

Übungsblatt 12

Abgabetermin: 06.07.2017

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass aus der Unabhängigkeit zweier Ereignisse A, B die Unabhängigkeit auch ihrer Komplemente $\Omega \setminus A$ und $\Omega \setminus B$ folgt.
- (b) Sei $G(n, 1/2)$ der Wahrscheinlichkeitsraum der Graphen mit n Ecken, wobei jede mögliche Kante eines Graphen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ im Graphen auftaucht. Entwickeln Sie einen Begriff von Isomorphismus zwischen endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen und zeigen Sie, dass $G(n, 1/2)$ isomorph zu G_n ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(Markov Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, die keine negativen Werte annimmt. Sei $\mu = \mathbf{E}[X]$ ihr Erwartungswert. Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert $\geq t\mu$ annimmt, höchstens $\frac{1}{t}$ ist; als Formel:

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq t\mu\}) \leq \frac{1}{t}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Zufallsgraph (wie in der Vorlesung definiert) fast sicher zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Wir werfen n Mal eine faire Münze. Was ist die erwartete Anzahl von "Serien"? Eine Serie besteht aus aufeinanderfolgenden Würfeln mit dem gleichen Ergebnis. Die Wurffolge KKKZZKZK hat zum Beispiel fünf Serien (KKK, ZZ, K, Z, K).

(*Hinweis:* Besser zählt man die Grenzen zwischen Serien. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einer gegebenen Position zwischen zwei Würfeln eine Serie endet und die nächste beginnt?)