Konstantinos Stavropoulos

Carl Bürger, Jan Kurkofka

Übungsblatt 3

Abgabetermin: 20.04.2017

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

(a) Wir betrachten zwei Folgen $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ mit verschiedenen reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass es immer Indizes $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ gibt, mit $k = \lceil n^{1/4} \rceil$ so dass die dadurch bestimmte Teilfolge sowohl in a als auch in b steigend oder fallend ist (alle vier Kombinationen sind erlaubt, z.B. "steigend in a, fallend in b", "fallend in a, fallend in b", usw.).

(b) Zeigen Sie, dass das Erdös-Szekeres-Lemma in folgendem Sinn optimal ist: Gegeben $n \geq 1$, geben Sie eine reelle Zahlenfolge der Länge n^2, die keine steigende oder fallende Teilfolge der Länge $n + 1$ enthält.

(*Hinweis*: Versuchen Sie eine Folge aus "fallenden Stücken" zu konstruieren, die selbst "steigend" sind.)

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

(a) $\preceq_i$, $i = 1, \dots, k$ seien Ordnungen auf einer Menge X. Beweisen Sie, dass $\cap_{i=1}^{k} \preceq_i$ wieder eine Ordnung auf X ist.

(b) $^+$ Beweisen Sie, dass sich jede partielle Ordnung $\preceq$ auf einer endlichen Menge X als Schnitt von *linearen* Ordnungen von X schreiben lässt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der geordneten Paare (A, B) mit der Eigenschaft $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

(*Hinweis*: Sowie die charakteristische Funktion f_A eine entsprechende Abbildung einer Teilmenge A ist, versuchen Sie für jedes Paar (A, B) der Behauptung eine geeignete entsprechende Abbildung zu finden.)

Aufgabe 4 (2+2+1 Punkte)

(a) In wie viele Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ stehen 1 und 2 nicht nebeneinander?

(b) Wie viele Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ bestehen aus einem einzigen Zyklus?

(c) Auf wie vielen Arten können n Personen um einen Tisch sitzen? (uns interessiert nur die relative Position jeder Person zu den anderen, nicht die eigentliche Position der Person am Tisch)