Prof. Dr. M. Hinze
Dr. J.Sternberg-Kaletta SoSe 2010

Übungen zur Vorlesung Optimierung
Blatt 6
Abgabetermin: Theoretische Aufgaben 21.05.2010 vor der Übung.

Aufgabe 19: (4 Punkte) (Wohldefiniertheit von Schrittweiten)

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nach unten beschränkt, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$. Dann gibt es Schrittweiten t, die den Armijo Goldstein Bedingungen genügen, d.h. es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x + \beta^l d) \leq f(x) + \alpha\beta^l \nabla f(x)^\top d.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nach unten beschränkt, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1/2)$, $\eta \in [\alpha, 1)$. Weiter seien

$$x \in N_f(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^0)\right\}$$

und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^\top d < 0$. Dann gibt es Schrittweiten t, die den Wolfe-Powell-Bedingungen

$$f(x + td) \leq f(x) + \alpha t \nabla f(x)^\top d$$
$$\nabla f(x + td)^\top d \geq \eta \nabla f(x)^\top d$$

genügen.

c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nach unten beschränkt, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1/2)$, $\eta \in [\alpha, 1)$. Weiter seien

$$x \in N_f(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^0)\right\}$$

und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^\top d < 0$. Dann gibt es Schrittweiten t, die den strengen Wolfe-Powell-Bedingungen

$$f(x + td) \leq f(x) + \alpha t \nabla f(x)^\top d$$
$$\mid \nabla f(x + td)^\top d \mid \leq -\eta \nabla f(x)^\top$$

genügen.

Aufgabe 20:(4 Punkte) (Effizienz strengen Wolfe-Powell-Schrittweiten)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nach unten beschränkt, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in (0,1/2)$, $\eta \in [\alpha, 1)$. Weiter seien

$$x \in N_f(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^0)\right\}$$

und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^\top d < 0$. Ausserdem sei der Gradient $\nabla f(x)$ auf der Niveaumenge $N_f(x^0)$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L. Dann gilt

$$f(x + td) \leq f(x) - \frac{(1-\eta)\alpha}{L} \left(\frac{\nabla f(x)^\top d}{\|d\|}\right)^2.$$

Aufgabe 21: (4 Punkte (2+2)) Gegeben sei die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Desweiteren seien $x, d \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit $\nabla f(x)^\top d < 0$.

Zeigen Sie, daß die exakte Minimalstelle t^* von $g(t) = f(x+td)$ eine (strenge) Wolfe-Powell-Schrittweite ist, wenn $\alpha \leq 1/2$ und $\eta \geq 0$ gilt.