V. Die Jordansche Normalform

Ziel: Fortführung des Studiums von Endomorphismen in §17.

Generalvoraussetzung: K sei algebraisch abgeschlossen.

Erinnerung: $\varphi \in \mathrm{End}(V)$

Invarianten von φ: $\mathrm{rk}(\varphi)$, $\det(\varphi)$, $\mathrm{tr}(\varphi)$, p_φ, χ_φ

17.10: φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ p_φ hat nur einfache Nullstellen.

Aufgabe: Klassifiziere auch nicht-diagonalisierbare φ!

---

§24. Die Jordansche Normalform

24.1 Reduktion auf den nilpotenten Fall

Sei V ein K-VR, $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Sei $p_\varphi \in K[T]$ das Minimalpolynom von φ: $p_\varphi(\varphi) = 0 \in \mathrm{End}(V)$.

K algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ $p_\varphi = (T-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (T-\lambda_r)^{n_r}$ mit λ_i p.v.

Der Zerlegungssatz 17.5 mit $f_i = (T-\lambda_i)^{n_i}$ liefert:

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \quad \text{mit } V_i = \ker(f_i(\varphi)) = \ker((\varphi - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}),$$

und diese Zerlegung ist φ-invariant: $\forall i \quad \varphi(V_i) \subset V_i$.

S.2

"Es reicht daher, die Einschränkungen

$$\varphi_i : V_i \longrightarrow V_i, \quad v \longmapsto \varphi(v)$$

zu verstehen.

Beobachtung: Nach Definition von V_i gilt $(\varphi_i - \lambda_i \cdot \mathrm{Id})^{n_i} = 0$.

Def: $\psi \in \mathrm{End}(V)$, V ein K-VR, heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $\psi^k = 0$.

Die Beobachtung reduziert also unsere Diskussion auf das Studium nilpotenter Endomorphismen. Diese haben Minimalpolynom $p_\psi = T^k$ mit $k = \min\{l \in \mathbb{N} \mid \psi^l = 0\}$.

Bsp: $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M(n, K)$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$, ...

$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $N^n = 0$.

Wir werden sehen, dass jeder nilpotente Endomorphismus in Unterräume dieser Form zerfällt. Solche Unterräume haben eine Basis der Form

$$v, \psi(v), \psi^2(v), \ldots, \psi^{d-1}(v) \qquad (\text{"}\psi\text{-zyklischer UR"}).$$

Beachte: Wir ordnen die Basis umgekehrt $\psi^{d-1}(v), \ldots, \psi(v), v$, um obere Dreiecksmatrizen zu erhalten.

24.2 | Klassifikation nilpotenter Endomorphismen

[Hier braucht K nicht alg. abgeschl. zu sein] (S.3)

Satz: Sei V ein K-VR, $\dim V < \infty$, und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_r} \end{pmatrix}, \quad J_{d_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M(d_i, K).$$

Ferner sind $d_1, \dots, d_r$ eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge, und je zwei nilpotente Endomorphismen mit den gleichen $d_1, \dots, d_r$ bis auf Permutation sind zueinander konjugiert.

Bew: 24.3 – 24.6

24.3 | Bew. von 24.2. I. Die Fahne von Unterräumen

Definiere $U_\ell := \ker(\varphi^\ell)$ und betrachte die Kette von Unterräumen ("Fahne")

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_{d-1} \subset U_d = V.$$

Lemma: a) $\forall \ell > 0: \; U_\ell = \varphi^{-1}(U_{\ell-1})$ (insbesondere: $\varphi(U_\ell) \subset U_{\ell-1}$).

b) Ist $W \subset V$ ein UR mit $W \cap U_\ell = \{0\}$ für ein $\ell > 0$, dann gilt $\varphi|_W$ ist injektiv.

Bew. des Lemmas: a) $v \in U_\ell \Leftrightarrow \varphi^\ell(v) = 0 \Leftrightarrow \varphi^{\ell-1}(\varphi(v)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(v) \in U_{\ell-1}$

b) $W \cap U_\ell = \{0\} \Rightarrow W \cap \ker(\varphi) = \{0\}$, denn $U_1 = \ker(\varphi)$ und $U_1 \subset U_\ell$.

$\square$

24.4 | Bew. von 24.2. II. Induktive Konstruktion der direkten Summenzerlegung von V

Wähle ein Komplement $W_d \subset V$ zu U_{d-1}: $V = U_d = U_{d-1} \oplus W_d$.

Lemma 24.3,a $\Rightarrow$ $\varphi(W_d) \subset \varphi(U_d) \subset U_{d-1}$

und $\varphi(W_d) \cap U_{d-2} = \{0\}$ (denn $\varphi^{-1}(U_{d-2}) = U_{d-1} \wedge U_{d-1} \cap W_d = \{0\}$).

Also können wir $\varphi(W_d)$ zu einem Komplement W_{d-1} von U_{d-2} vergrößern:

$$U_{d-1} = U_{d-2} \oplus W_{d-1}, \quad \varphi(W_d) \subset W_{d-1}.$$

Induktiv konstruiert man analog $W_\ell \subset U_\ell$ mit

$$U_\ell = U_{\ell-1} \oplus W_\ell, \quad \varphi(W_{\ell+1}) \subset W_\ell.$$

Resultat:

$$\begin{array}{lllllll}
V = U_d & & & & & & \\
\quad\downarrow & & & & & & \\
V = U_{d-1} & \oplus & W_d & & & & \\
\quad\downarrow & & \downarrow & & & & \\
V = U_{d-2} & \oplus & W_{d-1} & \oplus & W_d & & \\
\quad\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\quad\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
V = U_1 & \oplus & W_2 & \oplus & W_3 & \oplus \cdots & \oplus\, W_d \\
\quad\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \quad\downarrow \\
V = U_0 & \oplus & W_1 & \oplus & W_2 & \oplus \cdots & \oplus\, W_{d-1} \oplus W_d . \\
\quad\shortparallel & & & & & & \\
\quad\{0\} & & & & & &
\end{array}$$

vertikale Pfeile: Anwenden von φ

$\triangle$: Aufspaltung von URen.

Beachte: $\forall \ell \geq 2$: $\varphi|_{W_\ell}$ injektiv (Lemma 18.3,b, denn $W_\ell \subset U_\ell$).

24.5 Bew. von 24.2: III. Wahl von $v_1,\dots,v_n$

Wähle Basen:

$$\begin{array}{lllll}
 & \overbrace{}^{\sum_i \varphi^i(W_d)} & \overbrace{}^{\sum_i \varphi^i(W_{d-1})} & & \overbrace{}^{\sum_i \varphi^i(W_1) = W_1} \\
\text{für } W_d: & w_1^{(d)}, \dots, w_{s_d}^{(d)} & & & \\
\text{für } W_{d-1}: & \varphi(w_1^{(d)}), \dots, \varphi(w_{s_d}^{(d)}), & w_1^{(d-1)}, \dots, w_{s_{d-1}}^{(d-1)} & \dots & \\
 & \vdots & & & \\
\text{für } W_1: & \varphi^{d-1}(w_1^{(d)}), \dots, \varphi^{d-1}(w_{s_d}^{(d)}), & \varphi^{d-2}(w_1^{(d-1)}), \dots, \varphi^{d-2}(w_{s_{d-1}}^{(d-1)}), & \dots, & w_1^{(1)}, \dots, w_{s_1}^{(1)}.
\end{array}$$

Wähle $v_1,\dots,v_n$ durch spaltenweise Aufzählung von unten nach oben:

$$\begin{aligned}(v_1,\dots,v_n) = \big(&\varphi^{d-1}(w_1^{(d)}), \varphi^{d-2}(w_1^{(d)}), \dots, w_1^{(d)}, \\ &\vdots \\ &\varphi^{d-1}(w_{s_d}^{(d)}), \varphi^{d-2}(w_{s_d}^{(d)}), \dots, w_{s_d}^{(d)}, \\ &\vdots \\ &w_1^{(1)}, \dots, w_{s_1}^{(1)}\big).\end{aligned}$$

$\mathrm{Mat}_{BB}(\varphi)$ hat dann die behauptete Blockdiagonalform. //

24.6 Bew. von 24.2: IV. Eindeutigkeit

Die Größen der Blöcke $d_1,\dots,d_r$ werden durch $\dim U_1, \dots, \dim U_{d-1}$ bestimmt bis auf Reihenfolge:

$$\dim U_\ell = \sum_{i=1}^{r} \dim \ker(J_{d_i}^{\ell}) = \sum_{i=1}^{r} \min(d_i, \ell)$$

Explizit mit $s_1,\dots,s_d$: Haben s_ℓ Blöcke der Größe ℓ,

$$\dim U_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} \dim W_i = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=d}^{\ell} s_j = \sum_{i=1}^{\ell} i \cdot s_i .$$

$d_1, \dots, d_r$ bestimmen φ bis auf Konjugation:

o.E. seien $\varphi_1 = \begin{pmatrix} J_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_r} \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} J_{d_{\sigma(1)}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{\sigma(r)}} \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in S_r$.

Blockweises Umordnen der Basis gemäß σ definiert $\Psi \in GL(n,K)$ mit

$\varphi_2 = \Psi^{-1} \circ \varphi_1 \circ \Psi$. $\square$

Ende des Beweises von 24.2!

24.7 Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in M(5,\mathbb{Q}) \text{ ist nilpotent}: \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0.$$

$rk(A) = 3 \Rightarrow \dim U_1 = 5-3 = 2$ d.h. $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 = \mathbb{Q}^5$

$rk(A^2) = 1 \Rightarrow \dim U_2 = 5-1 = 4$ $\qquad$ $0 \quad 2 \quad 4 \quad 5$

1. Wähle $w_1 \in \mathbb{Q}^5 \setminus U_2$, etwa $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_3 := L(w_1)$ ist komplem. zu U_2.

$Aw_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in U_2 \setminus U_1$, $A^2 w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in U_1 \setminus \{0\}$, $A^3 w_1 = 0$.

2. Ergänze Aw_1 zu einem Komplement $W_2 = L(Aw_1, w_2)$ von U_1 in U_2,

etwa $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2 \setminus U_1$. $Aw_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in U_1 \setminus \{0\}$, $A^2 w_2 = 0$.

Wir sind fertig: $W_3: w_1$

$W_2: Aw_1, w_2$

$W_3: A^2w_1, A^2w_2$

<u>Basis:</u> $(A^2w_1, Aw_1, w_1, A^2w_2, w_2)$ definieren $S \in GL(5,\mathbb{Q})$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad [\text{z.B. } e_3 \overset{S}{\longmapsto} w_1 \overset{A}{\longmapsto} Aw_1 \overset{S^{-1}}{\longmapsto} e_2]$$

<u>Bem:</u> Für beliebige $v_1 \in \mathbb{Q}^5$, $v_2 \in \ker(A^2)$ lassen sich w_1, w_2 durch $w_1 + \varepsilon v_1, w_2 + \varepsilon v_2$ für $|\varepsilon| \ll 1$ ersetzen. Die w_i sind also hochgradig nicht-eindeutig!

<u>24.8 Die 'Jordansche' Normalform</u>

Aus 24.1 und 24.2 erhalten wir: $\underbrace{\text{Sei } p_\varphi = (T-\lambda_1)^{n_1} \cdots (T-\lambda_r)^{n_r}.}$

<u>Theorem:</u> Sei V ein K-VR, $\dim V = n$, und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Dann hat man die φ-invariante Zerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ in die Haupträume

$$V_i = \ker(\varphi_i^{n_i}), \quad \varphi_i := \varphi - \lambda_i \mathrm{Id},$$

und es existieren $w_{\mu i} \in V_i$, $\mu = 1, \dots, m_i$, mit

$$V_i = \bigoplus_{\mu=1}^{m_i} L_{\varphi_i}(w_{\mu i}), \quad L_{\varphi_i}(w_{\mu i}) := L(w_{\mu i}, \varphi_i(w_{\mu i}), \varphi_i^2(w_{\mu i}), \dots).$$

Bezüglich der <u>Jordanbasis</u> $\dots, \varphi_i^a(w_{\mu i}), \varphi_i^{a-1}(w_{\mu i}), \dots, w_{\mu i}, \dots$ wird φ durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$ beschrieben mit

Jordanblöcken J_k der Form $\left.\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}\right\}$ $\dim L_{\varphi_i}(w_{\mu i})$.

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Blöcke. □

24.9 Klassifikation von $M(n,K)$ bis auf Konjugation

Wir können jetzt unsere dritte Klassifikation quadratischer Matrizen angeben (vgl. 10.14):

Korollar 1: Für $A, B \in M(n,K)$ sind äquivalent:

(i) A und B sind zueinander konjugiert, d.h. $\exists S \in GL(n,K): B = S^{-1}AS$

(ii) Die Menge $\{\lambda_j\}$ der Eigenwerte von A und B stimmen überein und es gilt: $\forall j, k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{rk}(A-\lambda_j E)^k = \operatorname{rk}(B-\lambda_j E)^k$.

(iii) A und B haben die gleiche Jordansche Normalform (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke).

Bew: Zu (ii) beachte, dass $A-\lambda_j E$ die Zerlegung $K^n = \bigoplus V_i$ erhält und für $i \neq j$ einen Isom. $V_i \to V_i$ induziert. Daher bestimmen sich $\operatorname{rk}(A-\lambda_j E)^k$ und $\dim \ker\left((A-\lambda_j E)|_{V_j}^k \right)$ gegenseitig. Nach 18.6 legt dies die Größe der Jordanblöcke mit EW λ_j fest. □

24.10 Charakteristisches und Minimalpolynom und JNF

Aus der Jordanschen Normalform lassen sich χ_φ und p_φ leicht ablesen:

Die Jordansche Normalform von $\varphi \in End(V)$ habe Diagonaleinträge $\lambda_1, .., \lambda_r$ und zu λ_j Jordanblöcke der Längen $d_{j,k}$, $k = 1, .., s_j$. Es gilt dann

$$\chi_\varphi = \prod_j (T - \lambda_j)^{d_j}, \quad d_j := \sum_{k=1}^{s_j} d_{j,k} \quad (= \text{char. Pol. der JNF}).$$

Ferner annuliert $f_j = (T-\lambda_j)^{e_j}$, $e_j := \max\{d_{j,k} \mid k = 1, .., s_j\}$, jeden der Jordanblöcke zum EW λ_j, $(T-\lambda_j)^{e_j - 1}$ dagegen nicht.

$$\Rightarrow \quad p_\varphi = \prod_j (T-\lambda_j)^{e_j}.$$

Insbesondere: p_φ und χ_φ haben die gleichen Wurzeln, i.a. aber mit verschiedenen Multiplizitäten!

24.11 Der Satz von Cayley-Hamilton

Wegen $d_j \geq e_j$ in 18.10 schließen wir:

Korollar 2: (Cayley-Hamilton) Sei V ein K-VR, $\dim V < \infty$, $\varphi \in End(V)$.

Dann gilt $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, d.h. $p_\varphi \mid \chi_\varphi$. $\square$

Bem: Dies gilt auch, falls K nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Für einen Beweis ohne Verwendung der JNF siehe Bröcker S.146.

24.12 | Die additive Jordanzerlegung

Die JNF liefert auch nützliche Zerlegungen von Endomorphismen:

Korollar 3: Sei V ein K-VR, $\dim V < \infty$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$\varphi = \gamma + \eta \quad \text{mit} \quad \gamma\eta = \eta\gamma,$$

so dass γ diagonalisierbar und η nilpotent sind.

Bew: Existenz: o.E. $V = K^n$, $\varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ ein Jordanblock.

Setze $\gamma := \lambda \cdot E$, $\eta := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Eindeutigkeit: Die Eigenräume von γ sind die Haupträume V_j von φ:

$$\gamma(v) = \lambda \cdot v \Rightarrow (\varphi - \lambda \mathrm{Id})^n(v) = (\gamma - \lambda \mathrm{Id} + \eta)^n(v) \underset{\substack{\uparrow \\ (\gamma\eta = \eta\gamma!)}}{=} \eta^n(v) = 0.$$

$\square$

24.13 | Die multiplikative Jordanzerlegung

Man kann auch multiplikativ zerlegen, falls φ invertierbar ist:

Korollar 4: Sei V ein K-VR, $\dim V < \infty$, $\varphi \in GL(V)$.

Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

5.11

$$\varphi = \gamma \circ \psi \quad \text{mit} \quad \gamma\psi = \psi\gamma,$$

so dass γ diagonalisierbar und ψ unipotent (d.h. $\psi - \mathrm{Id}$ nilpotent) ist.

Bew: Sei $\varphi = \gamma + \eta$ die Zerlegung aus 18.12.

$\varphi \in GL(V) \Rightarrow \gamma \in GL(V)$, also können wir schreiben $\varphi = \gamma(\mathrm{Id} + \gamma^{-1}\eta)$.

Setze $\psi := \mathrm{Id} + \gamma^{-1}\eta$.

Umgekehrt erhält man aus $\varphi = \gamma\psi$ eine additive Jordanzerlegung:

$$\varphi = \gamma\psi = \gamma + \gamma(\psi - \mathrm{Id}); \quad \text{setze } \eta := \gamma(\psi - \mathrm{Id}).$$

η ist nilpotent: $\eta^n = (\gamma(\psi - \mathrm{Id}))^n \underset{(\gamma\psi = \psi\gamma)}{=} \gamma^n (\psi - \mathrm{Id})^n = 0.$

Die Eindeutigkeit folgt daher aus der nämlichen Eigenschaft der add. Jordanzerlegung. □

§25. Die Exponentialabbildung

25.1 Motivation: Zu $A \in Gl(n,\mathbb{C})$, definiere A^s, $s \in \mathbb{R}_{\geq}$:

$$A = \exp(B) \quad \text{dann} \quad A^s := \exp(sB).$$

$\{A^s\}_{s\in[0,1]}$ verbindet E mit A, $\frac{d}{ds}A^s = B\cdot A^s$

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \exp(B) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

allgemein? $\sum \frac{1}{n!} \cdot B^n \to$ Konv.?

Anwendung: Lineare Differentialgleichungen, Geometrie von $Gl(n,\mathbb{C})$, ...
infinitesimale Symmetrien (→ Lie-Algebren)

25.2 Die Abbildungsnorm

Def: Für $A \in M(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ definiere $\|A\| := \max\{\|Ax\| \,/\, \|x\| = 1\}$.
(Abbildungs-) Norm von A.

Offensichtlich: $\forall x$: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Lemma: $\|.\|$ ist eine Matrixnorm, d.h. $\|.\|$ ist Norm
$(\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|,\ \forall A,B: \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|)$
und es gilt die Submultiplikativität $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Bew: Norm: ✓

$$\|AB\| = \max\{\|ABx\| \,/\, \|x\| = 1\} \leq \max\{\|A\|\,\|Bx\| \,/\, \|x\| = 1\}$$
$$= \|A\| \max\{\|Bx\| \,/\, \|x\| = 1\} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Bem: b) $A_n \to A$ bzgl. $\|.\|$ $\Leftrightarrow$ ~~Koeff.~~ Einträge konvergieren. [alle Normen auf endl-dim. VRen sind äquivalent]. Zeige: $\forall, D \subset L \to A$ ist stetig.

a) Auch $\|(a_{ij})\| := \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ ist eine (andere) Matrixnorm.

25.3 Potenzreihen über $M(n,\mathbb{C})$

Sei $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, konvergiere für $z = z_0 \neq 0$...

Erinnerung (Analysis):

~~8.20~~ 5.13

Lemma: $\sum a_j z^j$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ für jedes $r < |\zeta|$.

Bew: Wissen: $\exists C: |a_j \zeta^j| \le C$.

Absolute Konvergenz: $(M \ge N)$ $\sum_{j=N}^{M} |a_j||z|^j \le \sum_{j=N}^{M} |a_j \zeta^j| \left|\frac{z}{\zeta}\right|^j \le C \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^N \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{z}{\zeta}\right|} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

Glm. ": $\left|\sum_{j=N}^{M} a_j (z^j - w^j)\right| \le \sum_{j=N}^{M} |a_j| (|z|^j + |w|^j) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ $\square$

Mit der Submultiplikativität von $\|.\|$ sieht man ebenso:

Satz: $f(A) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j A^j$ konvergiert absolut und gleichmäßig (bzgl. $\|.\|$) auf $B_r(A) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid \|A\| < r\}$ $\forall r < |\zeta|$.

Ferner gilt: $\forall T \in GL(n, \mathbb{C})$ $\quad f(T^{-1}AT) = T^{-1} f(A) T$. $(*)$

~~Bew: Wir fassen jetzt die Partialsummen $\sum_{j=0}^{N} a_j A^j$ als Folge von Abbildungen $\mathbb{C}^{n^2} = M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2} = M(n \times n, \mathbb{C})$ auf!~~

Bew: für $(*)$: $\forall j$: $(T^{-1}AT)^j = T^{-1}A\underbrace{TT^{-1}}_{E}AT \cdots T^{-1}AT = T^{-1}A^jT$,

also $\sum_{j=0}^{n} a_j (T^{-1}AT)^j = T^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j A^j\right) T$. Dann $n \to \infty$. $\square$

§4 Die Exponentialfunktion auf $M(n, \mathbb{C})$

$f(z) = \exp(z) = \sum \frac{1}{j!} z^j$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$.

$\exp(x+iy) = (\exp x) \cdot (\cos y + i \sin y)$.

S.14

Demnach: $\exp: M(n\times n, \mathbb{C}) \to M(n\times n, \mathbb{C}),\ A \mapsto \exp(A)$ ist wohldefiniert und stetig, ja sogar C^∞.

Bsp.: $\varphi \in \mathbb{R}$, $A = \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \varphi^2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \varphi^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \varphi^4 A$

$$\exp A = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) E + \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\varphi) E + (\sin\varphi)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel φ! ~~falls $\varphi \in \mathbb{R}$!~~

5.5 Eigenschaften von exp

$A \in M(n\times n, \mathbb{C})$

Satz: a) $\exp({}^tA) = {}^t(\exp A)$

b) $B \in M(n\times n, \mathbb{C})$, $\boxed{AB = BA}$ (!) $\Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$

c) $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$.

Bew.: a) ✓

b) $\exp(x+y) = \sum_j \frac{1}{j!}(x+y)^j \overset{(*)}{=} \left(\sum \frac{1}{j!}x^j\right)\cdot\left(\sum \frac{1}{k!}y^k\right) = (\exp x)\cdot(\exp y)$.

Der übliche Beweis von (*) gilt wörtlich für $x = A$, $y = B$, sofern $AB = BA$. (!)

c) Setze $B = -A$ in (b): $\exp(A)\cdot\exp(-A) = \exp(0) = E$.

5.6 Berechnung von exp

24.12

Zerlege $A = D + N$, D diagonalisierbar, N nilpotent, $DN = ND$ (add. Jordanzerlegung)

Satz 5.5, b $\Rightarrow \exp(A) = \exp(D)\cdot\exp(N)$.

$\exp(D)$: $T^{-1}DT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dann $\exp(D) = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}T^{-1}$.

$N^n = 0$, also $\exp(N) = E + N + \frac{1}{2!}N^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1}$ endliche Reihe.

Bsp: $\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = e^{\lambda}\cdot\left(E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25.7 Surjektivität von exp

Satz 25.5, c $\Rightarrow$ $\forall A \in M(n,\mathbb{C}) : \exp(A) \in Gl(n,\mathbb{C})$.

Satz: $\exp: M(n,\mathbb{C}) \to Gl(n,\mathbb{C})$ ist surjektiv.

Bew: Sei $B \in Gl(n,\mathbb{C})$. Mult. Jordanzerlegung: $B = U\cdot K = KU$, $(U-E)^n = 0$,

und $T^{-1}KT = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ für ein $T \in Gl(n,\mathbb{C})$, $\mu_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow \exists\, \lambda_j,\ \mu_j = e^{\lambda_j}$ (λ_j nur eindeutig bis auf $2\pi i\mathbb{Z}$).

Dann $K = \exp(D)$, $D = T\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}T^{-1}$.

(Reihe in $\mathbb{C}[[z]]$ oder in $\mathbb{C}[z]/(z^n)$)

Für U benutze $\exp(\log(1+z)) = 1+z$, $\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}z^j$

(!) $\Rightarrow U = \exp(M)$, $M := N - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3}N^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}N^n$, $N := U - E$

KU

Nach Konstruktion gilt $DM = MD$, also (25.5,(b)) $\exp(D+M) = \exp(D)\exp(M) = KU = B$. $\square$

Bem: a) ~~Vorsicht, exp. ist ausser für n=1 kein Gruppenhomomorphismus.~~ $(M(n,\mathbb{C}),+) \to (Gl(n,\mathbb{C}),\cdot)$

a) exp: add. Jordanzerlegung $\longrightarrow$ mult. Jordanzerlegung

b) exp ist lokal ein Diffeomorphismus nahe $0 \in M(n,\mathbb{C})$, ~~Etwa ist~~ Mit Satz über inverse Fkt. oder mit $\log: U(E) \to M(n,\mathbb{C})$.

~~§23~~ 5.16

$\log: B_1(E) \to M(n,\mathbb{C}),\ E+A \mapsto \sum \frac{(-1)^{j+1}}{j} A^j$

ist wohldefiniert mit offenem Bild $W := \log(B_1(E)) \subset M(n\times n,\mathbb{C})$ ~~offen~~ und $\exp\circ\log = \mathrm{Id}_{B_1(E)}$

und $\log\circ\exp|_W = \mathrm{Id}_W$, also ist $\exp: W \to B_1(E)$ Diffeomorphismus.

25.8) Anwendung: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeff.

Gewöhnliche Differentialgleichungen (erster Ordnung): $F: \mathbb{R}\times V \to V,\ (t,y) \mapsto F(t,y)$

auf $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. $\boxed{\frac{d}{dt} y = F(t,y)}$ $\leftrightarrow$ Integralkurve eines Vektorfelds

$(F_1(t,y), \ldots, F_n(t,y))$

Lösung: $\gamma: \mathbb{R} \to V$ mit $\boxed{\frac{d}{dt}\gamma(t) = F(t,\gamma(t))}$, Anfangswert: $\gamma(0) \in V$

Picard-Lindelöf: Unter schwachen Vor. an F (Lipschitzstetigkeit in y, Stetigkeit in t) existiert

$\forall$ Anfangswerte $v \in V$ eine eindeutige Lsg. γ mit $\gamma(0) = v$.

DGL heißt linear, falls $\forall t$ $F(t,.): V \to V$ linear.

hat konstante Koeffizienten, falls F nicht von t abhängt.

Satz: Die lin. DGL. mit konstanten Koeff. $A \in \mathrm{End}(V)$ hat zum Anfangswert v

die eindeutige Lsg. $\gamma(t) = \exp(tA)\cdot v = \exp(A)^t \cdot v$.

Bew.: Analysis: $\gamma(t)$ ist diff.bar. $\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}(tA)\cdot\exp(tA)\cdot v = A\cdot\gamma$.

$= \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j\cdot t^j = A\cdot\exp(tA)\cdot v$

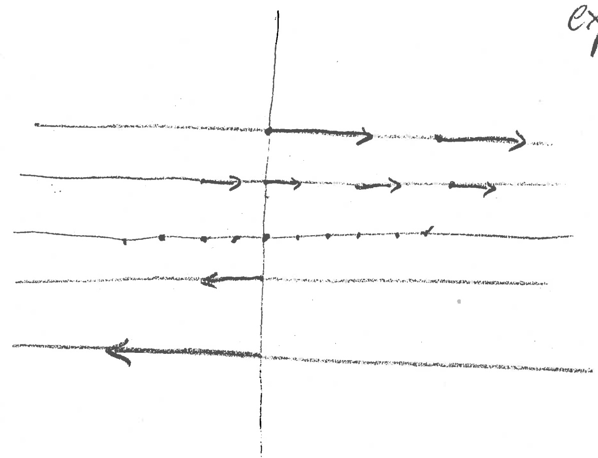
Eindeutigkeit: $\gamma(t)$ irgendeine Lsg, dann

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(-tA)\cdot\gamma(t)\right) = -A\left(\exp(-tA)\gamma\right) + \exp(-tA)A\gamma = 0$$

$\Rightarrow \exp(-tA)\cdot\gamma$ konstant $= v$ $\Rightarrow \gamma = \exp(tA)\cdot v$. □

Bsp: a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ **DGL:** $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$

Lsg: $$y(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t y_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$



$\exp(tA)$

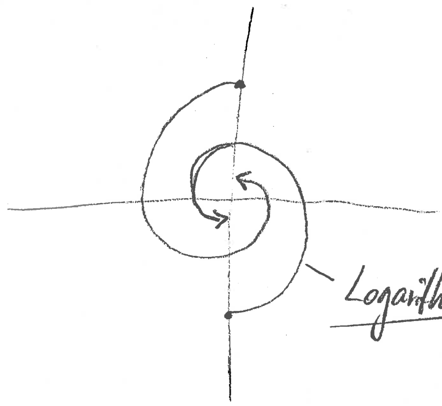
„Scherung".

b) $$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x - y \\ x + \lambda y \end{pmatrix}$$ **DGL:** $\dot{x} = \lambda x - y$, $\dot{y} = x + \lambda y$

$$\exp(tA) = e^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$(\lambda < 0)$

„Drehkontraktion".

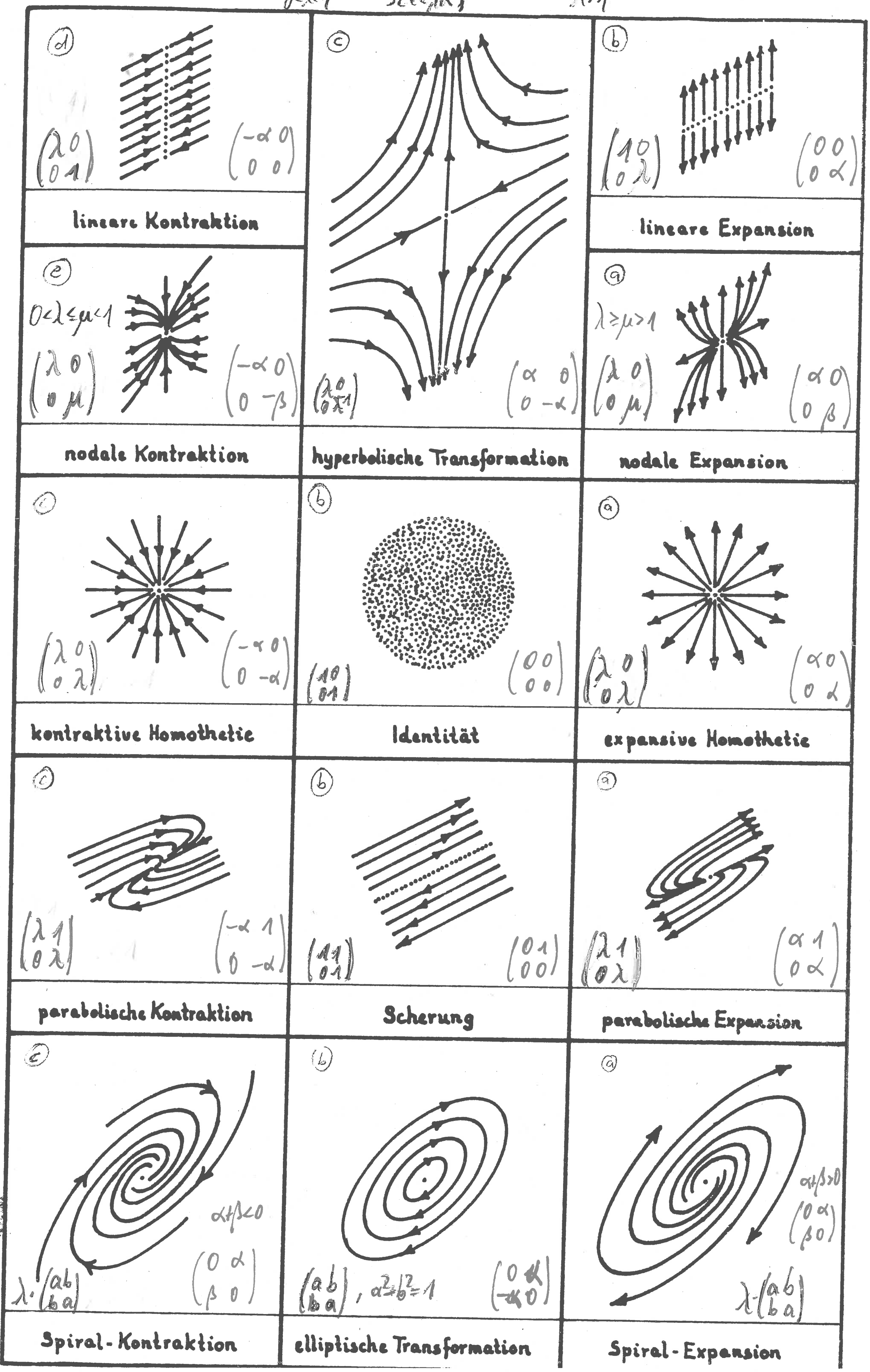


Logarithmische Spirale

Overhead: Zoo von Lösungen in $\mathbb{R}^2$.

$A = \exp(B)$

det<1 $\quad \cdot\lambda \quad 0<\lambda<1$ $\quad$ det=1 $\quad SL(2,\mathbb{R})$ $\quad :\lambda \quad \lambda>1$ $\quad$ det>1 $\quad (\alpha>0)$



diagonalisierbar

nicht diagonalisierbar