Konstantinos Stavropoulos

Carl Bürger, Jan Kurkofka

Übungsblatt 11

Abgabetermin: 22.06.2017

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei G ein bipartiter Graph, in dem die Eckenklassen die Grössen n und m haben. Angenommen, G ist $K_{2,2}$-frei. Beweisen Sie, dass G höchstens $O(m\sqrt{n} + n)$ Kanten hat. (Wenn n ausreichend viel grösser ist als m, dann ist dies eine bessere Abschätzung als die Ungleichung aus dem Satz der Vorlesung.)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Setze $T_n = T(K_n)$. Beweisen Sie die Rekursion

$$(n-1)T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n-1}{k-1} T_k T_{n-k}.$$

(Hinweis: Versuchen Sie darüber nachzudenken, wie man aus einem aufsp. Baum von K_n zwei aufsp. Wurzelbäume für induzierte Teilgraphen mit k und $n-k$ Ecken kriegen kann und umgekehrt. Zählen Sie das auf zwei Arten ab. (eine für jede Richtung))

Aufgabe 3 (2+2+1)

(Noch ein Beweis der Cayley Formel!) Wir bezeichen die Anzahl der aufsp. Bäume des K_n, in denen die Ecke n den Grad k hat, mit N_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

(a) $_+$ Zeigen Sie, dass $(n-1-k)N_k = k(n-1)N_{k+1}$ gilt,

(Hinweis: Denken Sie darüber nach, wie man aus einem aufsp. Baum T mit $\deg_T(n) = k$ einen aufsp. Baum T' mit $\deg_{T'}(n) = k+1$ bekommen kann.)

(b) leiten Sie daraus $N_k = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-1-k}$ ab,

(c) und beweisen Sie so schliesslich die Cayley-Formel.