Übungsblatt 1

Abgabetermin: 13.04.2017

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Finden Sie zwei Relationen R und S auf einer menge X, so dass $R \circ S \neq S \circ R$.

(b) Zeigen Sie, dass für eine Relation R auf einer Menge X genau dann $R \cap R^{-1} = \Delta_X$ gilt, wenn R reflexiv und antisymmetrisch ist.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Sind die nachstehenden Relationen R auf X Äquivalenzrelationen?

(a) $X = \mathbb{R}^2$, $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R\colon \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

(b) $X = \mathbb{R}^2$, $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R\colon \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$.

(c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R\colon \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Der nachfolgende (falsche) Beweis versucht zu zeigen, dass jede Relation, die symmetrisch und transitiv ist, auch reflexiv sein muss:

Ist R eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X, dann folgt für alle $x, y \in X$ mit $(x, y) \in R$ wegen der Symmetrie auch $(y, x) \in R$ und wegen der Transitivität aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ auch $(x, x) \in R$. Die relation R ist also eine Äquivalenzrelation.

Geben Sie ein Gegenbeispiel dieser Aussage und erklären Sie, weshalb die Argumentation fehlerhaft ist.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)

(a) Seien $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ endlichen Mengen, und sei $R \subseteq X \times Y$ eine Relation. Erweitern Sie die definition der Adjazenzmatrix auf diesen Fall.

(b) Seien X, Y, Z endliche Mengen sowie $R \subseteq X \times Y$ und $S \subseteq Y \times Z$ Relationen, und seien A_R und A_S ihre Adjazenzmatrizen. Wenn Sie bei der Definition der Adjazenzmatrix in (a) alles richtig gemacht haben, dann sollte das Matrixprodukt $A_R A_S$ definiert sein. Finden Sie den Zusammenhang zwischen $R \circ S$ und dem Matrixprodukt $A_R A_S$ heraus und beschreiben Sie ihn.

(*Hinweis*: Betrachten Sie die Elemente der Matrix $A_R A_S$, die nicht Null sind.)