Übungsblatt 10

Abgabetermin: 23.06.2017

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie nochmals Aufgabe 5 von Blatt 9, diesmal mit dem Matrix-Baum-Satz.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{L}$ ein System von Teilmengen von X, das den Bedingungen (P1), (P2) und der folgenden Bedingung (P0') genügt:

Es gibt mindestens zwei verschiedene Geraden $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, die jede mindestens 3 Punkte haben.

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine Menge mit n^2+n+1 Elementen, $n \geq 2$, und sei $\mathcal{L}$ eine Familie bestehend aus n^2+n+1 Teilmengen von X der Mächtigkeit $n+1$. Nehmen Sie an, dass je zwei verschiedene Teilmengen aus $\mathcal{L}$ sich in höchstens einem Punkt schneiden. Ziel ist zu zeigen, dass $(X, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n ist. Die folgenden Hilfsaussagen sind ein möglicher Weg, den Beweis zu führen.

(a) Zeigen Sie mit doppeltem Abzählen, dass jedes Punktepaar aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{L}$ enthalten ist.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt in höchstens $n+1$ Mengen liegt

(c) Zeigen Sie, dass jeder Punkt in genau $n+1$ Mengen liegt.

(d) Zeigen Sie, dass sich je zwei Mengen aus $\mathcal{L}$ schneiden.

(e) Überprüfen Sie, dass $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene der Ordnung n ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene der Ordnung n, und sei $A \subseteq X$ eine Menge, in der keine drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Zeigen Sie, dass $|A| \leq n+2$ (für ungerades n kann man sogar zeigen, dass $|A| \leq n+1$).