Konstantinos Stavropoulos

Bereich DM

Übungsblatt 3

Abgabetermin: 28.04.2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R eine Relation auf einer endlichen Menge X, so dass es keine endliche Folge $x_1, x_2, \dots, x_k$ von mindestens zwei Elementen aus X gibt, für die $x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{k-1}Rx_k, x_kRx_1$ ist (so ein R heisst *azyklisch*). Zeigen Sie, dass es eine Ordnung $\preceq$ auf X gibt, für die $R \subseteq \preceq$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass jedes endliche Poset in $(\mathbb{N}, |)$ (geordnet mit Teilbarkeitsrelation) eingebettet werden kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten zwei Folgen $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ mit verschiedenen reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass es immer Indizes $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ gibt, mit $k = \lceil n^{1/4} \rceil$ so dass die dadurch bestimmte Teilfolge sowohl in a als auch in b steigend oder fallend ist (alle vier Kombinationen sind erlaubt, z.B. "steigend in a, fallend in b", "fallend in a, fallend in b", usw.).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $[a_1, b_1], \dots, [a_{n^2+1}, b_{n^2+1}] \subseteq \mathbb{R}$ eine Familie abgeschlossene Intervale reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass entweder $n+1$ Intervale der Familie einen gemeinsamen Punkt haben, oder $n+1$ Intervale der Familie paarweise disjunkt sind.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

(a) $\preceq_i$, $i = 1, \dots, k$ seien Ordnungen auf einer Menge X. Beweisen Sie, dass $\bigcap_{i=1}^{k} \preceq_i$ wieder eine Ordnung auf X ist.

(b) $^+$ Beweisen Sie, dass sich jede partielle Ordnung $\preceq$ auf einer endlichen Menge X als Schnitt von *linearen* Ordnungen von X schreiben lässt.