Konstantinos Stavropoulos

Bereich DM

Übungsblatt 11

Abgabetermin: 30.06.2017

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Erinnern Sie sich an den Beweis des Satzes der Existenz einer projektiven Ebene der Ordnung n g.d.w. es $n-1$ orth. lat. Quadrate der Ordnung n gibt. Zeigen Sie, dass sich in der Konstruktion aus dem Beweis zu Satz je zwei Geraden in höchstens einem Punkt sich schneiden (vergessen Sie nicht die Geraden Z_i und S_j). Unterscheiden Sie dabei, ob Sie die Definition eines lat. Quadrates benutzen oder die Orthogonalität.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei T ein endlicher Körper mit n Elementen. Wir bezeichnen seine Elemente mit $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, wobei $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$. Für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ definieren wir $n \times n$ Matrizen $S^{(k)}$, wobei der Eintrag der Matrix $S^{(k)}$ an der Stelle (i, j) gleich $t_i t_k + t_j$ ist (Multiplikation und Addition sind dabei wie im Körper T). Zeigen Sie, dass $S^{(1)}, S^{(0)}, \ldots, S^{(n-1)}$ eine Menge von paarweise orth. lat. Quadraten der Ordnung n ist (und damit erhalten Sie eine neue Konstruktion einer projektiven Ebene der Ordnung n).

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Fano-Ebene nicht 2-färbbar ist.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

Sei G ein bipartiter Graph, dessen Eckenklassen beide n Ecken enthalten und der keinen $K_{2,2}$ als Teilgraphen enthält.

(a) Zeigen Sie mit doppeltem Abzählen, dass G höchstens

$$\frac{1}{2}n(1 + \sqrt{4n-3})$$

Kanten hat.

(b) Zeigen Sie, dass ein solches G mit exakt dieser Anzahl von Kanten genau dann existiert, wenn es eine projektive Ebene der Ordnung q gibt mit $n = q^2 + q + 1$.