VI. Gruppen und Symmetrie

Der intuitive Begriff der Symmetrie wird formalisiert als "Gruppenoperation"

§26. G-Räume

26.1 Gruppenoperationen

Def: Sei G eine Gruppe. Eine Operation (auch: Wirkung, Aktion) von G auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$\Phi: G\times X \to X, \quad (g,x)\mapsto \Phi(x) =: g\cdot x,$$

so dass gilt:

(i) $\forall x\in X: \; e\cdot x = x$

(ii) $\forall x\in X \; \forall g,h\in G: \; (gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$

Ein G-Raum ist eine Menge X zusammen mit einer G-Operation.

Bem: a) Eine Operation von G auf X ist nichts anderes als ein Homomorphismus $G\to \mathrm{Bij}(X)$ $\quad (g\mapsto (x\mapsto g\cdot x))$.

b) Häufig erhält die Operation eine Zusatzstruktur auf X, z.B. stetige Operation für X topol. Raum, lin. Op. für X VR.

26.2 Beispiele, Ergänzungen

1) S_n operiert in natürlicher Weise auf $\{1,\dots,n\}$: $\quad \sigma\cdot x := \sigma(x)$.

2) Allgemeiner: Eine Ugrp. $G < \mathrm{Bij}(X)$ operiert natürlich auf X.

(62)

3) Operiert G auf einem Vektorraum V durch lineare Abbildungen, so spricht man von einer <u>Darstellung</u> (engl: <u>representation</u>). Dies ist also ein Hom. $G \to GL(V)$.

4) Speziell: $GL(V)$ operiert auf V linear.

$O(n)$ und $SO(n)$ operieren auf $\mathbb{R}^n$ linear.

5) $SO(n)$ operiert auf $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$: $(A, x) \longmapsto A \cdot x$.

6) Ist V ein VR, so operiert $(V, +)$ auf V durch Translation:

$$v \cdot w := v + w.$$

7) Jede Gruppe $(G, \circ)$ operiert auf sich selbst durch Linksmultiplikation:

$$G \times G \to G, \quad g \cdot h := g \circ h.$$

8) Analog auch von rechts, wobei man für nicht-komm. G aber invertieren muss:

$$G \times G \mapsto G, \quad g \cdot h := h \circ g^{-1},$$

denn $$g_1 \cdot (g_2 \cdot h) \overset{!}{=} g_1 \cdot (h \circ g_2^{-1}) = h \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1} =$$
$$= h \circ (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot h.$$

9) Jede Gruppe $(G, \circ)$ operiert auf sich selbst auch durch <u>Konjugation</u>:

$$G \times G \to G, \quad g \cdot h := g \circ h \circ g^{-1}.$$

10) $GL(m, K) \times GL(n, K)$ operiert auf $M(m \times n, K)$ durch

$$(S,T)\bullet A := S\cdot A\cdot T^{-1}$$ ($\leftrightarrow$ Rangsatz)

11) $Gl(n,K)$ operiert auf $M(n,K)$ durch
$$S\bullet A := S\cdot A\cdot S^t.$$ ($\leftrightarrow$ Klass. von Bilin.formen)

12) $Gl(n,K)$ operiert auf $M(n,K)$ durch
$$S\bullet A := S\cdot A\cdot S^{-1}.$$ ($\leftrightarrow$ JNF).

13) Fluss auf X = Operation $(\mathbb{R},+)\curvearrowright X$

14) Physik (QED): Das (klassische, Dirac-) Spinorfeld ist eine Funktion auf dem Minkowski-Raum mit Werten in $\mathbb{C}^4$, auf dem $SL(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Spin}(3,1)$ linear operiert. Dies liefert eine $\overbrace{\text{}}^{\text{relat. invte}}$ Quantentheorie geladener Teilchen. Genauer gilt diese Beschreibung nur lokal, es handelt sich um eine "Eichtheorie". Andere Teilchen verlangen andere Darstellungen, was die Bedeutung der Darstellungstheorie ($SO(3)$) für die Physik erklärt.

26.3 | Grundbegriffe zu Gruppenwirkungen

Def: G wirke auf der Menge X.

a) Die Bahn durch $x\in X$ ist die Menge
$$G\bullet x := \{g\bullet x \mid g\in G\}.$$

b) $A\subset G$ heißt G-invariant, falls $G\bullet A\subset A$ (d.h. A ist Vereinigung von Bahnen)

c) $x\in X$ heißt Fixpunkt (der G-Operation), falls $G\bullet x = \{x\}$.

d) Die Standgruppe (Isotropiegruppe / Stabilisator) von $x\in X$ ist die Untergrp.
$$G_x := \{g\in G \mid g\bullet x = x\}$$ von G.

e) Die Operation heißt frei, falls gilt:

$\forall x \in X \quad G_x = \{e\}$ (d.h. $\forall x \in X : (g \cdot x = x \Rightarrow g = e)$)

f) Die Operation heißt transitiv, falls gilt

$\forall x \in X : G \cdot x = X$. (d.h. es gibt nur eine Bahn).

Bsp: a) Die S_n-Operation auf $\{1, .., n\}$ aus 26.2, (1) ist

nicht frei: $\forall x \in \{1, .., n\} : G_x = \mathrm{Bij}(\{1, .., \hat{i}, .., n-1\}) \simeq S_{n-1}$.

transitiv: $\forall x, y \in X : (xy) \cdot x = y$ ($\Rightarrow$ fixpunktfrei).

b) Die S_n-Operation auf S_n durch Konjugation erhält die Zykelzerlegung:

$\sigma \circ (a_1 \dots a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k))$.

Diese Operation ist daher

nicht frei: $G_{\{e\}} = S_n$ ($\{e\}$ ist Fixpunkt)

nicht transitiv: Bahnen $\longleftrightarrow$ Partitionen von n = Typen von Zykelzerlegungen.

z.B. $S_n \cdot (12) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ ist eine Transposition}\}$

$S_n \cdot (12 \dots n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ hat einen Zykel der Länge } n\}$

$= \{\text{zyklische Ordnung von } \{1, .., n\}\} \simeq S_{n-1}$

26.4 Der Bahnenraum

Eine G-Operation auf einer Menge X definiert die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G : y = g \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot x = G \cdot y.$$

Die Äquivalenzklassen dieser Äqurel. sind genau die Bahnen.

__Def:__ $X/G := X/\sim = \{G\cdot x \mid x \in X\} \subset P(X)$ heißt __Bahnenraum__ oder __Quotient__ von X bzgl. der G-Operation.

[__Bem:__ Ist X ein topologischer Raum und operiert G stetig auf X, so macht man X/G zu einem topologischen Raum vermöge

$$U \subset X/G \text{ offen } :\Leftrightarrow q^{-1}(U) \subset X \text{ offen},$$

wobei $q: X \to X/G$ die Quotientenabbildung ist. Dies ist nach Definition die größte Topologie auf X/G, so dass q stetig wird.]

__Bsp:__ Sei V ein K-VR. Betrachte die $K^\times$-Operation auf $V\setminus\{0\}$

$$\lambda\cdot v := \lambda v.$$

$\mathbb{P}(V) := (V\setminus\{0\})/K^\times$ heißt der __projektive Raum__ zu V. Die Bijektion

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \{L \subset V \mid L \text{ ist lin. UR der Dim } 1\}$$
$$[v] \longmapsto K\cdot v$$

interpretiert $\mathbb{P}(V)$ als __Menge der Geraden__ in V durch 0. $\mathbb{P}^n_K := \mathbb{P}(K^{n+1})$.

26.5| __Standgruppen längs Bahnen__ ... sind zueinander konjugiert:

__Satz:__ G operiere auf der Menge X. Dann gilt für $x \in X$ und $g \in G$:

$$G_{g\cdot x} = g G_x g^{-1}.$$

Bew: $h \in G_{g\cdot x} \iff h\cdot(g\cdot x) = g\cdot x$

$$\iff g^{-1}\cdot(h\cdot(g\cdot x)) = g^{-1}\cdot(g\cdot x) = (g^{-1}g)\cdot x = e\cdot x = x$$

$$\iff (g^{-1}hg)\cdot x = x$$

$$\iff g^{-1}hg \in G_x$$

$$\iff h \in gG_xg^{-1}. \qquad \square$$

26.6| Homogene Räume: ← Dies sind "sehr symmetrische Räume".

Def: Ein G-Raum heißt homogen, falls er nur eine G-Bahn besitzt.
$G_x = \{e\}$ → principal homogen Raum / $(G$-$)$-Torsor

Satz: Sei X ein homogener G-Raum und $x \in X$. Dann induziert

$$G \to X,\ g \mapsto g\cdot x$$

eine Bijektion $\psi: G/G_x \to X$, wobei G_x auf G durch Rechtsmultiplikation operiert.

Bew: ψ ist wohldefiniert: $\forall g \in G\ \forall h \in G_x$: $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x) = g\cdot x$.

ψ ist surjektiv, da X nur eine G-Bahn hat.

ψ ist injektiv: Seien $g, g' \in G$ mit $g\cdot x = g'\cdot x$.

$$\Rightarrow x = g^{-1}\cdot(g'\cdot x) = (g^{-1}g')\cdot x$$

$$\Rightarrow h := g^{-1}g' \in G_x$$

$$\Rightarrow g' = gh \in gG_x.$$

$$\Rightarrow [g'] = [g] \text{ in } G/G_x. \qquad \square$$

Bem: Jede Bahn einer G-Operation ist ein homogener G-Raum.

Bsp.: a) S^{n-1} ist ein homogener $SO(n)$-Raum (Bsp. 26.2, 5).

$$SO(n)_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & A & \\ 0 & & \end{pmatrix} \middle| A \in SO(n-1) \right\} \simeq SO(n-1).$$

$$\Rightarrow \quad SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1} \quad \text{[sogar als topol. Räume]}$$

b) $U(n+1)$ operiert transitiv auf $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$: $A \cdot [v] := [A \cdot v]$

$$U(n+1)_{[e_1]} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & A & \\ 0 & & \end{pmatrix} \middle| \alpha \in U(1), A \in U(n) \right\} \simeq U(1) \times U(n).$$

$$\Rightarrow \quad U(n+1)/(U(1) \times U(n)) \simeq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}.$$

c) $\dim V = n \Rightarrow \{\text{Basen} \subset V^n\}$ bilden $GL(V)$-Torsor.

26.7 Die Jordansche Normalform vom Standpunkt der Gruppenoperationen

[Analoge Überlegungen gelten für die beiden anderen Klassifikationsprobleme Bsp. 26.2, (10) und (11).]

$$(ST) \cdot A = \ldots = S \cdot (T \cdot A)$$

Für K algebr. abgeschl. betrachte $GL(n,K) \times M(n,K) \to M(n,K)$, $(S,A) \mapsto S^{-1}AS$

Nach Thm. 24.8 werden die Bahnen (= Konjugationsklassen von $n \times n$-Matrizen) durch Matrizen in Jordanscher Normalform bis auf Permutation der Blöcke gegeben. Die Bahnen haben sehr unterschiedliche Gestalt:

$n=2$, $K=\mathbb{C}$ ($G = GL(2,\mathbb{C})$):

JNF $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda \neq \mu$: $G_A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \right\} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$

$A = \lambda \cdot E$: $G_A = GL(2,\mathbb{C})$

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: $G_A = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\} \simeq (\mathbb{C},+)$

§27. Affine Räume

Zeichnet man in einer linearen Struktur keinen Nullpunkt aus, so erhält man einen affinen Raum (z.B. Konfigurationsräume in der klassischen Mechanik, Räume für die euklidische Geometrie).

27.1 Def: Ein affiner Raum zu einem K-VR V ist ein $(V,+)$-Torsor, d.h. eine Menge X mit einer freien, transitiven Operation von $(V,+)$.

Notation: $v \in V$, $x \in X$, dann $x+v = v+x := v \cdot x$. Verbindungsvektor: $p,q \in X$ $\Rightarrow \exists!\, \vec{pq} \in V : q = p + \vec{pq}$. $\mid T(X) := V$.

Bsp: a) V ist ein affiner Raum zu sich selbst.

b) Ist $U \subset V$ ein UVR und $u \in V$, so ist der affine UR $u+U$ ein affiner Raum zu U.

Bem: Die Wahl eines Punktes $P \in X$ liefert die Identifikation $V \to X$, $v \mapsto P+v$

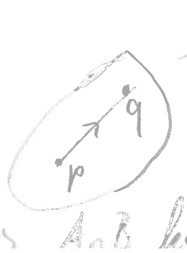
27.2 Konvexität

Affine Räume bilden den natürlichen Rahmen zur Behandlung konvexer Mengen.

Def: Sei X ein affiner Raum zum $\mathbb{R}$-VR V. Eine Menge $A \subset X$ heißt konvex, falls gilt

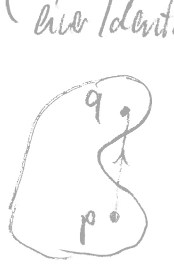
$$\forall p,q \in X\ \forall \lambda \in [0,1] : p + \lambda \cdot \vec{pq} \in A. \quad \left(= (1-\lambda)p + \lambda \cdot q \text{ mit einer Identifikation } V \to X\right)$$

Bsp: $X = \mathbb{R}^2$. a)



konvex

b)



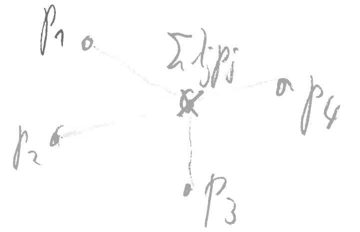
nicht konvex

Bem: $A, B \subset X$ konvex $\Rightarrow A \cap B$ konvex.

27.3 | Konvexkombinationen

<u>Lemma 1</u> Sei X ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ und $p_1,\dots,p_k\in X$, $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in[0,1]$ mit $\sum_j \lambda_j = 1$. Dann gilt für alle $\mu,\nu\in\{1,\dots,k\}$:

$$p_\mu + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{p_\mu p_j} = p_\nu + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{p_\nu p_j}.$$



<u>Bew:</u> $p_\mu + \left(\sum_j \lambda_j \overrightarrow{p_\mu p_j}\right) + \left(-\sum_j \lambda_j \overrightarrow{p_\nu p_j}\right) = p_\mu + \sum_j \lambda_j \overrightarrow{p_\mu p_\nu} = p_\mu + \overrightarrow{p_\mu p_\nu} = p_\nu.$ $\square$

<u>Notation:</u> $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j := p_\mu + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{p_\mu p_j}$ (für irgendein $\mu\in\{1,\dots,k\}$).

<u>Bem:</u> Nach Wahl einer Identifikation $V\longrightarrow X$ stimmt $\sum \lambda_j p_j$ mit dem nämlichen Ausdruck in V überein.

<u>Def:</u> Ausdrücke der Form $\sum \lambda_j p_j$ heißen <u>Konvexkombination</u> der $p_1,\dots,p_k$ ($\lambda_j\in[0,1]$, $\sum\lambda_j = 1$!). Der Punkt $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} p_j$ heißt <u>Schwerpunkt</u> oder <u>Zentrum</u> von $p_1,\dots,p_k$.

<u>Lemma 2</u> Ist $A\subset X$ konvex und $p=\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$ eine Konvexkombination mit $p_j\in A$ für alle j, so gilt $p\in A$.

<u>Bew:</u> Induktion nach k. <u>$k=1$</u>: nichts zu zeigen.

<u>$k\to k+1$:</u> Seien $p_1,\dots,p_{k+1}\in A$, $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}\in[0,1]$, $\sum \lambda_j = 1$.

Es gilt $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1-\lambda_{k+1}$.

$\overset{\text{Indvor.}}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}} p_j \in A$

$\overset{A \text{ konv.}}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j p_j \overset{(!)}{=} (1-\lambda_{k+1}) \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}} p_j \right) + \lambda_{k+1} p_{k+1} \in A$. $\square$

27.4 | Die konvexe Hülle

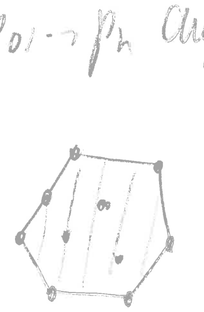
Def: Sei X ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ und $A \subset X$. Dann heißt die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus A die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(A)$ von A.

Bem: $\operatorname{conv}(A)$ ist die kleinste konvexe Teilmenge von X, die A enthält (Lemma 27.3,2: B konvex, $A \subset B \Rightarrow \operatorname{conv}(A) \subset B$).

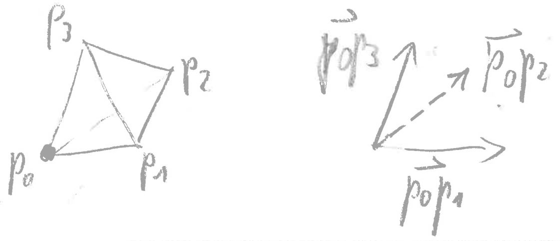
27.5 | Konvexe Polytope

Def: Die konvexe Hülle einer endlichen Menge in einem affinen Raum über $\mathbb{R}$ heißt (konvexes) Polytop.
Sind $p_0, \dots, p_n$ so, dass $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n} \in T(X)$ linear unabhängig sind, so heißt $\operatorname{conv}(\{p_0, \dots, p_n\})$ der von $p_0, \dots, p_n$ aufgespannte n-Simplex.

Bsp: $n=2$: Polytop = konvexes Polygon.



Ein 3-Simplex:



27.6 | Affine Abbildungen

<u>Def:</u> Seien X, Y affine Räume über demselben Körper K. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>affin</u>, falls für ein (= für alle) $x_0 \in X$ die Abbildung

$$T(f): T(X) \longrightarrow T(Y), \quad v \longmapsto f(x_0+v) - f(x_0)$$

linear ist. <u>Raum der aff. Abb. $X \to Y$: $Aff(X,Y)$.</u>

<u>Bem:</u> a) Ist f affin, so ist $T(f)$ wohldefiniert: $x_0' = x_0 + w$, dann

$$\forall v \in V: \quad f(x_0'+v) - f(x_0') = \big(f(x_0+v+w) - f(x_0)\big) - \big(f(x_0+w) - f(x_0)\big)$$
$$= T(f)(v+w) - T(f)(w) = T(f)(v).$$

b) f affin $\Rightarrow$ $\mathrm{im}(f) \subset Y$ <u>affiner Unterraum.</u>

<u>Lemma:</u> $Aff(X,Y) \longrightarrow Hom_K(T(X), T(Y)) \times Y, \quad f \mapsto (T(f), f(x_0))$

ist eine Bijektion.

<u>Bew:</u> Umkehrung: $(\varphi, y) \longmapsto \big(f: x \longmapsto y + \varphi(x - x_0)\big)$. $\square$

<u>Spezialfälle:</u> a) $Aff(V,K) \cong V^* \times K$ (kanonische Isomorphie)

$\lambda + a \longleftarrow (\lambda, a)$ <u>affine Funktionen</u>

b) <u>Affine Automorphismen (affine Transformationen)</u>

$\mathrm{Aff}(X) := \{ f : X \to X \text{ affin und bijektiv} \}$

$= \{ f : X \to X \text{ affin} \mid T(f) \in GL(T(X)) \}$ – ist eine Gruppe.

Gruppenverknüpfung für $\mathrm{Aff}(V) = GL(V) \times V$:

$(\varphi, v) \circ (\psi, w)(x) = (\varphi, v)(\psi(x) + w) = \varphi(\psi(x) + w) + v$

$= (\varphi \circ \psi)(x) + (\varphi(w) + v) = (\varphi \circ \psi, \varphi(w) + v)$.

$\mathrm{Aff}(V)$ ist das <u>semidirekte Produkt</u> $GL(V) \ltimes V$ von $(GL(V), \circ)$ und $(V, +)$.

---

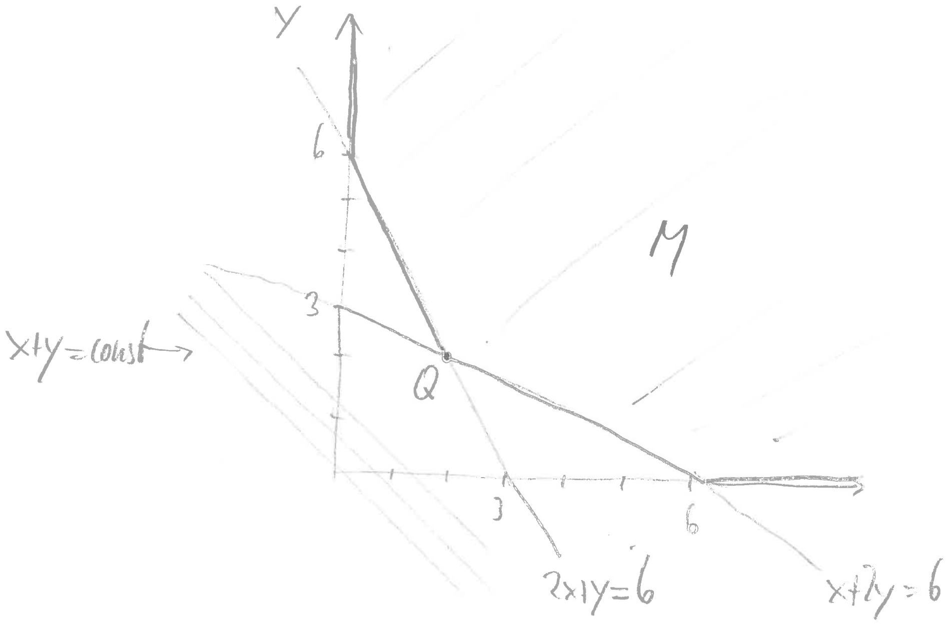
§28. Lineare Ungleichungssysteme

28.1 Lineare Optimierung (auch: Lineare Programmierung)

Typisches Problem der Ökonomie: Minimiere (Kosten) oder maximiere (Profit) eine affine Funktion φ unter linearen Nebenbedingungen $\alpha_i(x) \geq b_i$.

<u>Bsp</u>: Minimiere $x+y$ auf $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+2y \geq 0, 2x+y \geq 0 \}$.

<u>Lsg</u>: $Q = (2,2)$.



Anwendungen: a) Auslieferungsproblem von n Standorten zu m Abnehmern

b) Optimierung der Produktion / Lagerung für wechselnden Bedarf

etc.

Allgemein:

Notation: Für $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$: $x\geq 0 \;:\Leftrightarrow\; \forall_i\, x_i\geq 0$.

Problem: Für $A\in M(m\times n,\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^m$, minimiere $\alpha\in(\mathbb{R}^n)^*$ auf

$$M:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x\geq 0,\ A\cdot x\geq b\}.$$

28.2| Halbräume und konvexe Polyeder (Geometrisierung von 28.1).

Def: Sei X ein affiner Raum/$\mathbb{R}$. a) Ist $\varphi\in \mathrm{Aff}(X,\mathbb{R})$ nicht konstant, so heißt $\{x\in X \mid \varphi\geq 0\}$ ein (abgeschlossener) Halbraum.

b) Ein (konvexer) Polyeder ist der Durchschnitt endlich vieler Halbräume.

c) P Polyeder, so bezeichne $\mathrm{aff}(P)\subset X$ den kleinsten affinen UR, der P enthält. $\dim(P):=\dim(\mathrm{aff}(P))$.

Bsp: a) M in Bsp. 28.1 ist ein Polyeder.

b) Polytope sind genau die beschränkten Polyeder (→ Ziegler "Lectures on polytopes", Thm. 1.1)

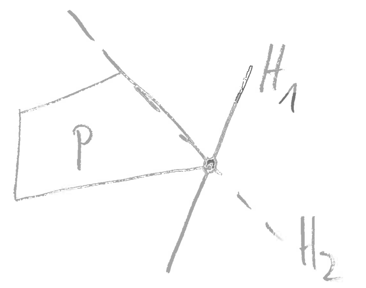
28.3| Die Seiten eines Polyeders

Def: Sei X ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ und $P\subset X$ ein Polyeder.

a) Ein nicht-konstantes $\varphi \in \mathrm{Aff}(X, \mathbb{R})$ heißt __Stützfunktion__ für P, falls gilt: $\forall x \in P : \varphi(x) \geq 0$. Die affine Hyperebene $\varphi^{-1}(0) \subset X$ heißt dann __Stützhyperebene__ von X.

b) Die Schnitte von Stützhyperebenen mit P oder P selber heißen __Seiten__ von P. Die einelementigen Seiten heißen __Eckpunkte__ von P, Seiten der Kodim $= 1$ Facetten.

__Bsp:__



__Bem:__ a) Jede Seite ist selber ein Polyeder.

b) $F, F' \subset P$ Seiten $\Rightarrow$ $F \cap F' \subset P$ Seite.

c) Die Seiten von $F \subset P$ sind genau die Seiten von P, die in F enthalten sind.

[$\rightarrow$ Ziegler, Prop. 2.3].

28.4 Der Simplexalgorithmus

__Umformulierung von Pblm 28.1:__

$Ax \geq b \iff \exists z \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}, \ Ax - z = b$. ($z_1, \dots, z_m$ "Schlupfvariablen")

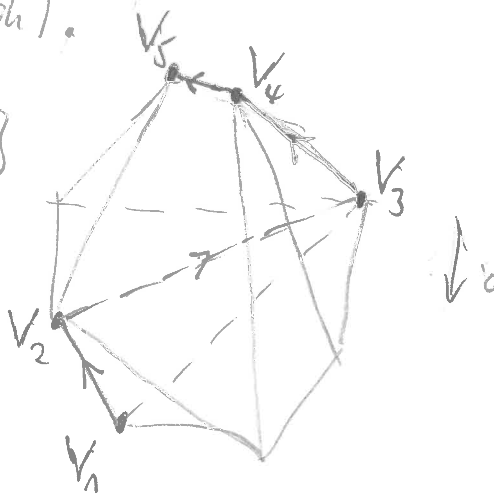
$\tilde{A} = (A, -E)$, dann definiert die Projektion $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n, (x, z) \to x$ eine Bijektion $\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}_{\geq 0} \mid \tilde{A} \cdot \tilde{x} = b\} \longrightarrow M = \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \mid Ax \geq b\}$.

<u>Geometrische Interpretation</u>: Jeder Polyeder ist affin isomorph zu

(affiner Unterraum in $\mathbb{R}^N$) $\cap$ $\mathbb{R}^N_{\geq 0}$.

<u>Ferner</u>: o.E. $rk(\hat{A}) = m$ (sonst sind einige Ungleichungen redundant).

und M enthält keinen affinen UR (sonst ist α auf M unbeschränkt oder invariant unter einer linearen Relation).



<u>Idee</u>: Indiziere Eckpunkte von M durch $I \subseteq \{1,\dots,n+m\}$ mit $|I| = m$, s.d. $a_{i_1},\dots,a_{i_m} \in \mathbb{R}^m$ lin. unabh.

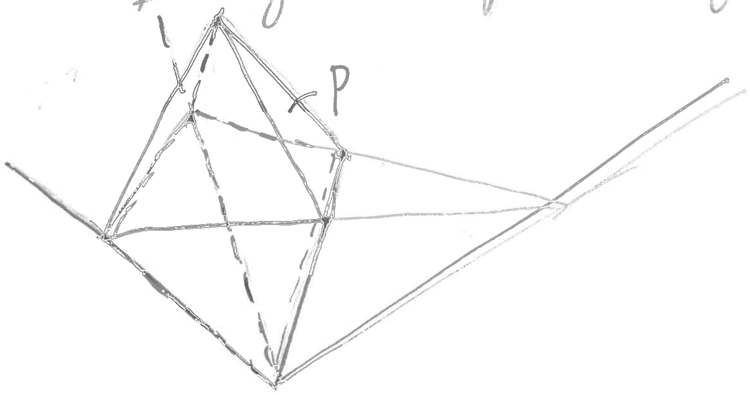
(a_i seien die Spalten von $\hat{A}$).

$I \leftrightarrow V_I = (x_1,\dots,x_{n+m})$ mit $x_i = 0$ für $i \notin I$.

[x_i für $i \in I$ ist dann bestimmt durch $\hat{A} \cdot x = b$].

Dies definiert $V_I \in \mathbb{R}^{n+m}$ durch Schnitt von $n+m$ Hyperebenen.

Die entsprechenden $n+m$ Stützfunktionen stellen P als Teil eines von V_I ausgehenden <u>simplizialen Kegels</u> dar:



Benachbarte Eckpunkte: $V_{I'}$ mit $|I' \cap I| = n+m-1$.

Wähle $\underbrace{\text{Kantenweg längs}}_{V_{i_1} \to V_{i_2} \to \dots}$ größter Steigung von α, um das Optimierungsproblem zu lösen.