Konstantinos Stavropoulos

Carl Bürger, Jan Kurkofka

Übungsblatt 10

Abgabetermin: 15.06.2018

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

(a) Betrachten Sie einen ebenen Graphen G, in dem alle Grade gerade sind. Beweisen Sie, dass man die Länder jeder beliebigen ebenen Zeichnung von G mit zwei Farben färben kann (d.h. der duale Graph der Zeichung von G 2-färbar ist).

(Hinweis: Induktion über die Kantenzahl)

(b) Beweisen Sie mittels (a), dass es keinen topologischen ebenen Graphen gibt, bei dem alle Grade gerade sind, alle inneren Länder Dreiecke und das äussere Land ein Fünfeck.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie eine Zeichnung eines ebenen Graphen, in der alle Länder Dreiecke sind (auch das äussere). Schreiben Sie an jede Ecke eine der Zahlen $1, 2, 3$, ohne sonst irgendwelche Regeln zu beachten. Beweisen Sie das es eine gerade Anzahl von Dreiecken (inklusiv des grossen Dreiecks) gibt, an deren Ecken drei verschiedene Zahlen stehen, egal wie Sie die Zahlen verteilt haben.

Aufgabe 3 (3+2)

Wir nennen ein system $\mathcal{N}$ von Teilmengen von X ein *Semi-Unabhängigkeitssystem*, wenn es keine drei Mengen A, B, C mit $A \subset B \subset C$ enthält.

(a) Zeigen Sie mit einer ähnlichen Methode wie im ersten Beweis des Satzes von Sperner, dass $|\mathcal{N}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, wobei $n = |X|$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abschätzung aus (a) für ungerades n nicht verbessert werden kann.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch eine Abwandlung des zweiten Beweises der Vorlesung vom Satz von Sperner, dass es für jedes endliche Poset $(P, \leq)$ eine Antikette maximal möglicher Grösse gibt, die von allen Automorphismen auf $(P, \leq)$ auf sich selbst abgebildet wird (d.h. sie ist ein "Fixpunkt" von allen Automorphismen).