Konstantinos Stavropoulos

Bereich DM

Übungsblatt 4

Abgabetermin: 05.05.2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der geordneten Paare (A, B) mit der Eigenschaft $A \subseteq B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

(*Hinweis*: Sowie die charakteristische Funktion f_A eine entsprechende Abbildung einer Teilmenge A ist, versuchen Sie für jedes Paar (A, B) der Behauptung eine geeignete entsprechende Abbildung zu finden.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Permutation $\sigma : X \to X$; mit σ^k bezeichnen wir die Permutation , die wir durch k-fache Anwendung von σ erhalten, genauer: $\sigma^1 = \sigma$ und $\sigma^k = \sigma \circ \sigma^{k-1}$. Definieren Sie fonlgendermassen eine Relation $\approx$ auf der endlichen Menge X: Genau dann ist $i \approx j$, wenn es eine Zahl $k \geq 1$ gibt mit $\sigma^k(i) = j$. Beweisen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf X ist, und dass die Äquivalenzklassen gerade die Zyklen von σ sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Erklären Sie die Bedeutung der folgenden Behauptungen and klären Sie, welche davon wahr sind.

(a) $n^2 = o(n^2 \ln n)$

(b) $n^2 + 5n \ln n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$,

(c) $n^2 + 5n \ln n = n^2 + O(n)$,

(d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Theta(n^4)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie die untere Schranke $n! \geq e \left(\frac{n}{e}\right)^n$ aus dem Satz der Vorlesung.

(*Hinweis*: Benutzen Sie nochmal die Tatsache $1 + x \leq e^x$ aus der Vorlesung.)

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Summen (d.h. finden Sie eine einfache Formel, in der keine Summe vorkommt).

(a) Für natürliche Zahlen $k \leq m, n$,

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

(b) $^{+}$ Für natürliche Zahlen $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k}$$

.