Konstantinos Stavropoulos Carl Bürger, Jan Kurkofka

Übungsblatt 4

Abgabetermin: 27.04.2017

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Für alle $n \geq k \geq 1$, finden Sie einen kombinatorischen Beweis der Pascalschen Eigenschaft:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

(b) Berechnen Sie die folgende Summe (d.h. finden Sie eine einfache Formel, in der keine Summe vorkommt) für natürliche Zahlen $k \leq m, n$:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Erklären Sie die Bedeutung der folgenden Behauptungen and klären Sie, welche davon wahr sind.

(a) $n^2 = o(n^2 \ln n)$

(b) $n^2 + 10n \ln n = n^2(1 + o(1))$,

(c) $n^2 + 10n \ln n = n^2 + O(n)$,

(d) $\sum_{k=1}^{n} k^9 = \Theta(n^{10})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie die untere Schranke $n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n$ aus dem Satz der Vorlesung.

(*Hinweis*: Benutzen Sie nochmal die Tatsache $1 + x \leq e^x$ aus der Vorlesung.)

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit genau k Fixpunkten.

(b) Beweisen Sie die Gleichung

$$D(n) = n! - nD(n-1) - \binom{n}{2}D(n-2) - \ldots - \binom{n}{n-1}D(1) - 1.$$

Aufgabe 5 $^{++}$ (4 Punkte)

Es seien natürliche Zahlen k, m, n mit $k \leq m$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i} = \binom{m}{k}.$$

(*Hinweis*: Für einen kombinatorischen Beweis, definieren Sie zwei Mengen

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

Zusätzlich, für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $E_i = \{A \subseteq X \cup Y : y_i \in A\}$. Können Sie die rechte Seite der Formel (und danach auch die linke) mit Hilfe der Mengen E_i ausdrücken?)