Konstantinos Stavropoulos

Bereich DM

Übungsblatt 12

Abgabetermin: 07.07.2017

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass aus der Unabhängigkeit zweier Ereignisse A, B die Unäbhangigkeit auch ihrer Komplemente $\Omega \setminus A$ und $\Omega \setminus B$ folgt.

(b) Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem es n unabhängige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ gibt mit der Eigenschaft $0 < P(A) < 1$ für jedes i. Zeigen Sie, dass dann $|\Omega| \geq 2^n$ ist.

(*Hinweis*: Mit Hilfe von (a), versuchen Sie Ω in vielen disjukten Ereignissen positiver Wahrscheinlichkeit zu partitionieren.)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Zufallsgraph (wie in der Vorlesung definiert) fast sicher zusammenhängend ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(Markov Ungleichung) Sei X eine Zufallsvariable, die keine negativen Werte annimmt. Sei $\mu = \mathbf{E}[X]$ ihr Erwartungswert. Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert $\geq t\mu$ annihmt, höchstens $\frac{1}{t}$ ist; als Formel:

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq t\mu\}) \leq \frac{1}{t}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Wir werfen n Mal eine faire Münze. Was ist die erwartete Anzahl von "Serien"? Eine Serie besteht aus aufeinanderfolgenden Würfen mit dem gleichen Ergebnis. Die Wurffolge KKKZZKZK hat zum Beispiel fünf Serien (KKK, ZZ, K, Z, K).

(*Hinweis*: Besser zählt man die Grenzen zwischen Serien. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einer gegebenen Position zwischen zwei Würfen eine Serie endet und die nächste beginnt?)