Konstantinos Stavropoulos

Carl Bürger, Jan Kurkofka

Übungsblatt 6

Abgabetermin: 11.05.2017

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

(a) Sei G, in dem alle Ecken mindestens den Grad d haben. Beweisen Sie, dass G einen (nicht notwendig induzierten) Pfad der Länge d enthält.

(b) Sei G mit Maximalgrad 3. Beweisen Sie, dass die Ecken von G so mit zwei Farben gefärbt werden können (jede Ecke erhält eine Farbe), dass es keinen Pfad der Länge 2, dessen 3 Ecken alle die gleiche Farbe haben.

(Hinweis: Betrachten Sie für (b) einen Graphen mit der kleinstmöglichsten Anzahl 'böser' Kanten.)

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Ein *Hamiltonscher Kreis* in G ist ein Kreis, der alle Ecken von G enthält. Mit $L(G)$ bezeichnet man den *Kantengraphen* von G, der durch $L(G) = \{E, \{\{e, e'\} : e, e' \in E(G), e \cap e' \neq \emptyset\}\}$ gegeben ist. Sind die folgenden Aussagen für jeden Graphen G wahr? Wenn nicht, unter welchen zusätzlichen Bedingungen werden Sie wahr?

(a) G ist genau dann zusammenhängend, wenn $L(G)$ zusammenhängend ist.

(b) G ist genau dann Eulersch, wenn $L(G)$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $d \geq 3$ eine ganze Zahl und G ein d-regulärer (jede Ecke hat Grad d), d-kantenzusammenhängender Graph. Beweisen Sie, dass so ein G *tough* ist, was bedeutet, dass das Entfernen von k Ecken aus G höchstens k Komponenten erzeugt (für alle $k \geq 1$).

(Hinweis: Für eine beliebige Eckenmenge $A \subseteq V(G)$ mit $|A| = k$, zählen Sie die Kanten zwischen A und $V(G) \setminus A$ auf zwei Arten ab.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie nochmal den Satz von Mantel per Induktion über n, aber jetzt durch das Entfernen von nur einer Ecke in jedem Schritt.