Konstantinos Stavropoulos

Carl Bürger, Jan Kurkofka

Übungsblatt 12

Abgabetermin: 29.06.2018

Diesmal haben Sie die Möglichkeit bonus Punkte zu erreichen. Der Beitrag dieses Blatts zu den sämmtlichen Punkten aller Blätter sind 20 Punkte. D.h. Sie können 25/20 Punkte zu ihren sämmtlichen Punkte bekommen.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei X eine Menge mit n^2+n+1 Elementen, $n \geq 2$, und sei $\mathcal{L}$ eine Familie bestehend aus n^2+n+1 Teilmengen von X der Mächtigkeit $n+1$. Nehmen Sie an, dass je zwei verschiedene Teilmengen aus $\mathcal{L}$ sich in höchstens einem Punkt schneiden. Ziel ist zu zeigen, dass $(X, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n ist. Die folgenden Hilfsaussagen sind ein möglicher Weg, den Beweis zu führen.

(a) Zeigen Sie mit doppeltem Abzählen, dass jedes Punktepaar aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{L}$ enthalten ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt in höchstens $n+1$ Mengen liegt

(c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt in genau $n+1$ Mengen liegt.

(d) Zeigen Sie, dass sich je zwei Mengen aus $\mathcal{L}$ schneiden.

(e) Überprüfen Sie, dass $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene der Ordnung n ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene der Ordnung n, und sei $A \subseteq X$ eine Menge, in der keine drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Zeigen Sie, dass $|A| \leq n+2$ (für ungerades n kann man sogar zeigen, dass $|A| \leq n+1$).

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Erinnern Sie sich an den Beweis des Satzes der Existenz einer projektiven Ebene der Ordnung n g.d.w. es $n-1$ orth. lat. Quadrate der Ordnung n gibt. Zeigen Sie, dass sich in der Konstruktion aus dem Beweis zu Satz je zwei Geraden in höchstens einem Punkt sich schneiden (vergessen Sie nicht die Geraden Z_i und S_j). Unterscheiden Sie dabei, ob Sie die Definition eines lat. Quadrates benutzen oder die Orthogonalität.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei T ein endlicher Körper mit n Elementen. Wir bezeichnen seine Elemente mit $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, wobei $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$. Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ definieren wir $n \times n$ Matrizen $S^{(k)}$, wobei der Eintrag der Matrix $S^{(k)}$ an der Stelle (i, j) gleich $t_i t_k + t_j$

ist (Multiplikation und Addition sind dabei wie im Körper T). Zeigen Sie, dass $S^{(1)}, S^{(0)}, \ldots, S^{(n-1)}$ eine Menge von paarweise orth. lat. Quadraten der Ordnung n ist (und damit erhalten Sie eine neue Konstruktion einer projektiven Ebene der Ordnung n).

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Fano-Ebene nicht 2-färbbar ist.