Konstantinos Stavropoulos

Bereich DM

Übungsblatt 8

Abgabetermin: 02.06.2017

Aufgabe 1 (1+2+2)

(a) Zeigen Sie, dass für eine konvexes Viereck $ABCD$ die Ungleichungen

$$|AB| + |CD| \leq |AC| + |BD| \text{ und } |AD| + |BC| \leq |AC| + |BD|$$

gelten.

(b) Betrachten Sie ein Menge V von n Punkten in der Ebene. Definieren Sie eine Gewichtsfunktion auf der Kantemenge des vollständigen Graphen auf V: Das Gewicht einer Kante xy ist der Abstand der Punkte x und y. Zeigen Sie, dass kein minimal aufspannende Baum dieses gerichteten Graphen eine Ecke vom Grad 7 oder höher hat.

(c) Zeigen Sie, dass es einen minimal aufspannenden Baum des Graphen von (b) gibt, dessen Kanten nicht kreuzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(Allgemeiner Algorithmus für aufspannende Bäume) Betrachten Sie den folgenden Algorithmus zur Bestimmung eines minimal aufspannenden Baums. Die Eingabe ist ein zusammenhängender gewichteter Graph $G = (V, E, w)$. Setzen Sie $E_0 = \emptyset$. Wenn E_{i-1} schon definiert ist, wählen Sie eine beliebige Komponente V_i des Graphen (V, E_{i-1}), nehmen Sie eine Kante e_i von minimalem Gewicht unter den Kanten mit einer Ecke in V_i und der anderen nicht in V_i, und setzen Sie $E_i \cup \{e_i\}$. Zeigen Sie, dass (V, E_{n-1}) ein minimal aufspannender Baum ist. (Orientieren Sie sich am Korrektheitsbeweis für den Algorithmus von Jarnik).

Beweisen Sie, dass daraus die Korrektheit sowohl von Kruskals als auch von Jarniks Algorithmus folgt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachten Sie eine Unterteilung eines Dreiecks wie beim Sperner-Lemma mit der Eigenschaft dass nur die innere Fläche der Dreiecks unterteilt wird. D.h. die Seiten des grossen Dreiecks sind nicht unterteilt (sie bleiben einfach Kanten ohne innere Ecken). Schreiben Sie an jede Ecke eine der Zahlen $1, 2, 3$, ohne sonst irgendwelche Regeln zu beachten. Beweisen Sie das es eine gerade Anzahl von Dreiecken (inklusiv des grossen Dreiecks) gibt, an deren Ecken drei verschiedene Zahlen stehen, egal wie Sie die Zahlen verteilt haben.