Konstantinos Stavropoulos

Bereich DM

Übungsblatt 6

Abgabetermin: 18.05.2017

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

(a) Sei G, in dem alle Ecken mindestens den Grad d haben. Beweisen Sie, dass G einen (nicht notwendig induzierten) Pfad der Länge d enthält.

(b) Sei G mit Maximalgrad 3. Beweisen Sie, dass die Ecken von G so mit zwei Farben gefärbt werden können (jede Ecke erhält eine Farbe), dass es keinen Pfad der Länge 2, dessen 3 Ecken alle die gleiche Farbe haben.

(Hinweis: Betrachten Sie für (b) einen Graphen mit der kleinstmöglichsten Anzahl 'böser' Kanten.)

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei G ein zusammenhangender Graph, in dem je zwei verschiedene Ecken u, v entweder 0 oder 5 gemeinsame Nachbarn haben. Beweisen Sie, dass G k-regulär ist für eine Zahl k.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein *Hamiltonscher Kreis* in G ist ein Kreis, der alle Ecken von G enthält. Mit $L(G)$ bezeichnet man den *Kantengraphen* von G, der durch $L(G) = \{E, \{\{e, e'\} : e, e' \in E(G), e \cap e' \neq \emptyset\}\}$ gegeben ist. Sind die folgenden Aussagen fur jeden Graphen G wahr?

(a) G ist genau dann zusammenhängend, wenn $L(G)$ zusammenhängend ist.

(b) G ist genau dann Eulersch, wenn $L(G)$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte) Sei G ein *kritisch* 2-*zusammenhängender Graph*; das bedeutet, dass G 2-zusammenhängend ist, aber kein Graph $G - e$ für $e \in E(G)$ ist 2-zusammenhängend.

(a) Beweisen Sie, dass mindestens eine Ecke von G Grad 2 hat.

(b) Finden Sie für jedes n ein Beispiel eines kritisch 2-zusammenhängenden Graphen mit einer Ecke vom Grad mindestens n.

(c) Ist es wahr, dass jeder kritisch 2-zusammenhängende Graph durch Ankleben von 'Ohren' aus einem Kreis aufgebaut werden kann, und zwar so, dass jeder im Laufe der Konstruktion entstehenden Graphen auch kritisch 2-zusammenhängend ist?