SEMINAR: TROPISCHE GEOMETRIE

Zeit/Ort: Mi 14.15–15.45 Uhr, Geom 432.

Vorbereitende Literatur: Bitte lesen Sie alle möglichst bald, auf jeden Fall *vor unserer ersten Sitzung*, die einführenden Artikel [Ga] und [Mi6], um einen Eindruck über die Zielrichtung des Seminars zu bekommen.

Programm

(1) Amoeben und die Topologie komplexer Hyperflächen. [Mi1],[Mi2]
(2) Tropische Varietäten I. [Mi4],[EiKaLi],[Sp1]
(3) MAX PUMPERLA: Überblick: Algebraische Geometrie.
(4) Tropische Kurven I: Einführung und Überblick.
(5) Tropische Kurven II: Enumerative Geometrie. [GaMa1],[Mi3],[NiSi]
(6) Tropische Kurven III:Abstrakte Kurven. [GaKe],[MiZh]
(7) Tropische Kurven IV: Elliptische Kurven. [KaMaMa],[MiZh]
(8) Tropische Varietäten II. [Mi4],[EiKaLi],[Sp1]
(9) Gröbner-Fächer und die Berechnung tropischer Varietäten. [Boetal]
(10) Tropische lineare Räume und die tropischen Grassmannschen. [Sp1],[SpSt]
(11) Die tropischen Modulräume $\mathscr{M}_{0,n}^{\mathrm{trop}}$. [GaKeMa],[Mi5]
(12) Nichtarchimedische Geometrie und tropische Kurven. [Sp1]
(13) Tropische Schnitttheorie. [AlRa],[AlRa2],[Mi5]

Allgemeine Vorbemerkungen

Dieses Seminar ist in zweierlei Hinsicht etwas Besonderes. Zum einen baut es nicht auf einer weiterführenden Vorlesung auf, auch wenn bei einzelnen Vorträgen Hintergrund aus der algebraischen Geometrie, der Funktionentheorie oder der Topologie verwendet wird. Zum anderen behandelt es ein derart junges Forschungsthema, dass es noch keinen durchstrukturierten Text dazu gibt. Dies bedingt eine abschreckend lange Literaturliste. Zum Glück braucht jeder einzelne nur einen kleinen Teil davon selber zu lesen, so dass mir der Umfang nicht unzumutbar erscheint.

Trotzdem verlangt das Seminar von Ihnen ein größeres Engagement und vor allem eine größere Selbständigkeit als vielleicht üblich. Versuchen Sie bitte immer erst, alleine zurechtzukommen. Internet und Bibliothek bieten umfangreiche Recherchemöglichkeiten, und ein Seminar ist der geeignete Zeitpunkt, mit diesen Möglichkeiten umgehen zu lernen. Insbesondere das Preprint-Archiv `http://arxiv.org/find/math` und das mathematische Referateorgan der AMS (American Mathematical Society) `http://www.ams.org/mathscinet/search.html` bieten hervorragende Recherchiermöglichkeiten. Für kurze Beschreibungen gängiger mathematischer Begriffe darf man auch einmal bei Wikipedia nachsehen, wobei die englische Version (`en.wikipedia.org`) gewöhnlich die besseren Ergebnisse liefert.

Zur Vorbereitung Ihres Vortrags. Zunächst müssen Sie sich natürlich einen Überblick über das von Ihnen bearbeitete Thema verschaffen. Verzetteln Sie sich an dieser Stelle nicht. Sie müssen nicht alles im Detail verstehen, und zu diesem Zeitpunkt schon gar nicht. Wichtig ist, dass Sie möglichst schnell ein grobes Verständnis erlangen. Als zweiten Schritt sollten Sie versuchen, geeignete Einzelthemen für den Vortrag zu identifizieren. Was sind die wesentlichen Ideen, die auf jeden Fall vorkommen sollen? Welche Begriffe aus dem mathematischen Umfeld muss ich erklären? Füllen Sie dann langsam das logische Skelett von außen nach innen. Beweise lesen Sie, wenn es für das weitere Verständnis förderlich ist. Bitte denken Sie daran, ein Seminarvortrag ist keine Vorlesung. Es geht nicht um die lückenlose Präsentation einer Theorie, sondern um die gnadenlose Konzentration auf das Wesentliche. Lösen Sie sich von den gegebenen Texten! Erst wenn Sie das Gelesene in eigenen Worten, ja vielleicht sogar in wenigen prägnanten Sätzen wiedergeben können, haben Sie es verstanden.

Für den eigentlichen Vortrag erwarte ich eine weitgehend freie Präsentation. Wie gesagt, ein Seminarvortrag ist keine Vorlesungsstunde.

Sie halten ja nur einen Vortrag im Semester, da darf man eine optimale Vorbereitung erwarten. Vor allem möchte ich niemanden mit einem Zettel in der Hand sehen. Die Aufmerksamkeit, den Sie dem Zettel entgegenbringen, fehlt Ihrem Vortrag und Ihren Zuhörern. Sie müssen Ihren Vortrag also auswendig lernen. Eine Ausnahme lasse ich nur für längere Formeln gelten, die aber vielleicht besser nur projiziert oder, wenn wiederholt benutzt, auf vervielfältigten Zetteln präsentiert werden sollten. Auch ein gelegentlicher kurzer Blick auf ein irgendwo abgelegtes Papier ist akzeptabel.

Wenn Sie ein Thema alleine bearbeiten, beneiden Sie vielleicht diejenigen, die sich die Last mit jemand anderem teilen. Bedenken Sie aber, dass die Abstimmung manchmal mehr Reibung verursacht als Arbeit abgenommen wird. Es hilft ja auch nicht viel, denn die meiste Arbeit verursacht das Verständnis, und das lässt sich schlecht teilen.

Noch etwas Organisatorisches: Die Aufteilung der Vorträge und die Betreuung in der Vorbereitungsphase wird von Herrn Pumperla geleistet. Da es keine Seminarvorbesprechung geben wird, machen Sie bitte frühestmöglich per Email (max.pumperla@math.uni-hamburg.de) oder telefonisch (040-42838-5190) einen Termin aus oder nehmen Sie die Sprechstunde wahr. Sie helfen uns damit, unsere Arbeit effizient zu organisieren, und wir müssen Sie nicht unhöflich mit dem Verweis auf dringende andere Arbeit abweisen, wenn Sie unangemeldet an die Tür klopfen.

Nun wünsche ich allen viel Spaß und Erfolg bei der Beschäftigung mit dem Seminarthema. Ich hoffe, dass Sie als wesentlichen Eindruck ein Bild von der Einheit und Lebendigkeit aktueller mathematischer Forschung mitnehmen! Und vielleicht ergibt sich aus Ihrem Thema auch ein Ansatzpunkt für eine Abschlussarbeit, sei es für das Staatsexamen oder das Diplom.

Bernd Siebert

(1) Amöben und die Topologie komplexer Hyperflächen

Die grundlegende Referenz für diesen Vortrag ist [Mi1]. Dies ist ein Übersichtsartikel, der nur wenige Beweise enthält. Suchen Sie die zitierte Literatur und entscheiden Sie, welche Beweise Sie im Seminar skizzieren oder sogar vollständig vorführen möchten.

Die wesentlichen Eigenschaften von Amöben werden bis §2.6 vorgestellt. Diese sollten im wesentlichen vollständig vorgetragen werden, gerne in anderer Reihenfolge, wenn Sie es für vernünftig halten.

Es wäre schön, ist aber nicht absolut erforderlich, wenn Sie auch §4.6–4.8 präsentieren könnten. Diese Abschnitte skizzieren die Arbeit [Mi2] über den Zusammenhang von Amöben mit der Geometrie der entsprechenden komplexen Varietät, hier im Hyperflächenfall. Dieser Teil verlangt wesentlich mehr Hintergrundwissen. Die dabei benutzte tropische Geometrie sollte nur als Faktenwissen präsentiert werden, da sie Gegenstand der nächsten Vorträge ist.

(2),(8) Tropische Varietäten

Wir definieren tropische Varietäten zunächst konkret aus entartenden Familien von Varietäten. Wir beginnen also mit einer Anzahl polynomialer Gleichungen $f_1(t,z) = 0, \ldots, f_k(t,z) = 0$, $z \in (\mathbb{C}^*)^n$, parametriziert durch $t \in \mathbb{C}^*$. Das Bild der Lösungsmenge $V_t \subset (\mathbb{C}^*)^n$ unter der Abbildung

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \big(-\log_{|t|} |z_1|, \ldots, -\log_{|t|} |z_n| \big)$$

ist dann für jedes t mit $|t| < 1$ eine sogenannte Amöbe. Die *Tropisierung* der Familie komplexer Varietäten $\{V_t\}_t$ ist der Limes $t \to 0$ dieser Amöben (im Sinne der Hausdorff-Topologie).[1]

Der wesentliche Punkt ist, dass man diesen Limes auch rein "tropisch" berechnen kann, also durch Betrachtung stückweise linearer Gleichungen. Dazu gibt es verschiedene Methoden:

(1) Man "tropisiert" die definierenden Gleichungen f_i (genauer: das definierende Ideal).
(2) Man "tropisiert" die Varietät.
(3) Man bettet den umgebenden Raum $X := (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^*$ in eine sogenannte *torische Varietät* $\tilde{X} = X \cup D$ so ein, dass der Abschluss von $\bigcup_t V_t$ in $\tilde{X}$ die Komponenten von D transversal schneidet. Die tropische Varietät ist dann der zugehörige *duale Schnittkomplex.*

(3) erscheint mir für das Seminar weitgehend ungeeignet, da es zuviel Hintergrundwissen braucht (siehe meine Arbeiten mit Gross und Nishinou sowie [Sp1] und [Te]). Schön wäre höchstens eine exemplarische Diskussion am Beispiel einer ebenen Kurve.

Ich stelle mir stattdessen vor, dass Sie viel Zeit mit dem Hyperflächenfall verbringen. Dieser Fall ist in [St] behandelt. Insbesondere sollten Sie die polyedrische Natur erklären und die Gewichtsbedingung ("balancing condition") ausführlich diskutieren.

Die Äquivalenz zwischen (1) und (2) im allgemeinen Fall ist Thm. 2.2.5 in [EiKaLi]. Diese Referenz ist sehr algebraisch und nicht so leicht verständlich. Es wäre trotzdem schön, wenn etwas dazu gesagt werden könnte.

Der Zusammenhang zwischen dem Grenzwertstandpunkt und den algebraischen Standpunkten ist meines Wissens nur im Hyperflächenfall

[1] Das Minuszeichen führe ich ein, um den Fall $t \to 0$ statt $t \to \infty$ zu betrachten und trotzdem auf die Max-Plus-Algebra zu kommen statt auf die Min-Plus-Algebra. Dies ist eine Konventionsfrage.

ausgearbeitet [Mi2] und sollte schon im ersten Vortrag diskutiert worden sein. Falls nicht, könnte hier noch ein geeigneter Platz sein. Bitte setzen Sie sich diesbezüglich mit dem ersten Vortragenden in Verbindung.

Teil I sollte sich auf den Hyperflächenfall ($k = 1$) beschränken. In Teil II, den ich hinter die Tropischen Kurven gelegt habe, können wir dann beliebige Kodimension betrachten und eine Definition abstrakter tropischer Varietäten versuchen. Die Hauptreferenz ist [Mi4], die Motivation vom eingebetteten Standpunkt her folgt aus [EiKaLi]. Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Kompaktifizierung tropischer Varietäten, die aber in Mikhalkins Vorschlag für die Definition abstrakter tropischer Varietäten bereits enthalten ist. Die Aufteilung und genaue Auswahl der Themen ist den beiden Vortragenden überlassen, sollte aber aufeinander abgestimmt sein.

(4),(5),(6),(7) Tropische Kurven

Der Großteil der Untersuchungen in der tropische Geometrie beschäftigt sich bisher mit tropischen Kurven. Vor allem der Fall ebener Kurven ist intensiv untersucht worden. Hier sind tropische Kurven Hyperflächen, werden also durch eine Gleichung gegeben. Dies ist auch historisch ein sehr wichtiger Fall: Mikhalkins Arbeit [Mi3] über Zählprobleme für ebene algebraische Kurven durch tropische Kurven markiert den eigentlichen Beginn der tropischen Geometrie. Neben ebenen tropischen Kurven betrachtet man tropische Kurven im $\mathbb{R}^n$ für $n > 2$ und nichteingebettete, also abstrakte tropische Kurven.

Enumerative Probleme für tropische Kurven sind Gegenstand von Teil II der Reihe zu tropischen Kurven. Hauptreferenz hierfür ist [Mi3]. Der darin gegebene Beweis der Korrespondenz zu algebraischen Kurven liegt jenseits der Möglichkeiten des Seminars. (Zur Korrespondenz zwischen tropischen und algebraischen Kurven siehe auch [Sh],[NiSi],[Sp1].) Sie sollten also vor allem auf die elementaren Aspekte der Korrespondenz eingehen. Die Unabhängigkeit der tropisch definierten Zahlen ist in [GaMa1] diskutiert. Die Verallgemeinerung auf höhere Kodimension findet sich in [NiSi], andere enumerative Aspekte für ebene Kurven in [GaMa2],[GaMa3]. Es gibt auch interessante Anwendungen auf reelle enumerative Probleme (Stichwort: Welschinger-Invariante), dies scheint mir aber zu weit vom Seminarthema wegzuführen.

Eine abstrakte tropische Kurve ist einfach ein positiv reell gewichteter Graph. Die Gewichte der Kanten interpretiert man als Länge einer eingebetteten tropischen Kurve. Die Theorie abstrakter tropischer Kurven ist analog zur Theorie Riemannscher Flächen (oder algebraischer Kurven). Diese Analogie sollte in Teil III herausgearbeitet werden. Als Hauptreferenz eignet sich [MiZh], andere Aspekte finden sich in [GaKe]. Teil I soll einen Überblick über die Teile II und III geben, sicher auch Verbindungen aufzeigen und sie ansonsten etwas entlasten. Die Vortragenden der Teile II und III müssen sich also überlegen, welche Aussagen sich sinnvoll bereits in Teil I erledigen lassen.

Teil IV ist der Spezialfall abstrakter tropischer Kurven, die genau einen geschlossenen, einfachen Kurvenzug enthalten. Dies sind die tropischen Analoga der elliptischen Kurven. Im Vortrag sollte wieder die Analogie zur Theorie komplexer elliptischer Kurven herausgearbeitet werden, insbesondere das Gruppengesetz, die j-Invariante und Theta-Funktionen. Vorsicht: Die Theorie elliptischer Kurven über algebraischen Zahlkörpern ist sehr reich, hier aber völlig irrelevant, wir arbeiten über $\mathbb{C}$. Eine elementare Referenz für die uns interessierenden Aspekte ist zum Beispiel [Ki]. Als Hauptreferenz zur tropischen Geometrie sollte [KaMaMa] dienen, neben der allgemeinen Referenz [MiZh] für abstrakte tropische Kurven. Das Gruppengesetz im eingebetteten Fall findet sich in [Vi].

(9) Gröbner-Fächer und die Berechnung tropischer Varietäten

Hier geht es um die Berechenbarkeit tropischer Varietäten zu entartenden Familien von Varietäten in höheren Kodimensionen. Tropische Hyperflächen zu berechnen sind natürlich kein Problem. In höheren Kodimensionen muss man aber a priori den Schnitt über unendlich viele tropische Hyperflächen nehmen, nämlich für die Tropisierung *jeder* auf der Varietät verschwindenden Gleichung. Es reichen natürlich endlich viele, und das algorithmische Problem besteht darin, solche endlich vielen Gleichungen effektiv auszuwählen.

Im Prinzip geht dies mit Gröbnerbasen, des wichtigsten Werkzeugs zur algorithmischen Untersuchung polynomialer Gleichungssysteme. Genauer betrachtet man den Gröbnerfächer, der Gröbnerbasen unter Variation der Gewichtsfunktion klassifiziert. Dies ist der Standpunkt der Schule von Bernd Sturmfels zur tropischen Geometrie [St].

Hieraus lässt sich ein brauchbarer Algorithmus zur expliziten Berechnung tropischer Varietäten entwickeln [Boetal]. Anders Jensen hat diesen im C-Programm Gfan implementiert [Je].

Für Gröbnerbasen gibt es einige lesbare Texte, zum Beispiel [CoLiSh]. Im Vortrag soll der Buchberger-Algorithmus aber nur angedeutet werden, eine Erklärung im Detail hält zu sehr auf. Der Fokus sollte stattdessen auf der Anwendung auf die tropische Geometrie liegen, und insbesondere auf dem Programm Gfan. Sie sollten einige Zeit damit verbracht haben, mit Gfan Beispiele durchzurechnen. Erfolgreiche Beispiele finden sich im Programmpaket. Sie werden aber auch schnell merken, wie leicht man an die Grenzen der praktischen Berechenbarkeit stösst. Es bietet sich an, wie in [St] im Vortrag eine Echtzeitvorführung von Gfan zu haben.

(10) Tropische lineare Räume und die tropischen Grassmannschen

Grassmann-Varietäten oder kurz Grassmannsche sind algebraische Varietäten, welche die linearen Unterräume in einem Vektorraum parametrisieren. Die Notation ist $G(k,n)$ für den Raum k-dimensionaler Unterräume in $\mathbb{C}^n$. Für $k=1$ erhält man so etwa den komplex-projektiven Raum $\mathbb{CP}^{n-1}$, eine Kompaktifizierung von $\mathbb{C}^{n-1}$.

Tropisch gibt es Analoga sowohl für lineare Räume als auch für Grassmannsche. In dem Vortrag geht es wieder darum, diese Analogie herauszuarbeiten. Die Hauptreferenz ist [SpSt], wobei §4 von [Sp1] noch sehr viel mehr Details zu tropischen linearen Räumen enthält. Die klassische Theorie von Grassmannschen findet sich zum Beispiel in [GrHa].

(11) Die tropischen Modulräume $\mathscr{M}_{0,n,\mathrm{trop}}$

Variiert man $k \geq 3$ paarweise verschiedene Punkte auf der Riemannschen Zahlenkugel $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so erhält man einen komplexen, $(k-3)$-dimensionalen Parameterraum. Dieser Raum ist nicht kompakt, weil das Zusammenlaufen zweier Punkte nicht erlaubt ist. Deligne und Mumford haben jedoch eine sehr natürliche Kompaktifizierung $\mathscr{M}_{0,n}$ dieses Raums gefunden, indem sie S^2 durch Bäume von Riemann-Sphären ersetzten. Man verlangt dann, dass jede Komponente mindestens drei spezielle Punkte hat, also Schnitte mit anderen Komponenten oder variierende Punkte.

Das tropische Analogon ist ein Raum von Bäumen (kontrahierbaren Graphen) mit n Enden und einem positiven Gewicht (Länge) für jede innere Kante. Diese Räume haben eine interessante Kombinatorik und wiederum einige Eigenschaften, die analog zum komplex-geometrischen Modulraum $\mathscr{M}_{0,n}$ sind. Ferner ergibt sich ein enger Zusammenhang zu der in Vortrag 12 studierten tropischen Grassmannschen [SpSt].

Man sollte kurz etwas zu Modulräumen markierter Riemannscher Flächen sagen und wiederum die Analogie mit dem tropischen Fall herausarbeiten. Referenzen für $\mathscr{M}_{0,n,\mathrm{trop}}$ sind [GaKeMa] und [Mi5]. Beginnen Sie mit diesen Referenzen. Zum geometrischen $\mathscr{M}_{0,n}$ fällt mir keine gute Referenz ein. Zur allgemeinen Philosophie von Modulräumen von Kurven ist [HaMo] eine exzellente Referenz.

(12) Nichtarchimedische Geometrie und tropische Kurven

Die Verbindung zwischen nichtarchimedischer und tropischer Geometrie ist bereits im Vortrag 2 erwähnt worden. Hier geht es aber um eine konkretere Rekonstruktion entartender Familien von algebraischen Kurven in $(\mathbb{C}^*)^n$ aus tropischen Kurven in $\mathbb{R}^n$, und zwar mit der nichtarchimedischen Methode von David Speyer [Sp1],[Sp2].

Als Hauptreferenz scheint mir [Sp2] übersichtlicher zu sein als die Dissertation [Sp1], obwohl jene mehr Hintergrund liefert. Mit Sicherheit wird es auch andere Lücken geben, zum Beispiel etwas torische Geometrie, aber diese werden sich hoffentlich leicht füllen lassen. Versuchen Sie also einfach, [Sp2] zu lesen.

(13) Tropische Schnitttheorie

Die Schnitttheorie versucht, den Schnitt zweier Objekte (Untermannigfaltigkeiten, Unterkomplexe, Zykel...) als ein Objekt der gleichen Art zu definieren. Das Resultat soll dabei in geeigneter Weise invariant unter Deformationen sein. Dies liefert den richtigen allgemeinen Rahmen für Zählprobleme.

Topologisch leisten dies Homologie und Kohomologie bis auf homologische Äquivalenz, algebraisch-geometrisch benutzt man rationale oder algebraische Äquivalenz von algebraischen Zykeln (Chow-Klassen).

In der tropischen Geometrie hat Mikhalkin in §4 von [Mi6] einen Vorschlag für die Definition von Schnittprodukten gemacht. Dieser Vorschlag ist in [AlRa] ausgearbeitet, und dies sollte auch die Hauptreferenz für den Vortrag sein. Die Standardreferenz für Schnitttheorie in der algebraischen Geometrie ist [Fu]; hieraus sollten natürlich nur die wesentlichen Begriffe wie Divisoren, Zykel, rationale Äquivalenz zur Motivation der entsprechenden tropischen Konstruktionen eingeführt werden.

Literatur

[AlRa] L. Allermann, J. Rau: *First Steps in Tropical Intersection Theory*, `arXiv:0709.3705`.

[AlRa2] L. Allermann, J. Rau: *Tropical rational equivalence on R^r*, `arXiv:0811.2860`.

[Boetal] T. Bogart, A. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, R. Thomas: *Computing Tropical Varieties*, `arXiv:math/0507563`.

[CoLiSh] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea: *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer 1997.

[EiKaLi] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind: *Non-archimedean amoebas and tropical varieties*, `arXiv:math/0408311`

[Fu] W. Fulton: *Intersection theory*, Springer 1984.

[Ga] A. Gathmann: *Tropical algebraic geometry*, `arXiv:math/0601322`.

[GaKe] A. Gathmann, M. Kerber: *A Riemann-Roch theorem in tropical geometry*, `arXiv:math/0612129`.

[GaKeMa] A. Gathmann, M. Kerber, H. Markwig: *Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves*, `arXiv:0708.2268`.

[GaMa1] A. Gathmann, H. Markwig: *The numbers of tropical plane curves through points in general position*, `arXiv:math/0504390`.

[GaMa2] A. Gathmann, H. Markwig: *The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry* `arXiv:math/0504392`.

[GaMa3] A. Gathmann, H. Markwig: *Kontsevich's formula and the WDVV equations in tropical geometry* `arXiv:math/0509628`.

[GrHa] P. Harris, J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, Wiley 1978.

[HaMo] J. Harris, I. Morrison: *Moduli of curves*, Springer 1998.

[Je] A. Jensen: *Gfan — a software system for Gröbner fans*, http://www.math.tu-berlin.de/~jensen/software/gfan/gfan.html

[KaMaMa] E. Katz, H. Markwig, T. Markwig: *The j-invariant of a plane tropical cubic*, `arXiv:0709.3785`.

[Ki] F. Kirwan: *Complex algebraic curves*, Cambridge University Press 1992.

[Mi1] G. Mikhalkin: *Amoebas of algebraic varieties*, `arXiv:math/0108225`.

[Mi2] G. Mikhalkin: *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, `arXiv:math/0205011`.

[Mi3] G. Mikhalkin: *Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$*, `arXiv:math/0312530`.

[Mi4] G. Mikhalkin: *Tropical geometry*, Buchprojekt, `http://www.math.toronto.edu/mikha/book.pdf`.

[Mi5] G. Mikhalkin: *Moduli spaces of rational tropical curves*, `arXiv:0704.0839`.

[Mi6] G. Mikhalkin: *Tropical Geometry and its applications*, `arXiv:math/0601041`.

[MiZh] G. Mikhalkin, I. Zharkov: *Tropical curves, their Jacobians and Theta functions*, `arXiv:math/0612267`.

[NiSi] T. Nishinou, B. Siebert: *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*, `arXiv:math/0409060`.

[Sh] E. Shustin: *Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedean amoebas and enumerative geometry*, `arXiv:math/0211278`.

[Sp1] D. Speyer: *Tropical geometry*, PhD Thesis, Berkeley 2005, `http://www-math.mit.edu/~speyer/thesis.pdf`

[Sp2] D. Speyer: *Uniformizing Tropical Curves I: Genus Zero and One*, `arXiv:0711.2677`.

[SpSt] D. Speyer, B. Sturmfels: *The Tropical Grassmannian*, `arXiv:math/0304218`.

[St] B. Sturmfels: *A combinatorial introduction to tropical geometry*, Vortragsreihe an der FU Berlin, `http://math.berkeley.edu/~bernd/tropical/BMS.html`.

[Te] J. Tevelev: *Compactifications of subvarieties of tori*, `arXiv:math/0412329`.

[Vi] M.D. Vigeland: *The group law on a tropical elliptic curve*, `math/0411485`