 500$, werden die Differenzen $(\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s)) - \mathbf{T}_{min}(l,s))$ für eine ausgewählte Anzahl an Checkpoints s berechnet und prozentual dargestellt, wobei $\mathbf{T}_{min}(l,s) \equiv 100\%$ ist.

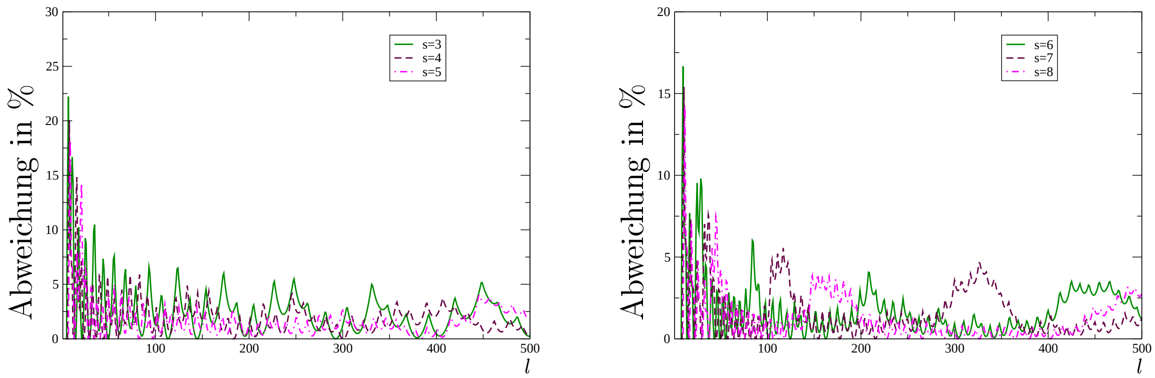

Abbildung 5.15: Vergleich der Ausführungskosten

In der Abb. 5.15 wird deutlich, welche Auswirkung die unbekannte Anzahl der physikalischen Schritte auf die Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s))$ des Umkehrschemas $S_{adapt}(l,s)$ hat, wobei die Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s))$ des Schemas $S_{adapt}(l,s)$ für eine unbekannte Anzahl l und $\mathbf{T}_{min}(l,s)$ des binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l,s)$ für eine bekannte Anzahl l an physikalischen Schritten miteinander verglichen werden. Dabei liegen die Abweichungen $\frac{(\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s)) - \mathbf{T}_{min}(l,s))}{\mathbf{T}_{min}(l,s)} \cdot 100$, die mit dem neu entwickelten Verfahren zur

Aufstellung von $S_{adapt}(l,s)$ erzielt werden, unter 10 %. Damit kann davon ausgegangen werden, dass dieses Verfahren zur Aufstellung von Umkehrschemata mit nahezu optimalen Ausführungskosten geeignet ist.
In der Abbildung 5.16 sind die dargestellten Abweichungen

$$(\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s)) - \mathbf{T}_{min}(l,s))$$

auf die Schrittzahl l bezogen, wobei $l \equiv 100\,\%$ gesetzt wird.

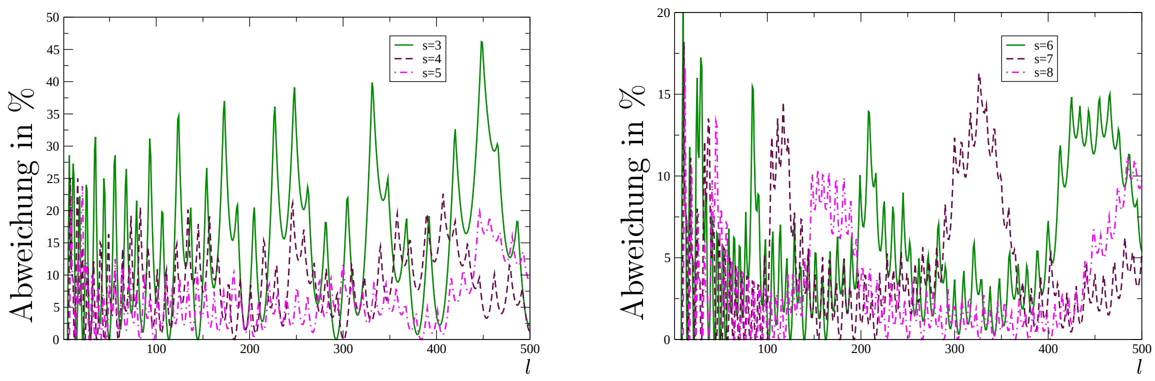

Abbildung 5.16: Vergleich der Ausführungskosten

Bei der Konstruktion des Umkehrschemas $\widetilde{S}_{adapt}(l,s)$ gemäß dem im Kapitel 5.1.1 beschriebenen Verfahren betragen die Werte

$$\frac{\Big(\mathbf{T}(\widetilde{S}_{adapt}(l,s)) - \mathbf{T}_{min}(l,s)\Big)}{l} \cdot 100 \approx \; 100\%$$

für beliebige l und s. Gemäß Abb. 5.4 liegen die Werte

$$\frac{\Big(\mathbf{T}(\widehat{S}_{adapt}(l,s)) - \mathbf{T}_{min}(l,s)\Big)}{l} \cdot 100$$

oberhalb von 100 %, wobei das Umkehrschema $\widehat{S}_{adapt}(l,s)$ nach dem im Kap. 5.1.2 angegebenen Verfahren konstruiert worden ist. Daraus ist zu schlussfolgern, dass die Abarbeitung des Umkehrschemas $S_{adapt}(l,s)$ gemäß Abb. 5.16 wesentlich günstiger als die Ausführung der Umkehrschemata $\widetilde{S}_{adapt}(l,s)$ und $\widehat{S}_{adapt}$ ist, da die Werte $\frac{\big(\mathbf{T}(S_{adapt}(l,s)) - \mathbf{T}_{min}(l,s)\big)}{l} \cdot 100$ weit unterhalb von 100 % für beliebige l und s liegen.

5.4.2 Untersuchung des Kostenaufwandes $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ von $S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)$

Die Untersuchung der Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ des Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)$ wird in zwei Schritte aufgeteilt.

- Vergleich von $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ mit den Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ von $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$
- Vergleich von $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ mit den Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_1, s)$ von $S_{opt}(\mathbf{t}_1, s)$

A. Vergleich von $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ mit den Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ von $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$

Die Konstruktion des Schemas $S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)$ ist gemäß dem Kapitel 5.3.2 auf der Basis des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ aufgebaut. Demzufolge ist zu untersuchen, ob die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ und $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s))$ der beiden Umkehrschemata $S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)$ bzw. $S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)$ nahezu gleich sind.
Für die Länge l, $1 \leq l \leq 500$, und eine ausgewählte Anzahl von Checkpoints s werden die Abweichungen $(\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)) - \mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)))$ berechnet und prozentual in den Abb. 5.17, 5.18 und 5.19 dargestellt, wobei $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)) \equiv 100\,\%$ ist. Für jedes Beispiel ist die entsprechende Kostenverteilung in der linken Abbildung dargestellt.

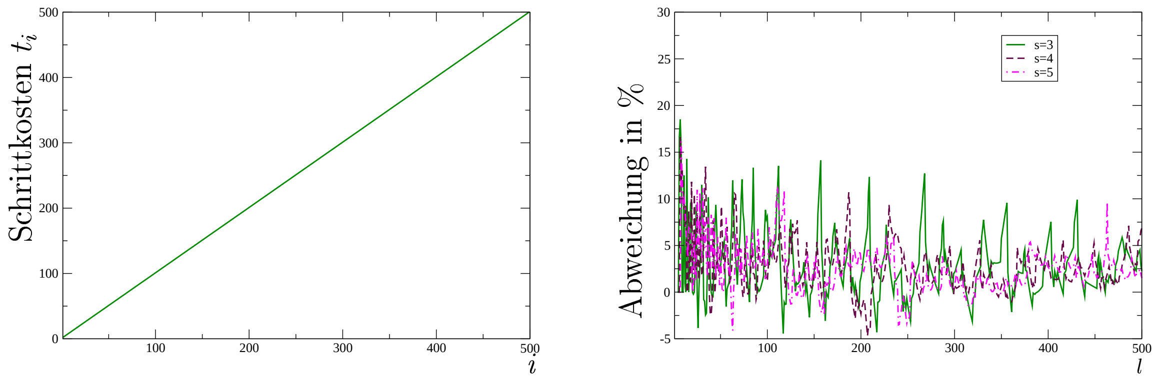

Abbildung 5.17: Vergleich der Ausführungskosten A1

In den Abbildungen 5.20, 5.21 und 5.22 werden die Abweichungen

$$(\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)) - \mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{kg}(\mathbf{t}_1, s)))$$

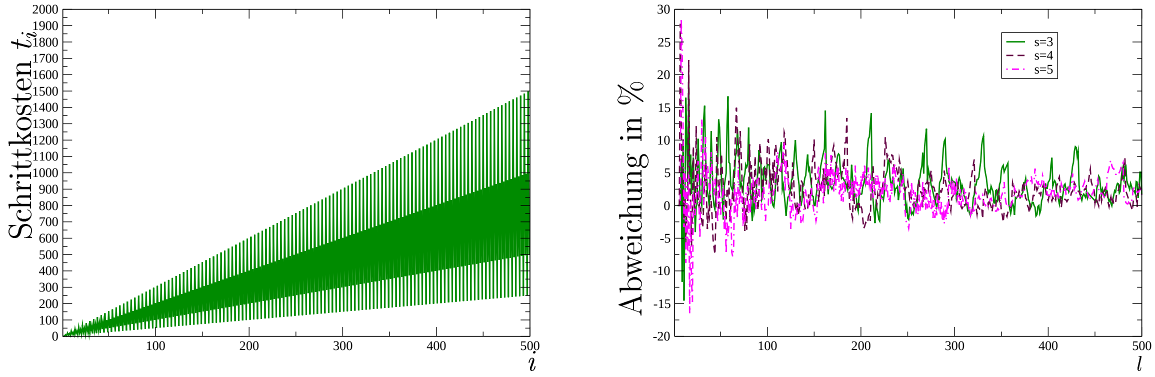

Abbildung 5.18: Vergleich der Ausführungskosten A2

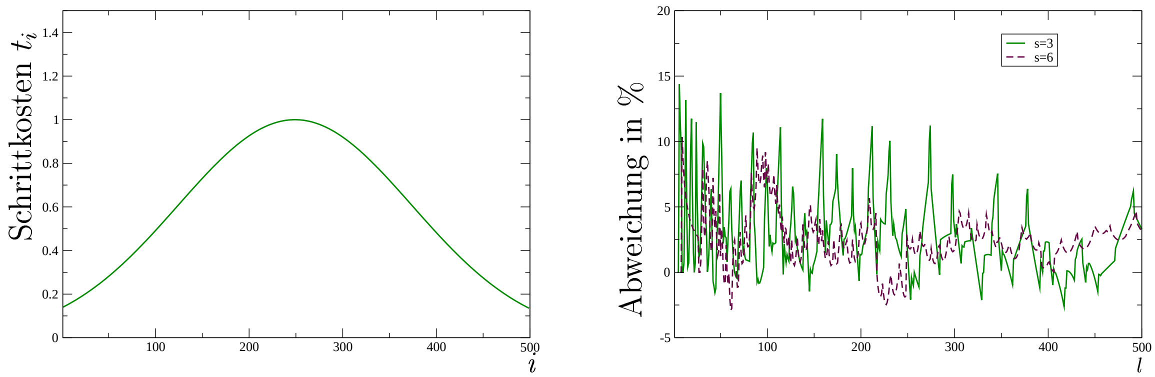

Abbildung 5.19: Vergleich der Ausführungskosten A3

ebenfalls als bezogene Größen dargestellt, wobei jedoch $\sum_{i=1}^{l} t_i \equiv 100\%$ gesetzt wird. Die gesamte Anzahl l der physikalischen Schritte wird zwischen den Werten 1 und 500 variiert. Die Anzahl s der verfügbaren Checkpoints ist unterschiedlich und wird in den Abbildungen mit angegeben.

B. Vergleich von $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s))$ mit den Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_1, s)$ von $S_{opt}(\mathbf{t}_1, s)$

Für l, $1 \leq l \leq 300$, und $s = 3, 4, 5$ werden die Abweichungen

$$(\mathbf{T}(\mathbf{t}_1, S_{adapt}(\mathbf{t}_1, s)) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_1, s))$$

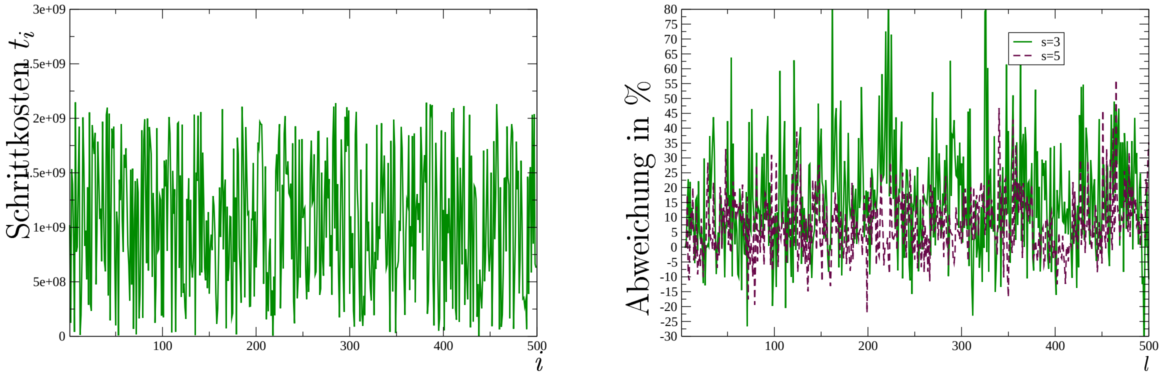

Abbildung 5.20: Vergleich der Ausführungskosten A4

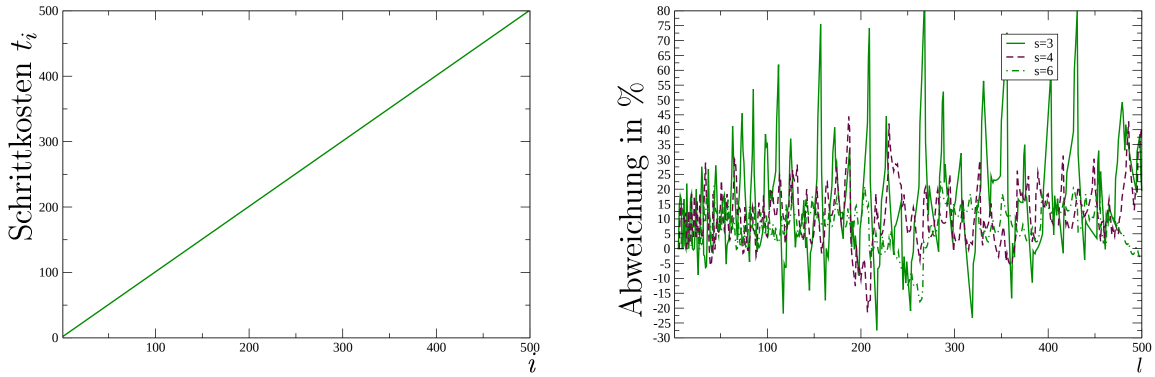

Abbildung 5.21: Vergleich der Ausführungskosten A5

berechnet und prozentual in der Abb. 5.23 dargestellt, wobei $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s) \equiv 100\,\%$ ist. Die Schrittkosten für $l = 300$ sind in dem linken Bild der Abb. 5.23 mit angegeben.

In der Abbildung 5.24 ist die Abweichung $(\mathbf{T}(\mathbf{t}_l, S_{adapt}(\mathbf{t}_l, s)) - \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s))$ ebenfalls als bezogene Größe dargestellt, hier erfolgt der Bezug jedoch auf $\sum_{i=1}^{l} t_i \equiv 100\,\%$.

Aus den Abbildungen 5.17-5.24 wird ersichtlich, dass die Abweichungen der Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_l, S_{adapt}(\mathbf{t}_l, s))$ von den Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_l, S_{kg}(\mathbf{t}_l, s))$ und den Kosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s)$ bei einigen Kostenverteilungen erhebliche Werte auf-

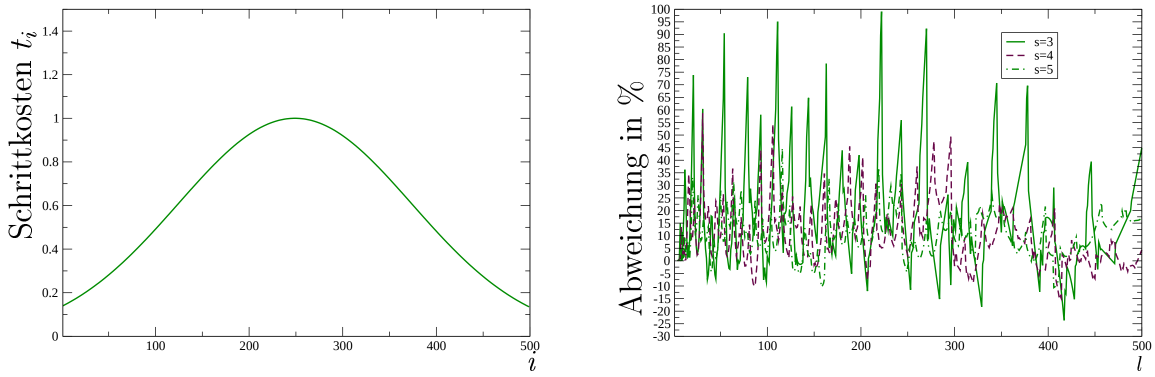

Abbildung 5.22: Vergleich der Ausführungskosten A6

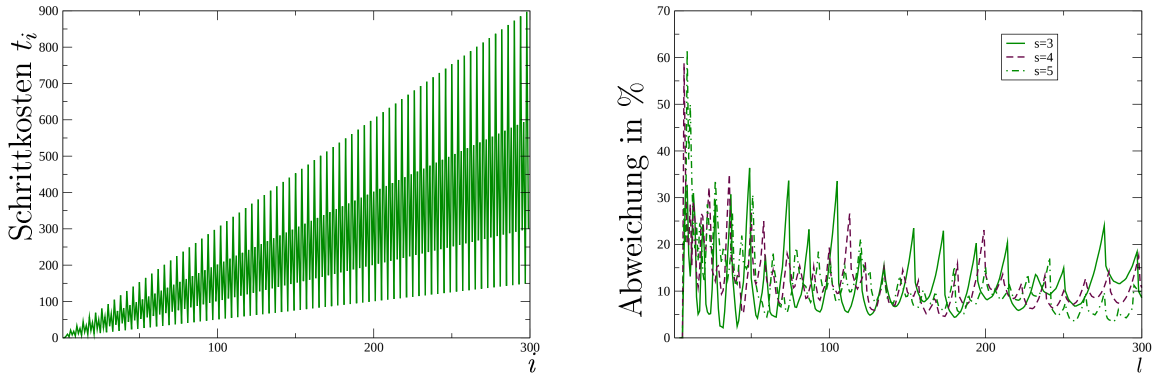

Abbildung 5.23: Vergleich der Ausführungskosten B1

weisen. Dabei ist anzumerken, dass die Bezugsgröße bei diesen Betrachtungen $\sum_{i=1}^{l} t_i = 100\,\%$ ist, wobei diese Bezugswahl im Vergleich zu den Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$ zu wesentlich höheren Abweichungen führt.
In dem Fall, wenn die Bezugsgrößen $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)) = 100\%$ oder $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s) = 100\%$ gewählt werden, liegen die Abweichungen der Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$ von den Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ bzw. $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ im allgemeinen unter 20 %. Unter Berücksichtigung, dass das Umkehrschema $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ mit Hilfe der oberen Schranke und nicht der Kosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$ bzw. $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ selbst aufgestellt wird, ist dieses Ergebnis als akzebtabel zu bewerten.

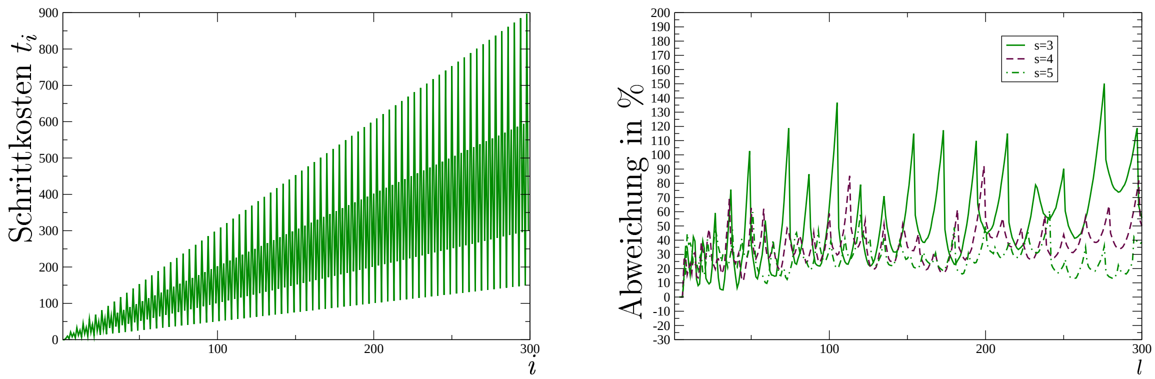

Abbildung 5.24: Vergleich der Ausführungskosten B2

Kapitel 6

Implementierung von REVOLVE++

Im Zusammenhang mit den theoretischen Untersuchungen wurden im Rahmen dieser Arbeit folgende Verfahren implementiert:

- Verfahren zur Aufstellung von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$ (Kapitel 4)
- Verfahren zur Aufstellung von $S_{adapt}(l, s)$ (Kapitel 5)
- Verfahren zur Aufstellung von $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ (Kapitel 5)

Die Implementierung erfolgt in C++. Auf der Basis des bereits existierenden Programms REVOLVE, das die Aufstellung des binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit uniformen Kosten enthielt, wurde ein neues erweitertes Programm erstellt, das die Implementation von den oben genannten Verfahren umfasst. Das

- Verfahren zur Aufstellung von $S_{bin}(l, s)$ (Kapitel 3)

ist im erweiterten Programm REVOLVE ebenfalls enthalten.
Die beispielhaften Untersuchungen, die in den Kapiteln 4 und 5 angegeben sind, in denen die Eigenschaften und die Ausführungskosten von $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$, $S_{adapt}(l, s)$ bzw. $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ untersucht worden sind, sind mit REVOLVE durchgeführt worden.
Die Datei

`revolve.c`

dient zur Aufstellung von Umkehrschemata mittels der oben genannten Verfahren. Das entsprechende Headerfile ist:

`revolve.h`

6.1 Allgemeine Struktur von revolve.c

Die Datei revolve.c besteht aus mehreren Funktionen, wobei die Hauptfunktion, die der Benutzer aus dem Hauptprogramm aufruft,

```
enum action REVOLVE(int* check,int* capo,int* fine,float wcapo,
                    float *w);
```

darstellt. Alle anderen Funktionen 'TMIN', 'SUMTMIN', 'MINTMIN', 'SELECTION', 'OPTIMAL', 'COSTEFFECTIVE', 'GMIN', 'REPS', 'REPS1', und 'REPS2', die in der Datei revolve.c ebenfalls enthalten sind, dienen als Hilfsfunktionen und werden direkt aus REVOLVE aufgerufen. Auf ihre Definition wird in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels eingegangen. Die erforderlichen Deklarationen für diese Funktionen sind in der Headerdatei revolve.h enthalten.
Um REVOLVE anwenden zu können, hat der Benutzer die Realisierung der folgenden Aktionen zu gewährleisten:

- Vorwärtslauf von dem aktuellen Zwischenzustand zu einem angegebenen Zwischenzustand und Reinitialisierung des neu berechneten Zustandes als aktueller Zustand
- Speichern der Daten des aktuellen Zwischenzustandes in dem Feld von Checkpoints
- Lesen der Daten des aktuellen Zwischenzustandes aus einem gespeicherten Checkpoint
- Initialisierung der Adjungierten bzw. Umkehrvariablen am Ende eines Vorwärtslaufes
- Durchführung eines Umkehrschrittes

Der Zusammenhang zwischen den auszuführenden Aktionen und den Anweisungen von REVOLVE wird im folgenden Unterkapitel erläutert.

6.1.1 REVOLVE(CHECK,CAPO,FINE,WCAPO,W)

Die Schnittstelle der Funktion REVOLVE ist folgendermaßen definiert

```
ENUM ACTION  REVOLVE(INT *CHECK,INT *CAPO,INT *FINE,FLOAT WCAPO,
                     FLOAT *W)

CHECK      // Anzahl der gespeicherten Checkpoints  bzw.  die
              Nummer des  zu  speichernden  Checkpoints
              ( bei  adaptiven  Umkehrschemata )

CAPO       // Die  Nummer  des  aktuellen  Zwischenzustandes

FINE       // Die  Nummer  des  momentan letzten  Zwischenzustan-
              des  bzw.  des  letzten  physikalischen  Schrittes

WCAPO      // Die  Kosten  t(F(CAPO))  des  Schrittes  F(CAPO)

W          // Die  Kosten  t(F(1)),...,t(F(Steps))  der  Schrit-
              te F(1),...,F(Steps)
```

Mittels Variablenübergabe aus REVOLVE an das Programm, mit dem REVOLVE aufgerufen wird, wird festgelegt, welche der im vorigen Kapitel genannten Aktionen auszuführen ist. Dazu wird die Variable *enum action* beim Aufruf von REVOLVE entsprechend mit

```
'advance', 'takeshot', 'restore', 'firsturn' und 'youturn'
```

belegt. Im folgenden werden diese Belegungen näher erläutert. Mit dem Rückgabewert 'advance' wird zugewiesen, dass die entsprechende Anzahl von physikalischen Schritten auszuführen ist, wobei die Zwischenzustände

```
i = (aktueller  Zustand + 1) , ... , i = CAPO
```

berechnet werden müssen. Mit der Nummer $i = CAPO$ wird der neue aktuelle Zwischenzustand bezeichnet, der als ein solcher zu initialisieren ist.

Falls *enum action* = 'takeshot' gesetzt wird, soll der aktuelle Zustand in den entsprechenden Checkpoint gespeichert werden, wobei die Nummer des Checkpoints mit 'CHECK' angegeben wird. Falls der Checkpoint mit der Nummer 'CHECK' bereits belegt ist, was bei der Aufstellung der adaptiven Umkehrschemata oft der Fall ist, wird der Inhalt von diesem Checkpoint gelöscht und der aktuelle Zustand gespeichert.

Mit *enum action* = 'restore' wird hingegen das Einlesen des aktuellen Zwischenzustandes aus dem Checkpoint 'CHECK' bezeichnet.

Sofern *enum action* = 'firsturn' gesetzt wird, werden folgende Anweisungen ausgeführt:

- Ausführung des letzten physikalischen Schrittes F_{FINE}, wobei die zur Umkehrung benötigten Daten, die bei der Ausführung dieses Schrittes erzeugt werden, in einem Stack abgespeichert werden
- Initialisierung der Umkehrvariablen
- Umkehrung des letzten physikalischen Schrittes, wobei die bereits im Stack gespeicherten Daten verwendet werden.

Ist *enum action* = 'youturn' gesetzt, ist der physikalische Schritt F_{FINE} umzukehren. Dabei wird vorausgesetzt, dass ein oder mehrere physikalische Schritte bereits umgekehrt worden sind.
Die beiden Rückgabewerte

```
'terminate'  und  'error'
```

geben das richtige bzw. das fehlerbehaftete Beenden des Aufrufs von REVOLVE an.
Vor dem ersten Aufruf von REVOLVE hat der Benutzer die zwei globalen Parameter 'SNAPS' und 'PRINT' einzugeben. Der Parameter SNAPS bezeichnet die Anzahl der verfügbaren Checkpoints. Der Wert von SNAPS bleibt beim Ablauf des Programms unverändert. Es existiert implizit eine obere Grenze an verfügbaren Checkpoints CHECKUP. Sie ist zu 64 gesetzt worden. Falls der Benutzer mehr Checkpoints benötigt, ist dieser Parameter CHECKUP in der Datei revolve.c zu ändern. Falls beim Ablauf des Programms CHECKUP+1 Checkpoints gespeichert werden, wird eine Fehlermeldung ausgegeben.
Mit dem Parameter PRINT wird die Informationsausgabe festgelegt. Wenn PRINT = 0 ist, wird keine Information ausgegeben. Wenn PRINT > 0 ist, erzeugt REVOLVE eine Ausgabe, die eine Information über die ausgeführten Aktionen enthält. Sofern ein Fehler im Programm auftritt, enthält der Rückgabewert von PRINT eine Information über die Ursache des Fehlers:

```
PRINT = 10:  Die Anzahl der gespeicherten Checkpoints
             überschreitet CHECKUP, erhöhe die Konstante
             CHECKUP und rekompiliere

PRINT = 11:  Die Anzahl der gespeicherten Checkpoints
             überschreitet SNAPS, stelle fest ob SNAPS>0 ist
             und erhöhe die Ausgangsvariable FINE
```

```
PRINT = 12:  Der Fehler ist in der Funktion TMIN aufgetreten

PRINT = 13:  FINE wurde vergrößert und SNAPS Checkpoints sind
             gespeichert worden, erhöhe die  Anzahl von SNAPS

PRINT = 14:  Die Anzahl von SNAPS überschreitet CHECKUP,
             erhöhe die Konstante CHECKUP und rekompiliere

PRINT = 15:  Die Anzahl von REPS (Wiederholungszahl) überschrei-
             tet REPSUP, erhöhe die Konstante REPSUP und rekom-
             piliere.
```

Sofern die physikalischen Schritte uniforme Kosten besitzen, werden folgende Parametereinstellungen vorgenommen

$$W = NULL \qquad\qquad WCAPO = 0$$

Falls die physikalischen Schritte nicht uniforme Kosten aufweisen, werden die vom Benutzer vorgegebenen Kosten $t_1, ..., t_{FINE}$ in dem Feld W abgespeichert und bei jedem Aufruf von REVOLVE mit übergeben. Außerdem hat der Benutzer vor dem ersten Aufruf von REVOLVE die Parameter CAPO und FINE festzulegen.

Der erste Aufruf von REVOLVE erfolgt mit CHECK= -1. Somit werden die entsprechenden Initialisierungen intern in REVOLVE durchgeführt.

Die Erfüllung der Bedingungen

$$CHECK >= -1 \qquad und \qquad CAPO <= FINE$$

ist notwendig und hinreichend für den Standartaufruf von REVOLVE, sonst wird der Rückgabewert auf ERROR gesetzt.

Für die ersten $F_1, ..., F_{FINE}$ physikalischen Schritte bei dem Vorwärtslauf wird eine Checkpointverteilung für ein binomiales oder günstig aufgestelltes Umkehrschema bestimmt, je nach dem ob ein uniformes oder nicht uniformes Problem vorliegt.

Falls die tatsächliche Anzahl an umzukehrenden Schritten den am Anfang eingegebenen Wert des Parameters FINE überschreitet, wird zur Aufstellung eines adaptiven Umkehrschemas übergegangen. Dabei hat der Benutzer von einem Aufruf von REVOLVE zum nächsten zu prüfen, ob FINE der letzte physikalische Schritt in der Gesamtfolge ist. Falls es nicht der Fall ist, wird der physikalische Schritt F_{FINE} ausgeführt, der Zwischenzustand $i = FINE$

als der aktuelle Zustand bezeichnet, FINE um 1 erhöht und REVOLVE mit diesem modifizierten Parameter erneut aufgerufen.
Im Fall der nicht uniformen Schrittkosten bei der Aufstellung der adaptiven Umkehrschemata sind die tatsächlichen Kosten des jeweiligen Schrittes nur nach seiner Ausführung bekannt. Demzufolge werden mit jedem Aufruf von REVOLVE die Kosten t_{CAPO} des bereits ausgeführten Schrittes als Parameter WCAPO mit übergeben und intern in REVOLVE in das Feld W eingetragen.
Der Rückwärtslauf wird initialisiert, sofern für die Werte FINE und CAPO folgendes gilt:

$$FINE - CAPO = 1.$$

Dabei sind die Schritte $F_1, ..., F_{FINE-1}$ bereits ausgeführt worden, und eine Checkpointverteilung liegt vor. Der Rückwärtslauf ist bei allen Umkehrschemata ähnlich zu implementieren, da zu dem Zeitpunkt die Anzahl an physikalischen Schritten bereits bekannt ist. Demzufolge stimmt der Rückwärtslauf sowohl bei uniformen adaptiven Problemen mit dem Rückwärtslauf bei binomialen Umkehrschemata als auch bei nicht uniformen adaptiven Problemen mit dem Rückwärtslauf bei günstig aufgestellten Umkehrschemata überein. Dabei ist jeweils ein Umkehrschritt auszuführen, wenn $FINE - CAPO = 1$ erreicht wird.
Wenn CHECK=-1 und CAPO=FINE, wird 'terminate' als Rückgabewert von REVOLVE zurückgeliefert.

6.1.2 TMIN(STEPS, SNAPS)

Diese Funktion berechnet die Anzahl der auszuführenden physikalischen Schritte (ohne Speichern der Daten in einem Stack), die für die Umkehrung der Schrittfolge von STEPS physikalischen Schritten mit SNAPS Checkpoints erforderlich ist, wobei alle physikalischen Schritte uniforme Kosten besitzen. Dabei wird zur Umkehrung der jeweiligen Schrittfolge ein binomiales Umkehrschema $S_{bin}(STEPS, SNAPS)$ angewendet. Das Konstruktionsprinzip von $S_{bin}(STEPS, SNAPS)$ ist im Kapitel 3.3.1 beschrieben worden.
Des weiteren gilt folgende Beziehung

$$TMIN(STEPS, SNAPS) = \mathbf{T}_{min}(STEPS, SNAPS),$$

wobei der Wert $\mathbf{T}_{min}(STEPS, SNAPS)$ gemäß Beziehung (3.15) zu berechnen ist.
Falls die Anzahl von Checkpoints SNAPS kleiner als 1 ist, wird eine Fehlermeldung ausgegeben und der Rückgabewert der Funktion TMIN zu -1 gesetzt.

6.1.3 SUMTMIN(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[])

Diese Funktion liefert die Anzahl der auszuführenden physikalischen Schritte, die ohne Speichern der Daten in einem Stack für die Umkehrung einer Schrittfolge von STEPS physikalischen Schritten mit SNAPS Checkpoints bei gegebener Checkpointsverteilung $(ch[0], ..., ch[CHECK-1])$ erforderlich sind. Dabei weisen alle physikalischen Schritte uniforme Kosten auf. CHECK Checkpoints sind bereits gespeichert worden, wobei mit $ch[i]$ die Nummer des in dem (i+1)-ten Checkpoint abgespeicherten Zwischenzustandes bezeichnet wird, und $0 \le i < CHECK$ gilt. Für die Unterfolgen $(F_{ch[0]+1}, ..., F_{ch[1]})$, ..., $(F_{ch[CHECK-2]+1}, ..., F_{ch[CHECK-1]})$, $(F_{ch[CHECK-1]+1}, ..., F_{(STEPS-1)})$ werden jeweils die binomialen Umkehrschemata gemäß Kapitel 3.3.1 aufgestellt. Demzufolge wird der Rückgabewert von SUMTMIN folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} SUMTMIN = & \sum_{j=0}^{CHECK-2} \mathbf{T}_{min}(ch[j+1]-ch[j], SNAPS-j+1) + \\ + \ & \mathbf{T}_{min}(STEPS-1-ch[CHECK-1], SNAPS-CHECK+1) + \\ + \ & STEPS-1. \end{aligned}$$

Diese Beziehung stimmt mit der Gleichung (5.5) überein.
Die Funktion SUMTMIN(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[]) wird bei der Konstruktion eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(STEPS, SNAPS)$ verwendet (siehe auch Kapitel 5.3.1).

6.1.4 MINTMIN(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[])

Gemäß den Beziehungen (5.6) - (5.8) wird mittels der Funktion MINTMIN(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[]) berechnet, ob der Inhalt von einem Checkpoint auszutauschen ist, wobei sich die Kosten

$$\mathbf{T}(S_{adapt}(STEPS, SNAPS))$$

des Umkehrschemas $S_{adapt}(STEPS, SNAPS)$ dadurch reduzieren lassen. Dabei sind Schrittfolgen mit uniformen Kosten zu betrachten. Die Ausführungskosten $\mathbf{T}(S_{adapt}(STEPS, SNAPS))$ werden gemäß Gleichung (5.5) berechnet.
Sofern es einen Checkpoint k, $2 \le k \le$ CHECK, gibt, für den die Beziehung (5.8) gilt, wird die Nummer $(k-1)$ des Checkpoints als Rückgabewert von MINTMIN ausgegeben. Andernfalls wird der Rückgabewert auf Null gesetzt.

Die Funktion MINTMIN(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[]) wird ebenfalls bei der Konstruktion eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(STEPS, SNAPS)$ verwendet (siehe auch Kapitel 5.3.1).

6.1.5 SELECTION(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[], W, SUM)

Diese Funktion hat eine ähnliche Funktionsweise wie die der Funktion MINTMIN(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[]), nur für den Fall mit nicht uniformen Schrittkosten. Hier wird mit Hilfe der Formeln (5.14), (5.16), (5.17) und (5.18) ebenfalls eine Checkpointsauswahl getroffen, um eine Umverteilung vornehmen zu können, wobei sich die obere Schranke

$$\mathbf{G}(\mathbf{t_{STEPS}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS))$$

der Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_{STEPS}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS))$ des Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ dadurch reduzieren lässt.
$\mathbf{G}(\mathbf{t_{STEPS}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS))$ und $\mathbf{T}(\mathbf{t_{STEPS}}, S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS))$ sind gemäß der Beziehungen (5.14) bzw. (5.13) zu berechnen.
Sofern es einen Checkpoint k, $2 \leq k \leq$ CHECK, gibt, für den die Beziehung (5.18) gilt, wird die Nummer $(k-1)$ des Checkpoints als Rückgabewert der Funktion SELECTION zurückgegeben. Andernfalls wird dieser Rückgabewert auf Null gesetzt.
Die Funktion SELECTION(STEPS, SNAPS, CHECK, CH[], W, SUM) wird bei der Konstruktion eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ verwendet (siehe auch Kapitel 5.3.2).

6.1.6 OPTIMAL(STEPS, SNAPS, W, SUM)

Die Funktion OPTIMAL(STEPS, SNAPS, W, SUM) berechnet die Ausführungskosten, die für die Abarbeitung eines optimalen Umkehrschemas

$$S_{opt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$$

für eine Folge von physikalischen Schritten F_i, $1 \leq i \leq$STEPS, mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_{STEPS}} = \langle t_1, ..., t_{STEPS} \rangle$ erforderlich sind.
Der Rückgabewert von OPTIMAL ist:

$$OPTIMAL(STEPS, SNAPS, W, SUM) = \mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS),$$

wobei die Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ gemäß Gleichung (3.30) berechnet werden. Das Konstruktionsprinzip des optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ ist im Kapitel 3.3.2 beschrieben worden.

6.1.7 COSTEFFECTIVE(CAPO, FINE, SNAPS, W, SUM)

Die Funktion COSTEFFECTIVE(CAPO, FINE, SNAPS, W, SUM) liefert die Ausführungskosten des kostengünstig aufgestellten Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)$ für eine Folge von $(F_{CAPO+1}, ..., F_{FINE})$ physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten

$$\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}} = \langle t_{CAPO+1}, ..., t_{FINE} \rangle,$$

wobei SNAPS Checkpoints zu jedem Zeitpunkt gespeichert werden können. Für den Rückgabewert von COSTEFFECTIVE gilt:

$$\begin{aligned} COSTEFFECTIVE(CAPO, FINE, SNAPS, W, SUM) = \\ = \mathbf{T}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)), \end{aligned}$$

wobei mit $\mathbf{T}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS))$ die Ausführungskosten des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)$ und mit SNAPS die Checkpointsanzahl bezeichnet werden.
Die Aufstellung des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)$ ist im Kapitel 4.2 beschrieben worden.

6.1.8 GMIN(CAPO, FINE, SNAPS, W, SUM)

Bei der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)$ wird mit der Beziehung (4.10) die Nummer $\check{l}_2$ des Zwischenzustandes bestimmt, der in dem zweiten Checkpoint gespeichert wird. In der Funktion GMIN(CAPO, FINE, SNAPS, W, SUM) wird diese Nummer $\check{l}_2$ berechnet und dem Rückgabewert zugewiesen. Dabei wird für alle $\check{l}$, $capo < \check{l} < fine$, die obere Schranke $\mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS))$ berechnet und die Nummer k des Zustandes, für den

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_k(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)) = \\ = \min_{capo<\check{l}<fine} \mathbf{G}_{\check{l}}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, S_{kg}(\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}}, SNAPS)), \end{aligned}$$

gilt, zurückgeliefert (siehe auch Kapitel 4.2), wobei

$$\mathbf{t_{CAPO+1,FINE}} = \langle t_{CAPO+1}, ..., t_{FINE} \rangle$$

ist.

6.1.9 REPS(STEPS, SNAPS), REPS1 und REPS2

Die Funktion REPS(STEPS, SNAPS) bestimmt den Wert der Größe $r_{bin}(SNAPS, STEPS)$ über die Beziehung

$$\beta(SNAPS, r_{bin}(SNAPS, STEPS) - 1) < STEPS \leqslant \beta(SNAPS, r_{bin}(SNAPS, STEPS))$$

und liefert den berechneten Wert $r_{bin}(SNAPS, STEPS)$ zurück, wobei

$$\beta(SNAPS, r_{bin}(SNAPS, STEPS)) = \frac{(SNAPS + r_{bin}(SNAPS, STEPS))!}{SNAPS! r_{bin}(SNAPS, STEPS)!}$$

ist. Die Funktion REPS(STEPS, SNAPS) wird vor allem bei der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ verwendet.
Bei den Funktionen REPS1(STEPS, SNAPS) und REPS2(STEPS, SNAPS) wird die Bestimmung des Wertes der Größe $r_{bin}(SNAPS, STEPS)$ rekursiv implementiert. Somit reduziert sich der Kostenaufwand dieser Funktionen im Vergleich zu dem Kostenaufwand der Funktion REPS(STEPS, SNAPS).
Die beiden Funktionen REPS1(STEPS, SNAPS) bzw. REPS2(STEPS, SNAPS) werden bei der Aufstellung des Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ verwendet. Dabei errechnet sich der Kostenaufwand $\mathbf{K}(S_{kg}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS))$ des Algorithmus zur kostengünstigen Aufstellung des Schemas $S_{kg}(\mathbf{t_{STEPS}}, SNAPS)$ gemäß Beziehung (4.15). REPS1 und REPS2 unterscheiden sich hierbei nur in der Herangehensweise bezüglich der Iterationsrichtungen, jedoch nicht im Ergebnis.
Für den Rückgabewert der Funktionen REPS, REPS1, REPS2 existiert eine obere Grenze REPSUP. Der Wert von REPSUP ist 64. Wenn der berechnete Wert $r_{bin}(SNAPS, STEPS)$ den Grenzwert REPSUP überschreitet, erscheint eine Fehlermeldung.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Eine Aufgabenstellung, die diese Arbeit beinhaltet, ist die Untersuchung der grundlegenden Eigenschaften des Checkpointing. Im Rahmen dieser Untersuchungen sind neue Begriffe definiert worden, wie z.B. 'Häufigkeitswert', 'Häufigkeitsprofil', 'Untere bzw. Obere Schranke der Ausführungskosten von einem Umkehrschema', deren Eigenschaften analysiert und beschrieben worden sind. Für die Häufigkeitswerte eines beliebigen Umkehrschemas ist eine obere Grenze aufgestellt worden. Diese obere Grenze wird von den Häufigkeitswerten der binomialen Umkehrschemata angenommen, wodurch die Optimalität von binomialen Umkehrschemata im Rahmen dieser Arbeit bewiesen worden ist.

In diesem Zusammenhang wird eine neue vereinfachte Beweisführung des grundlegenden Satzes über die Ausführungskosten des binomialen Umkehrschemas vorgestellt (siehe Kapitel 3.3.1 bzw. Satz 3.2), wobei die neu eingeführten Begriffe 'Häufigkeitswert' und 'Häufigkeitsprofil' einbezogen werden.

Außerdem wird eine neue Methode vorgestellt, mit Hilfe dieser Begriffe folgende Größen zu berechnen:

$O(\mathbf{t}_l, s)$ Eine obere Schranke der Ausführungskosten $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t}_l, s)$ eines optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t}_l, s)$

$U(\mathbf{t}_l, s)$ Eine untere Schranke der Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t}_l, s)$ eines beliebigen Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_l, s)$

Die Größen $O(\mathbf{t}_l, s)$ und $U(\mathbf{t}_l, s)$ sind als obere bzw. untere Schranken für die Ausführungskosten der Umkehrschemata, die nicht uniforme Probleme behandeln, zu interpretieren.

Die Untersuchung der Eigenschaften bereits existierender Verfahren und die Aufstellung neuer Methoden für die Konstruktion von Umkehrschemata stellt die andere grundlegende Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit dar. Da-

bei wird als primales Ziel die Reduzierung von Kosten bei der Aufstellung von Umkehrschemata im Rahmen der neu entwickelten Verfahren verfolgt.
Obwohl die Minimierung der Ausführungskosten der Umkehrschemata nur zweitrangig behandelt wird, werden auch diese Kosten untersucht und mit den Ausführungskosten optimaler Umkehrschemata verglichen. Die Minimierung der Abweichung dieser Kosten beinhaltet eine weitere Zieldarstellung bei der Aufstellung der neuen Verfahren.
Getrennt werden die zwei Fälle an Folgen physikalischer Schritte untersucht, wobei einerseits uniforme und andererseits nicht uniforme Kosten betrachtet werden. Zusätzlich wird noch unterschieden, ob die gesamte Anzahl von umzukehrenden Schritten im voraus bekannt ist oder nicht.
Die bisher in der Literatur [GW97], [Wal99], [GW97], [Gri00] behandelten Fälle sind:

- Verfahren zur Aufstellung eines binomialen Umkehrschemas $S_{bin}(l, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit uniformen Kosten, wobei die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, im voraus bekannt ist

und

- Verfahren zur Aufstellung eines optimalen Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t}_l, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t}_l$, wobei die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, im voraus bekannt ist.

Die Kosten für die Ausführung des ersten Verfahrens sind vernachlässigbar gering, dass ihre Reduzierung nicht mehr erforderlich ist. Bei dem zweiten Verfahren zur Aufstellung eines Umkehrschemas $S_{opt}(\mathbf{t}_l, s)$ betragen die Ausführungskosten $O(sl^2)$ arithmetische Operationen, was hingegen einen erheblichen Kostenaufwand darstellt. Um diese Kosten zu reduzieren, sind im Rahmen dieser Arbeit Untersuchungen durchgeführt worden. Unter anderem wird die Beziehung zwischen den in [Knu98] und [Mehl84] diskutierten Binärbäumen und Umkehrschemata untersucht.
Aufgrunddessen sind zwei Verfahren entwickelt worden, mit denen physikalische Folgen besonderer Eigenschaften abgedeckt werden:

- Kostengünstige Aufstellung eines Umkehrschemas $S_{kg}(\mathbf{t}_l, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t}_l$, wobei die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, im voraus bekannt ist und

- Aufstellung eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit nicht uniformen Kosten $\mathbf{t_l}$, wobei die gesamte Anzahl von physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, im voraus nicht bekannt ist.

Des weiteren ist anzumerken, dass Folgen mit uniformen Schrittkosten und im voraus unbekannter Gesamtzahl an physikalischen Schritten in der Literatur ebenfalls bisher noch nicht behandelt worden sind. Daher ist auch dieser Problematik im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine besondere Bedeutung beizumessen. In diesem Zusammenhang ist ein neues Verfahren entwickelt worden, das diese Problematik behandelt:

- Aufstellung eines adaptiven Umkehrschemas $S_{adapt}(l, s)$ für eine Folge von physikalischen Schritten mit uniformen Kosten, wobei die gesamte Anzahl an physikalischen Schritten, die umgekehrt werden sollen, im voraus nicht bekannt ist.

Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen sind die Ausführungskosten $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{kg}(\mathbf{t_l}, s))$, $\mathbf{T}(\mathbf{t_l}, S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s))$ und $\mathbf{T}(S_{adapt}(l, s))$ der mit den neuen Verfahren aufgestellten Umkehrschemata $S_{kg}(\mathbf{t_l}, s)$, $S_{adapt}(\mathbf{t_l}, s)$ bzw. $S_{adapt}(l, s)$ ermittelt, den Kosten $\mathbf{T}_{min}(l, s)$ und $\mathbf{T}_{min}(\mathbf{t_l}, s)$ der binomialen Umkehrschemata $S_{bin}(l, s)$ bzw. optimalen Umkehrschemata $S_{opt}(\mathbf{t_l}, s)$ gegenübergestellt und mit diesen verglichen worden. Es ist nachgewiesen worden, dass zum Teil erhebliche Kosteneinsparungen bei der Aufstellung der Umkehrschemata mit den neu implementierten Verfahren erzielt worden sind. Die Zusatzkosten zur Ausführung der Umkehrschemata, die bei den neu entwickelten Verfahren auftreten, betragen ca. 5 - 10 % der Ausführungskosten der optimalen Umkehrschemata.
Die Eigenschaften der oben angegebenen Umkehrschemata sind im Rahmen dieser Arbeit untersucht worden, wobei jedoch weiterführende Betrachtungen durchzuführen sind. Die neu entwickelten Verfahren sind als erfolgversprechende Basis zu betrachten, um weitere Optimierungen an diesen Verfahren vornehmen zu können.

Literaturverzeichnis

[BBCG96] M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank (eds.), *Computational Differentiation*: Techniques, Applications, and Tools, SIAM Philadelphia, 1996.

[Ben73] Ch. Benett, *Logikal reversibility of computation*, IBM J. Research and Development **17** (1973), 525-532

[Ben95] J. Benary, *DAP - Dresdner Adjungierten Parallelisierungsprojekt*, Preprint IOKOMO-05-1995, Techn. Univ. Dresden, 1995.

[Ben96] J. Benary, *Parallelism in the reverse mode*, Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools (M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, eds.), SIAM Philadelphia, 1996, pp. 137 - 147.

[Cha98] I. Charpentier, *Checkpoints schemes for adjoint codes: Application to the meteorological model Meso-NH*, Tech. report, Project IDOPT, LMC-IMAG, 1998.

[Evt91] Y.G.Evtushenko, *Automatic differentiation viewed from optimal control*, Automatic Differetiation of Algorithms: Theory, Implementation, and Application (A. Griewank and G. Corliss, eds.), SIAM Philadelphia, 1991, pp. 25 - 30.

[GBD^{+}94] A. Geist, A. Beguelin, J. Dongarra, W. Jiang, R. Manchek, and V. Sunderam, *PVM parallel virtual machine, a user's guide and tutorial for networked parallel computing*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1994.

[GC96] V. Goldman and G. Cats, *Automatic adjoint modelling within a programm generation framework: A case study for a weather forecasting grid-point model*, Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools (M. Berz, C. Bischof,

G. Corliss, and A. Griewank, eds.), SIAM Philadelphia, 1996, pp. 185 - 194.

[GJU96] A. Griewank, D. Juedes, and J. Utke, ADOL-C, *A package for the automatic differentiation of algorithms written in C/C++*, ACM Trans. Math. Software **22** (1996), 131 - 167.

[GPRS96] J. Grimm, L. Pottier, and N. Rostaing-Schmidt, *Optimal time and minimum space-time product for reversing a certain class of programms*, Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools (M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, eds.), SIAM Philadelphia, 1996, pp. 95 - 106.

[GW97] A. Griewank, A. Walther, *Treeverse: An Implementation of Checkpointing for the Reverse or Adjoint Mode of Computational Differentiation*, Tech. Report IOKOMO-04-1997, Techn. Univ. Dresden, 1997, To appear in ACM Trans. Math. Software .

[Gri89] A. Griewank, *On automatic differentiation*, Mathematical Programming: Recent Development and Applications (Amsterdam) (M. Iri and K. Tanabe, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1989, pp. 83 - 108.

[Gri92] A. Griewank, *Achieving logarithmic growth of temporal and spatial complexity in reverse automatic differentiation*, Optimization Methods and Software 1 (1992), 35 - 54.

[Gri00] A. Griewank, *Evaluating Derivatives. Principle and Techniques of Algorithmic Differentiation*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[Knu98] D.E.Knuth, *The Art of Computer Programming 3, Sorting and Searching*, second ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.

[KW98] W. Klein and A. Walther, *Application of techniques of computational differentiation to a cooling system*, Preprint IOKOMO-05-1998, Techn. Univ. Dresden, 1998, To appear in Optimization Methods and Software.

[Mehl84] K. Mehlhorn, *Data Structures and Algorithms 1: Sorting and Searching*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[RDG93] N. Rostaing, S. Dalmas, and A. Galligo, *Automatik differentiation in Odyssee*, Tellus **45A** (1993), 558-568.

[Tal91] O. Talagrand, *The use of adjoint equation in numerical modeling of the atmospheric circulation*, Automatic Differentiation of Algorithms: Teory, Implementations, and Application (A. Griewank and G. Corliss, eds.), SIAM Philadelphia, 1991, pp. 169 - 180.

[VO85] Y.M. Volin and G.M. Ostrovskii, *Automatic computation of derivatives with use of the multilevel differentiation technique*, Computers and Mathematics with Applications **11** (1985), 1099 - 1114.

[Wal99] A. Walther, *Programm Reversal Schedules for Single- and Multi-processor Machines*, Ph.D. thesis, Technische Universität Dresden, 1999.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema

'Adaptive Umkehrschemata für Schrittfolgen mit nicht uniformen Kosten'

unter Betreuung von Herrn Prof. Ph.D. Andreas Griewank selbständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Dresden, den 25. Juli 2002