Übungsblatt 7

Abgabetermin: 26.05.2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Hinrichtung (i)$\Rightarrow$(ii)-(v) des Satzes der äquivalenten Charakterisierungen für Bäume.

Aufgabe 2 (2+2)

(a) Die assoziierte 'Baumordnung' $\leq_{(T,r)}$ eines Wurzelbaums (T, r) ist die Relation auf $V(T)$ definiert durch: $x \leq_{(T,r)} y$ genau dann, wenn x im Pfad von y nach r liegt. Zeigen Sie dass $\leq_{(T,r)}$ eine partielle Ordnung ist.

(b) $_+$ Der *transitive Abschluss* eines Wurzelbaums (T, r) ist der Graph Y mit Eckenmenge $V(Y) = V(T)$ und Kantenmenge $E(Y) = \{xy \mid x \leq_{(T,r)} y\}$. Für einen Graphen G, sei $\mathcal{T}_G$ die Menge der Wurzelbäume (T, r) mit der Eigenschaft dass G ein Teilgraph des transitiven Abschlusses von (T, r) ist. Die *Baumtiefe* eines Graphen G ist die maximale Exzentrizität der Wurzel eines Wurzelbaums in $\mathcal{T}_G$:

$$\max\{ex_T(r) \mid (T, r) \in \mathcal{T}_G\}.$$

Zeigen Sie dass die Baumtiefe des Pfades P_n nicht mehr als etwa $\log_2 n$ ist.

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Sei $T = (V, E)$ ein Baum und v eine Ecke von T. Sei

$$\tau(v) = \max(|V(T_1)|, |V(T_2), \dots, |V(T_k)|),$$

wobei $T_1, \dots, T_k$ alle Komponenten des Graphen $T - v$ sind. Das *Zentroid* des Baums T ist die Menge aller Ecken $v \in V$ mit minimalem $\tau(v)$.

(a) Ist das Zentroid immer identisch mit dem Zentrum $C(T)$?

(b) Beweisen Sie: Wenn v eine Ecke im Zentroid ist, dann ist $\tau(v) \leq \frac{1}{2}|V(T)|$.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)

Zur Erinnerung, ein *Hamiltonscher Kreis* in G ist ein Kreis, der alle Ecken von G enthält. Für einen Graphen G und eine natürliche Zahl $k \geq 1$ definineren wir den Graphen $G^{(k)}$ als den Graphen mit Eckenmenge $V(G)$, in dem zwei (verschiedene) Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn ihr Abstand in G höchstens k ist.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Baum T der Graph $T^{(3)}$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

(Hinweis: Versuchen Sie per Induktion über die Eckenzahl etwas stärkeres zu zeigen: für jede Kante $vv' \in E(T)$ gibt es einen Hamiltonschen Kreis in $T^{(3)}$, der die Kante vv' enthält.)

(b) Finden Sie einen zusammenhängenden Graphen G, so dass $G^{(2)}$ keinen Hamiltonschen Kreis besitzt.