IV. Bilinearformen

Motivation: Skalarprodukte (→ Diffgeom., Allg. Rel.th.)
Kegelschnitte
Trägheitstensor, Hesse-Matrix,
Schnittpaarungen (Topologie), ...

§18. Grundlegende Begriffe

18.1 Def: Eine Bilinearform auf einem K-VR V ist eine 2-Multilinearform auf V, d.h. eine Abbildung

$$\gamma: V \times V \longrightarrow K,$$

die linear in jedem Eintrag ist.

K-VR der Bilinearformen: $\mathrm{Bil}(V) := \mathrm{Mult}^2(V)$.

Bsp: a) $V = K^2$, $\gamma((\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2)) = \lambda_1\mu_1 - 3\lambda_2\mu_2 + 2\lambda_2\mu_1$

b) $\dim V = 2 \Rightarrow (\det: V \times V \to K) \in \mathrm{Bil}(V)$.

c) Das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Bilinearform:

$$\langle (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \rangle := \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n.$$

18.2 Beschreibung durch Matrizen

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des K-VR's V, so wird $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ eindeutig durch die Matrix

$$G = (g_{ij})_{i,j = 1, \ldots, n}, \quad g_{ij} := \gamma(v_i, v_j)$$

bestimmt:

$$\forall \lambda_i, \mu_j \in K: \gamma\left(\sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \mu_j v_j\right) = \sum_i \lambda_i \gamma\left(v_i, \sum_j \mu_j v_j\right)$$

$$= \sum_i \lambda_i \left(\sum_j \mu_j \gamma(v_i, v_j)\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_{ij}.$$

Def: G heißt <u>Fundamentalmatrix</u> (auch: <u>Gramsche Matrix</u>) von γ bezgl. $v_1, \dots, v_n$.

Bsp: In Bsp 18.1, a mit $v_i = e_i$: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \cdot \lambda_1 \mu_1 & 0 \cdot \lambda_1 \mu_2 \\ 2 \lambda_2 \mu_1 & -3 \lambda_2 \mu_2 \end{bmatrix}$

Umgekehrt ist für $G = (g_{ij}) \in M(n, K)$ die Abbildung

$$V \times V \to K, \quad \left(\sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \mu_j v_j\right) \longmapsto \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_{ij}$$

eine Bilinearform. //

18.3 | <u>$Bil(K^n) \cong M(n, K)$</u> (vgl. 13.6, 13.7)

<u>Speziell:</u> $V = K^n$, $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)$

Die Bilinearform γ_G zu $G \in M(n, K)$ lässt sich schreiben als $\boxed{\gamma_G(v, w) = v^t \cdot G \cdot w}$,

d.h. $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in K^n$, dann $\gamma_G(v, w) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$.

<u>Satz:</u> Die Zuordnung $G \longmapsto \gamma_G$ liefert einen kanonischen Isomorphismus

$$M(n, K) \longrightarrow Bil(K^n).$$

Insbesondere gilt: $\dim V = n \Rightarrow \dim Bil(V) = n^2$. □

Bem: Dies liefert unsere dritte Interpretation quadratischer Matrizen!

18.4) Basiswechsel

Satz: Seien G, G' die Fundamentalmatrizen zu $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ bezüglich Basen $v_1, \dots, v_n$ bzw. $v_1', \dots, v_n'$ von V. Sei $T = (t_{ij}) \in GL(n,K)$ die Transformationsmatrix zwischen diesen Basen, d.h.

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_i \qquad (\Leftrightarrow \Phi' = \Phi \circ T)$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[dr, "\Phi"] & e_i \mapsto v_i \\
& V \\
K^n \arrow[uu, "T"] \arrow[ur, "\Phi'"] & e_j \mapsto v_j'
\end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$\boxed{G' = T^t G \cdot T}.$$

Bew: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^n \times K^n \arrow[dr, "\Phi \times \Phi"] \arrow[drr, bend left, "(v{,}w) \mapsto v^t \cdot G \cdot w"] & & \\
& V \times V \arrow[r, "\gamma"] & K \\
K^n \times K^n \arrow[uu, "T \times T"] \arrow[ur, "\Phi' \times \Phi'"] \arrow[urr, bend right, "(v{,}w) \mapsto v^t \cdot G' \cdot w"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dies zeigt:

$$\forall v, w \in K^n: \; v^t \cdot G' \cdot w = (Tv)^t \cdot G \cdot (Tw) = v^t \cdot (T^t \cdot G \cdot T) \cdot w.$$

$$\overset{\text{Satz 18.3}}{\Longrightarrow} G' = T^t G T. \qquad \square$$

Bem: Klassifikation von Bilinearformen $\longleftrightarrow$ Betrachte $M(n,K)/\sim$, $A \sim B \Leftrightarrow \exists T \in GL(n,K) \; B = T^t A T$.

18.5 | Bilinearformen und der Dualraum

Sei V ein K-VR, $\gamma \in Bil(V)$. Für jedes $v \in V$ ist

$$w \longmapsto \gamma(v,w)$$

eine Linearform $V \to K$. Dies erklärt eine Abbildung

$$\Phi_\gamma : V \to V^*, \quad v \longmapsto (w \longmapsto \gamma(v,w)),$$

die linear ist: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \ \forall v_1, v_2, w \in V$:

$$\Phi_\gamma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(w) = \gamma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \gamma(v_1, w) + \lambda_2 \gamma(v_2, w)$$
$$= (\lambda_1 \Phi_\gamma(v_1) + \lambda_2 \Phi_\gamma(v_2))(w).$$

<u>Notation</u>: (<u>duale Paarung</u>) $V^* \times V \to K, \ (\alpha, v) \longmapsto \langle \alpha | v \rangle := \alpha(v)$.

Hiermit: $\forall v, w \in V \ \boxed{\gamma(v,w) = \langle \Phi_\gamma(v) | w \rangle}$. [$\to$ QM bra-ket $\langle \alpha |$ $| v \rangle$] (*)

<u>Satz</u>: Die kanonische Abbildung

$$\Phi : Bil(V) \to Hom_K(V, V^*), \quad \gamma \longmapsto \Phi_\gamma$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

<u>Bew</u>: <u>Linearität</u>: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in Bil(V)$ $\Phi_{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2} = \lambda_1 \Phi_{\gamma_1} + \lambda_2 \Phi_{\gamma_2}$.

<u>Umkehrabbildung</u>: $\Psi : Hom_K(V, V^*) \to Bil(V)$

$$\Gamma \longmapsto (\Psi(\Gamma) : (v,w) \longmapsto \langle \Gamma(v) | w \rangle)$$

[$\Psi(\Gamma)$ ist bilinear!]

<u>$\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Bil}(V)}$:</u> Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$,

$\forall v,w \in V$: $\Psi(\Phi(\gamma))(v,w) = \langle \Phi_\gamma(v) | w \rangle \overset{(*)}{=} \gamma(v,w)$

$\Rightarrow \Psi(\Phi(\gamma)) = \gamma$.

<u>$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(V,V^*)}$:</u> Sei $\Gamma: V \to V^*$.

$\forall v,w \in V$: $\langle \Phi(\Psi(\Gamma))(v) | w \rangle = \langle \Phi_{\Psi(\Gamma)}(v) | w \rangle \overset{(*)}{=} \Psi(\Gamma)(v,w)$

$= \langle \Gamma(v) | w \rangle$

$\Rightarrow \Phi(\Psi(\Gamma)) = \Gamma$.

$\square$

18.6 | Explizite Beschreibung von Φ für $V = K^n$

Für $V = K^n$: V = Spaltenvektoren

V^* = Zeilenvektoren

$\mathrm{Bil}(V) = M(n,K)$ (18.3).

Hiermit wird Φ aus Satz 18.5 wie folgt dargestellt:

$$\Phi: M(n,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K^n, (K^n)^*)$$

$$G \longmapsto (v \longmapsto v^t \cdot G \in M(1\times n, K) = (K^n)^*).$$

18.7 | Eigenschaften von Bilinearformen ...

<u>Def:</u> Wir nennen $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$, V ein K-VR,

a) <u>symmetrisch</u> $:\Leftrightarrow \forall v,w \in V: \gamma(v,w) = \gamma(w,v)$

b) <u>antisymmetrisch</u> $:\Leftrightarrow \forall v,w\in V: \gamma(v,w) = -\gamma(w,v)$

c) <u>nicht-entartet</u> (<u>nicht ausgeartet</u>, <u>regulär</u>)

$:\Leftrightarrow \forall v \in V\setminus\{0\}\ \exists w\in V: \gamma(v,w)\neq 0.$

<u>Bsp:</u> $V = K^2$, $\gamma((\lambda_1,\lambda_2),(\mu_1,\mu_2)) = \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1$

ist symmetrisch: $\overset{\|}{\gamma((\mu_1,\mu_2),(\lambda_1,\lambda_2))}$.

und nicht entartet: $v=(\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$, dann $\gamma(v,(\lambda_2,\lambda_1)) = \lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$.

<u>18.8</u> <u>... und ihrer Fundamentalmatrizen</u>

<u>Satz:</u> Sei V ein K-VR und $G\in M(n,K)$ die Fundamentalmatrix von $\gamma\in Bil(V)$ bezgl. einer Basis $v_1,..,v_n$ von V. Dann gilt:

1) γ ist symmetrisch $\Leftrightarrow G = G^t$

2) γ ist antisymmetrisch $\Leftrightarrow G = -G^t$

3) γ ist nicht-entartet $\Leftrightarrow \Phi_\gamma: V\to V^*$ ist ein Isom. $\Leftrightarrow rk(G)=n$.

<u>Bsp:</u> a) Bsp. 18.7 hat $G=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = G^t$.

b) $G=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ hat $rk(G)=1<2$.

In der Tat ist $\Phi_\gamma((1,1)) = (1\ 1)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = (0\ 0)$, also ist γ entartet.

4.7

Bew.: 1) "$\Rightarrow$": $\forall_{i,j}\ g_{ij} = \gamma(v_i, v_j) \overset{\gamma \text{ symm.}}{=} \gamma(v_j, v_i) = g_{ji} \Rightarrow G = G^t$.

"$\Leftarrow$": $v = \sum_i \lambda_i v_i,\ w = \sum_i \mu_i v_i$

$$\Rightarrow \gamma(v,w) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_{ij} \overset{G=G^t}{=} \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_{ji} = \gamma(w,v).$$

2) Analog zu (a).

3) "$\Rightarrow$": Sei γ nicht-entartet. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_\gamma : V \to V^*,\quad v \mapsto (w \mapsto \gamma(v,w))$$

injektiv, also ein Isomorphismus:

$$\Phi_\gamma(v) = 0 \Rightarrow \forall w\ \gamma(v,w) = \langle \Phi_\gamma(v) | w \rangle = 0 \overset{\gamma \text{ nicht-ent.}}{\Longrightarrow} v = 0.$$

Bezgl. der Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und der dualen Basis $v_1^*, \ldots, v_n^*$ von V^* wird Φ_γ durch G^t beschrieben: $\Phi_\gamma(v_i)(v_j) = g_{ij} \Rightarrow \Phi_\gamma(v_i) = \sum_j g_{ij} v_j^*$.

$$\Rightarrow \quad rk(G) = rk(G^t) = n.$$

"$\Leftarrow$": Umgekehrt sieht man: $rk(G) = n \Rightarrow \Phi_\gamma$ Isom. $\Rightarrow \gamma$ nicht-entartet.

$\square$

§19. Symmetrische Bilinearformen

Ziel: Zu $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ symmetrisch finde eine „angepasste Basis", so dass die zugehörige „Fundamentalmatrix" möglichst einfach wird (z.B. diagonal).

19.1 | Orthogonalbasen, orthogonale Summen

Def: Sei $\gamma : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

a) $v, w \in V$ heißen $(\gamma\text{-})$ orthogonal $:\Leftrightarrow \gamma(v,w) = 0$. $\left(\overset{\gamma \text{ symm.}}{\Longleftrightarrow} \gamma(w,v) = 0\right)$

Schreibweise: $v \perp w$.

b) $v_1, \dots, v_m \in V$ heißen $(\gamma\text{-})$ Orthogonalsystem $:\Leftrightarrow \forall i \neq j \;\; v_i \perp v_j$.

Bilden $v_1, \dots, v_m$ zusätzlich eine Basis von V, so heißt $v_1, \dots, v_m$ $(\gamma\text{-})$ Orthogonalbasis.

c) Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ heißen $(\gamma\text{-})$ orthogonal, falls

$$\forall v_1 \in U_1 \; \forall v_2 \in U_2 : \; v_1 \perp v_2 .$$

Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so schreiben wir $V = U_1 \perp U_2$. $(\gamma\text{-})$ orthogonale Summe

d) Für $U \subset V$ heißt $U^\perp := \{ w \in V \mid \forall v \in U : w \perp v \}$ $(\gamma\text{-})$ Orthogonalraum zu U.

e) Nullraum von γ: $\quad V^\perp = \{ v \in V \mid \forall w \in V \; \gamma(v,w) = 0 \} = \ker(\Phi_\gamma : V \to V^*)$
($\Phi_\gamma \nearrow$ 18.5)

19.2 | Bsp

$V = K^2$, γ mit Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) $U = K \cdot (1,0)$, dann $U^\perp = \left\{ (\lambda, \mu) \in K^2 \;\middle|\; (1\;0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$$= \{ (\lambda, \mu) \in K^2 \mid \lambda + 2\mu = 0 \} = K \cdot (2, -1).$$

Es gilt $K^2 = U \perp U^\perp$.

Fund.matrix bzgl. $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,-1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[denn $(2\ -1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (0\ 1)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$].

b) $U = K\cdot(1,1)$, dann $U^\perp = \ldots = K\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Fundamentmatrix bzgl. $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (5,-3)$: $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

19.3 Rechenregeln für "$\perp$"

Satz: Seien V ein endlich-dimensionaler K-VR, $\gamma : V\times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, $U, U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Dann gilt:

1) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ (dies gilt auch für $\dim V = \infty$).

2) $\dim U + \dim U^\perp \geq \dim V$.

3) Äquivalent sind: (i) $\gamma|_{U\times U} \in \mathrm{Bil}(U)$ ist nicht-entartet

(ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(iii) $V = U \perp U^\perp$.

4) Äquivalent sind: (i) $\forall U \subset V$ UR: $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ [vgl. (2)]

(ii) $\forall U \subset V$ UR: $U = (U^\perp)^\perp$

(iii) $V^\perp = \{0\}$

(iv) γ ist nicht-entartet.

Bew: 1) $v \in (U_1 + U_2)^\perp \iff \forall u_1 \in U_1\ \forall u_2 \in U_2 : \gamma(v, u_1 + u_2) = 0$

4.10

$$\overset{(!)}{\Longleftrightarrow} \; (\forall u_1 \in U_1 : \gamma(v,u_1)=0) \wedge (\forall u_2 \in U_2 : \gamma(v,u_2)=0)$$

$$\Longleftrightarrow \; v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp .$$

2) Sei $\Phi_\gamma : V \to V^*$ wie in 18.5, d.h. $\langle \Phi_\gamma(v) \mid w \rangle = \gamma(v,w)$.

Es gilt $\Phi_\gamma(U) \subset V^*$ und

$$U^\perp \overset{\text{Ü}5.4,5}{=} Z(\Phi_\gamma(U)) \overset{11.11}{\simeq} \varkappa(Z(\Phi_\gamma(U))) \overset{11.12}{=} \Phi_\gamma(U)^\circ$$

[Ü 5.4,5 ist auch korrekt für γ entartet]

$$\Rightarrow \dim U^\perp = \dim(\Phi_\gamma(U)^\circ) \overset{12.14}{=} \dim V^* - \underbrace{\dim \Phi_\gamma(U)}_{\le \dim(U)} \ge \dim V - \dim U.$$

3) (i) $\Rightarrow$ (ii) $w \in U \cap U^\perp \Rightarrow \forall v \in U \;\; \gamma(v,w)=0 \overset{\gamma|_{U\times U} \text{ nicht-ent.}}{\Longrightarrow} w=0.$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\dim(U+U^\perp) \overset{12.13}{=} \dim U + \dim U^\perp - \dim \underbrace{U \cap U^\perp}_{=\{0\}} \overset{(2)}{\ge} \dim V$

$\Rightarrow U + U^\perp = V.$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $v \in U \setminus \{0\} \Rightarrow v \notin U \cap U^\perp = \{0\}$

Es gilt also nicht: $\forall w \in U \;\; \gamma(v,w)=0.$

$\Rightarrow \exists w \in U \;\; \gamma(v,w) \neq 0$

4) (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach Def. gilt stets: $U \subset (U^\perp)^\perp$

Ferner: $\dim U \overset{(i)}{=} \dim V - \dim U^\perp \overset{(i)}{=} \dim (U^\perp)^\perp$

$\Rightarrow U = (U^\perp)^\perp.$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Setze $U=\{0\}$ in (ii): $0^\perp = V$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Nach Def.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Wie in (2). Jetzt ist Φ_γ ein Isomorphismus, da γ nicht-entartet ist (Satz 18.8) $\square$

19.4 Existenz von Orthogonalbasen

Satz: Sei V ein K-VR, $\dim V < \infty$, $\operatorname{char} K \neq 2$ (!) und $\gamma : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann besitzt V eine γ-Orthogonalbasis.

Bem: Die Fundamentalmatrix ist dann diagonal.

Bew: Schritt 1: Reduktion auf den Fall γ nicht-entartet.

Wähle ein Komplement U zum Nullraum $V^\perp < V$: $V = V^\perp \oplus U$.

Ist $v_1, \dots, v_m$ Orthogonalbasis von U bzgl. $\gamma|_{U \times U}$ und $v_{m+1}, \dots, v_n$ Basis von $V^\perp$, so ist $v_1, \dots, v_n$ Orthogonalbasis von V.

Ferner ist $\gamma|_{U \times U}$ nicht-entartet:

Sei $v \in U$ und $\forall w \in U$ $\gamma(v,w) = 0$

$\Rightarrow$ $\forall w \in V = U \oplus V^\perp$ $\gamma(v,w) = 0$

$\Rightarrow$ $v \in V^\perp \cap U = \{0\}$.

Schritt 2: Nach Schritt 1 sei nun o.E. γ nicht-entartet.

Induktion nach $\dim V = n$.

$n = 1$: Jede Basis ist Orthogonalbasis.

$n-1 \to n$: Wir behaupten, dass es ein $v \in V$ gibt mit $\gamma(v,v) \neq 0$.

Sonst gilt nämlich: $\forall v, w \in V$ $0 = \gamma(v+w, v+w) = \gamma(v,v) + \gamma(v,w) + \gamma(w,v) + \gamma(w,w)$
$= 2\gamma(v,w)$

$\mathrm{char}\, K \neq 2$
$\Longrightarrow \gamma = 0$ ↯.

Definiere $U := K \cdot v$ für ein solches v $(\Rightarrow v \neq 0)$.

Es gilt: $\dim U^\perp \overset{\text{Satz 19.3(4)}}{=} \dim V - \dim U = n-1$.

Ind.vor. $\Rightarrow \exists$ Orthogonalbasis $v_2, \dots, v_n$ von $U^\perp$.

Dann ist $v_1 := v, v_2, \dots, v_n$ Orthogonalbasis von $V = U \perp U^\perp$ (Satz 19.3, (3)). $\square$

Bem: Der Beweis liefert ein Verfahren zur Konstruktion von γ-Orthogonalbasen. Finde dabei $v \in V$ mit $\gamma(v,v) \neq 0$ durch "zufällige" Wahl.

19.5 Bsp: $V = K^2$, γ mit Fund.matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ("Hyperbolische Ebene")

$\gamma((1,0),(1,0)) = 0 \Rightarrow (1,0)$ kann in keiner Orthogonalbasis auftauchen.

Aber etwa $\gamma((1,1),(1,1)) = (1\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$.

Setze $v_1 := \lambda \cdot (1,1)$, $\lambda \neq 0$

$(K \cdot v_1)^\perp = K \cdot (1,-1)$

Setze $v_2 = \lambda \cdot (1,-1), \mu \neq 0$. $\gamma(v_2, v_2) = -2\mu^2$

$\Rightarrow$ Fund.matrix bzgl. v_1, v_2: $\begin{pmatrix} 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & -2\mu^2 \end{pmatrix}$.

//

19.6 Normierung

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine γ-Orthogonalbasis für V und $a_i := \gamma(v_i, v_i)$.

$\Longrightarrow$ Fundamentalmatrix von γ bzgl. $v_1, \dots, v_n$: $G = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$.

Sind nun $\mu_1, \dots, \mu_n \in K \setminus \{0\}$, so ist auch $v_1' := \mu_1 v_1, \dots, v_n' := \mu_n v_n$ eine γ-Orthogonalbasis, mit Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix} \mu_1^2 a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 a_n \end{pmatrix}$.

Dies zeigt, dass $\operatorname{rk}(G)$ die einzige Invariante von symmetrischen Bilinearformen bis auf Isomorphismen ist, sofern $(K)^2 = K$, also falls jedes $a \in K$ eine Wurzel hat, etwa für $K = \mathbb{C}$ oder andere algebraisch abgeschlossene Körper.

Insbesondere: $(K)^2 = K$ $\Rightarrow \forall G \in M(n,K), G = G^t \ \exists T \in GL(n,K)$ $T^t G T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \, 0 \end{pmatrix}$

Andernfalls führt das Klassifikationsproblem auf eine u.U. komplizierte Invariante von K, seine <u>Witt-Gruppe</u>. Wir behandeln nur noch den Fall $K = \mathbb{R}$ genauer.

19.7 Der Sylvestersche Trägheitssatz

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V < \infty$ und $\gamma: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Nach 19.4 und 19.6 existiert dann eine Basis, bzgl. der γ durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} s \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \end{array}$$

beschrieben wird.

4.14

Satz: Die Zahlen $r, s, k \in \mathbb{N}$ sind Invarianten von γ, d.h. für jede γ-Orthogonalbasis $v_1, \dots, v_n$ von V sind im Tupel $(\gamma(v_1, v_1), \dots, \gamma(v_n, v_n))$ genau

r Einträge > 0

s Einträge < 0

k Einträge $= 0$.

Bew: $k = \dim V^{\perp}$ hängt nicht von $v_1, \dots, v_n$ ab.

Wie im Bew. von Satz 19.4 können wir daher o.E. γ nicht-entartet ($k = 0$) annehmen.

Seien $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n$ γ-Orthogonalbasen von V,

$a_i := \gamma(v_i, v_i)$, $b_i := \gamma(w_i, w_i)$:

Nach Umordnen der v_i bzw. der w_j können wir weiter annehmen:

$a_1, \dots, a_r > 0$, $a_{r+1}, \dots, a_n < 0$

$b_1, \dots, b_{r'} > 0$, $b_{r'+1}, \dots, b_n < 0$.

Wir zeigen: $v_1, \dots, v_r, w_{r'+1}, \dots, w_n$ sind linear unabhängig:

[Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_{r'+1}, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \mu_{r'+1} w_{r'+1} + \dots + \mu_n w_n = 0$.

$\Rightarrow v := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = -\mu_{r'+1} w_{r'+1} - \dots - \mu_n w_n =: w$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \gamma(v,v) = a_1 \lambda_1^2 + \dots + a_r \lambda_r^2 \geq 0 \\ \qquad \| \\ \gamma(w,w) = b_{r'+1} \mu_{r'+1}^2 + \dots + b_n \mu_n^2 \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_{r'+1} = \dots = \mu_n = 0.$$
]

$$\left.\begin{array}{l} \text{Demnach gilt } r + (n - r') \leq n, \text{ d.h. } r \leq r'. \\ \text{Vertauschen von } v_1, \dots, v_n \text{ mit } w_1, \dots, w_n \text{ liefert } r' \leq r \end{array}\right\} \Rightarrow r = r'.$$

$\square$

19.8 | Anwendung 1: Die Signatur

<u>Def:</u> Für eine symmetrische Bilinearform γ auf einem endlich-dim. $\mathbb{R}$-VR. V heißt das nach Satz 19.7 eindeutig bestimmte Tripel
$$(r,s,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
die <u>Signatur</u> von γ. Ist γ nicht-entartet ($k=0$), so nennt man auch (r,s) Signatur.

<u>Bem:</u> Es gilt $r+s+k = n = \dim V$ und es existiert eine Basis $v_1,\dots,v_n$ von V mit
$$\gamma\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\Big) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i - \sum_{i=r+1}^{r+s} \lambda_i \mu_i \,.$$

<u>Bsp:</u> a) Skalarprodukte ($\nearrow$ § 20) sind genau die γ mit Signatur $(n,0)$.

b) In der Relativitätstheorie betrachtet man nicht-entartete, symm. γ mit Signatur $(1,3)$ (Minkowski-Metrik). (vgl. Üb. 6.4)

19.9 | Quadratische Formen und Bilinearformen

<u>Def:</u> Eine <u>quadratische Form</u> in den Variablen $X_1,\dots,X_n$ und mit Koeffizienten im $\underbrace{\text{Ring}}^{\text{(komm.)}}$ R ist ein Polynom $q \in R[X_1,\dots,X_n]$, das <u>homogen vom Grad 2 ist</u>. <u>Analog:</u> Lineare Form, kubische Form, ... ($\nearrow$ Bsp. 16.11)

<u>Bsp:</u> $n=3$: $q = X_1^2 - X_2^2 - 3X_1X_2 \in R[X_1,X_2,X_3]$, R beliebiger Ring.

<u>Allgemein:</u> $q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j$ für $A = (a_{ij}) \in M(n,R)$. .

<u>Beobachtungen für $R = K$, $\mathrm{char}(K) \neq 2$:</u> 1) o.E. $A = A^t$, denn $\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_{ij} + a_{ji}) X_i X_j$.

2) $\forall u = (u_1, \ldots, u_n) \in K^n$: $q(u) = \gamma_A(u,u)$.

3) Koordinatenfrei gewinnt man $\gamma \in \underbrace{\mathrm{Bil}(K^n)}_{\text{symmetrisch}}$ mit $q(u) = \gamma(u,u)$ durch

$$\gamma(u,v) := \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v) \big).$$

In der Tat gilt für $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$, $q = \sum a_{ij} X_i X_j$:

$$\begin{aligned} q(u+v) &= \sum_{i,j} a_{ij} (u_i + v_i)(u_j + v_j) \\ &= \sum a_{ij} u_i u_j + \sum a_{ij} v_i v_j + \sum a_{ij} (u_i v_j + u_j v_i) \\ &= q(u) + q(v) + \sum (a_{ij} + a_{ji}) u_i v_j . \qquad \left[\Rightarrow \gamma = \gamma_{\frac{1}{2}(A + A^t)} \right] \end{aligned}$$

<u>19.10</u> | <u>Anwendung 2: Normalformen für quadratische Formen</u>

Sei $q \in K[X_1, \ldots, X_n]$ eine quadratische Form, $K = \mathbb{R}$ oder $(K)^2 = K$, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dann existiert eine lineare Variablentransformation

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} Y_j , \quad T = (t_{ij}) \in Gl(n,K)$$

mit:

$$q\left(\sum_j t_{1j}Y_j,\dots,\sum_j t_{nj}Y_j\right) = \begin{cases} Y_1^2+\dots+Y_r^2, & \text{für ein } r\le n \quad \underline{((K^*)^2=K^*)} \\ Y_1^2+\dots+Y_r^2-Y_{r+1}^2-\dots-Y_{r+s}^2, & \text{für } r,s\le n \quad (\underline{K=\mathbb{R}}) \end{cases}$$

und im Falle $K=\mathbb{R}$ sind r,s eindeutig (Satz 19.7).

[Wende Satz 19.4 auf die zugeh. Bilinearform an!]

Bem: Durch Homogenisieren erhält man auch Normalformen für nicht-homogene Polynome $f\in K[X_1,\dots,X_n]$, $\deg f=2$:

$$f=\sum a_{ij}X_iX_j+\sum b_iX_i+c$$

Homogenisierung:

$$\tilde f=\sum a_{ij}X_iX_j+\sum b_iX_iX_0+cX_0^2\in K[X_0,X_1,\dots,X_n].$$

Bsp: $K=\mathbb{R}$, $n=2,3$ $f\in\mathbb{R}[X,Y]$ bzw. $f\in\mathbb{R}[X,Y,Z]$

Klassifikation bis auf affine Koordinatentrf.

$$X_i\longmapsto\sum_{j=1}^n t_{ij}X_j+a_i.$$

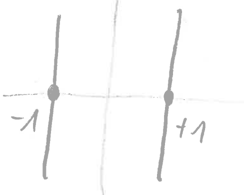
und bis auf Vorzeichen $\pm f$.

$f = x^t A x + bx + c$, $A \neq 0$ Signatur (r,s,k) o.E. $r \geq s$

$b \notin \operatorname{im} A$,

$b \neq 0 \Rightarrow c = 0$

$\boxed{f=0}$ →



n=2:

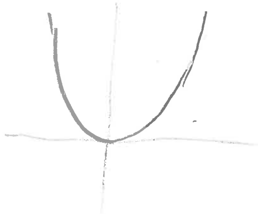
rk A=1 (1,0)

$x^2 - 1$

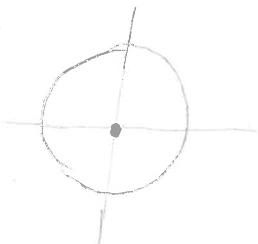
x^2

$x^2 + 1$

$x^2 - y$



Parabel



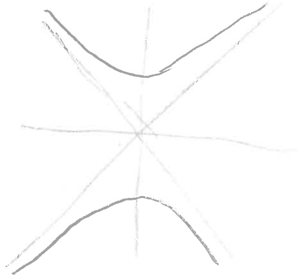
rk A=2 (2,0)

$x^2 + y^2 - 1$

$x^2 + y^2$

$x + y^2 + 1$

Kreis



(1,1)

$x^2 - y^2 + 1$

$x^2 - y^2$

Hyperbel

---

n=3: o.E. $\operatorname{im} A + \mathbb{R} \cdot b = \mathbb{R}^3$

rk A=3 (3,0)

$x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Kugeloberfläche = Sphäre

$x^2 + y^2 + z^2$

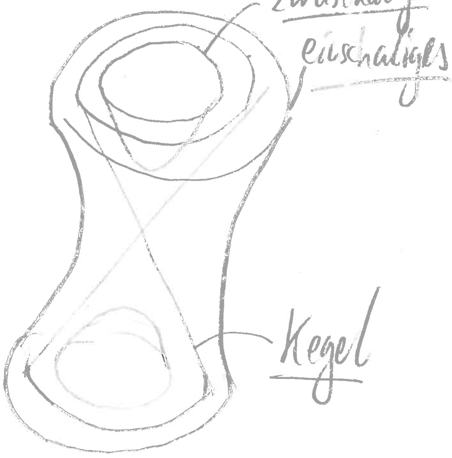
$x^2 + y^2 + z^2 + 1$

(2,1)

$x^2 + y^2 - z^2 - 1$

$x^2 + y^2 - z^2$

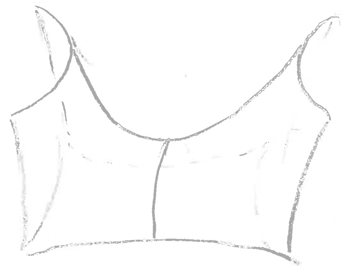
$x^2 + y^2 - z^2 + 1$



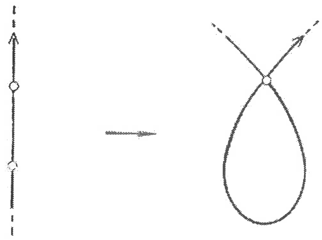
Hyperboloid

$\mathrm{rk}\, A = 2$ $(2,0)$ x^2+y^2-z Paraboloid

$(1,1)$ x^2-y^2-z Sattelfläche



Lit: Bröcker, S. 163 - 173 → Kegelschnitte, Flächen zweiter Ordnung



Eine Submersion ist nach dem Rangsatz offen: Bilder von offenen Mengen sind offen.

§ 3. Das Morse-Lemma

Manches grundlegende Theorem heißt Lemma, wie manche würdige Person noch mit ihrem Kindernamen gerufen wird; so auch dieses. Wir haben gelernt, daß eine C^2-Funktion lokal um einen singulären Punkt mit nicht ausgearteter Hesseform ebenso aussieht, wie diese Hesseform. Das Lemma von Morse sagt, daß in der Tat die Funktion sich lokal durch eine differenzierbare Koordinatentransformation in ihre Hesseform überführen läßt.

(3.1) Theorem *(M. Morse). Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ sei eine C^∞-Funktion. Sei $p \in U$ ein kritischer Punkt von f mit nicht ausgearteter Hessematrix $2H$. Dann gibt es eine Umgebung V von p in U und einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi : V \to V'$ mit $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und $D\varphi(p) = \mathrm{id}$, sodaß*

$$f \circ \varphi^{-1}(x) \;=\; f(p) + {}^t\!xHx.$$

Zunächst wollen wir die Transformationen der symmetrischen Matrizen selbst, also der quadratischen Formen, betrachten.

(3.2) Lemma. *Sei H eine reguläre symmetrische reelle $(n \times n)$-Matrix, dann gibt es eine Umgebung U von H im Raum S aller symmetrischen reellen $(n \times n)$-Matrizen und eine C^∞-Abbildung*

$P : U \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, mit $P(H) = \mathrm{id}$ und

$$ {}^tP(A) \cdot A \cdot P(A) \ = \ H $$

für alle $A \in U$.

Mit anderen Worten: Wenn A sich wenig von H unterscheidet, läßt sich A in H transformieren, und die Transformation hängt C^∞ von A ab.

Beweis: Jedenfalls gibt es ja eine Transformation T, sodaß ${}^tTHT$ eine Diagonalmatrix ist. Es genügt also, das Lemma für Diagonalmatrizen H zu zeigen. In diesem Fall schreiben wir $A = H + X$, wobei X eine Umgebung von 0 im Raum S der symmetrischen Matrizen durchlaufen soll, und wir suchen $P(A) = 1 + Y$ mit einer oberen Dreiecksmatrix Y. Hier ist $1 = \mathrm{id}$ die Einheitsmatrix. Erreichen wollen wir:

$$ F(X,Y) := {}^t(1+Y) \cdot (H+X) \cdot (1+Y) - H = 0. $$

Dies ruft nach dem Satz über das Auflösen von Gleichungen: Sei also S der Vektorraum der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen, V der Vektorraum der oberen Dreiecksmatrizen (gleicher Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$), und

$$ F : S \times V \to S, \quad (X,Y) \mapsto F(X,Y), $$

wie oben definiert. Wir wollen die Gleichung $F(X,Y) = 0$ lokal um $(0,0)$ durch $Y = Y(X)$ lösen. Für den Satz über das Auflösen von Gleichungen müssen wir also $D_Y F(0,0) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,S)$ berechnen. Nun, für $X = 0$ ist

$$ F(0,Y) = {}^tYH + HY + {}^tYHY, $$

also

$$ D_Y F(0,0) : Y \mapsto {}^tYH + HY. $$

Wir müssen zeigen, daß diese lineare Abbildung den Kern 0 hat, also ${}^tYH + HY = 0 \Longrightarrow Y = 0$. Weil aber H regulär diagonal, Y eine obere und damit ${}^tY$ eine untere Dreiecksmatrix ist, stimmt das.

□

Weil hier nur quadratische Gleichungen gelöst werden, kann man die Lösung auch durch eine Folge quadratischer Ergänzungen hinschreiben.

Beweis (3.1). Wir können $p = 0$, $f(0) = 0$ annehmen und

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, x_i x_j, \quad a_{ij}(0) = h_{ij},$$

mit C^∞-Funktionen a_{ij} und $(h_{ij}) = H$ schreiben. Das zeigt zum Beispiel die Integraldarstellung des Restglieds zweiter Ordnung der Taylorentwicklung. Setzen wir $A(x) = \big(a_{ij}(x)\big)$ und wählen P wie im Lemma, und $Q(x) := P\big(A(x)\big)$, so steht da

$$f(x) = {}^tx \cdot A(x) \cdot x, \quad {}^tQ(x) \cdot A(x) \cdot Q(x) = H,$$

also lokal um Null

$$f(x) = {}^t(Q(x)^{-1} \cdot x) \cdot H \cdot (Q(x)^{-1} \cdot x).$$

Bleibt also, $\varphi(x) = Q(x)^{-1} \cdot x$ zu setzen, was wegen

$$Q(0) = PA(0) = P(H) = \mathrm{id}$$

in der Tat bei Null die Ableitung id hat. Siehe unsere Definition der Ableitung. □

Auch hier braucht man nicht, daß f eine C^∞-Funktion ist: Die Differenzierbarkeitsordnung von φ hängt an der von $x \mapsto A(x)$, und diese kann höchstens zwei geringer als die von f sein.

Betrachten wir noch einmal Funktionen einer Variablen, etwa lokal um den Ursprung. Verschwindet der $(k-1)$-Jet von f am Ursprung, so ist, wie gesagt:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot x^k, \quad \varphi(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{[k]}(tx)\, dt,$$

wie man sieht, wenn man die Integraldarstellung des Restglieds der Taylorentwicklung (Bd. 1, IV, 2.5) auf die Funktion $x \mapsto f(x \cdot h)$ für $x = 1$ anwendet, und dann wieder x statt h schreibt. Uns interessiert nur, daß jedenfalls φ eine C^∞-Funktion ist, falls dasselbe für f gilt, und $a := \varphi(0)$ ist der k-te Taylorkoeffizient von f. Ist $a \neq 0$, so können wir schreiben:

$$f(x) = a \cdot \left(\psi(x)\right)^k, \quad \psi(x) := x \cdot \sqrt[k]{\varphi(x)/a}.$$

Weil $\varphi(0)/a = 1$, ist ψ lokal um Null eine C^∞-Funktion, und es ist $\psi'(0) = 1$, also haben wir gezeigt:

(3.3) Bemerkung. *Ist die reelle C^∞-Funktion f lokal um $p \in \mathbb{R}$ definiert und beginnt ihre Taylorentwicklung mit dem Term $a \cdot x^k$, $a \neq 0$, $k > 0$, so gibt es lokal um p eine invertierbare Transformation φ mit $\varphi(p) = 0$, $\varphi'(p) = 1$, sodaß*

$$f(x) = a \cdot \varphi(x)^k. \qquad \square$$

Auch in höherer Dimension sind fast alle Funktionen lokal durch ein endliches Taylorpolynom an der betreffenden Stelle bis auf Transformation bestimmt, aber das ist nicht so leicht zu zeigen, ja nicht einmal leicht zu sagen, was das heißen soll. Immerhin: Das Morselemma ist ein erster und der wichtigste Schritt.

§ 4. Der Satz von Sard

Ist U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar, so hat die Gleichung

$$f(x) = q$$

eine p-kodimensionale Untermannigfaltigkeit von U als Lösungsmenge, falls q ein regulärer Wert von f ist. Wie groß aber ist die Aussicht, daß man bei zufälliger Wahl von q einen regulären Wert von f trifft? Sehr groß, das sagt eben der

19.11 | Anwendung 3: Das Morse-Lemma (→ Analysis II, Diffgeom.)

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ glatt (C^∞), $P \in U$.
Es gelte $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$, $i = 1, \dots, n$, und die Hesse-Matrix $H(P) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right)_{i,j} \in M(n, \mathbb{R})$ habe vollen Rang. (Bem: $H(P) = H(P)^t$). Dann gibt es einen („krummlinigen") Koordinatenwechsel $x_i = x_i(y)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ mit

$$f(x_1(y), \dots, x_n(y)) = y_1^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_n^2 .$$

Hierbei ist (r,s) die Signatur von $\gamma_{H(P)}$.

Nützlich z.B. für Stabilitätsuntersuchungen.

Bew: Z.B. durch eine Version des Sylvesterschen Trägheitssatzes mit Parametern (→ Google: Bröcker Morse Lemma).

19.12 | Weitere Anwendung: Clifford-Algebren $C(V,\gamma)$ → Quaternionen, Spinoren, Dirac-Matrizen ...
$V \subset C(V,\gamma)$ und $\forall v, w \in V$: $v \cdot w + w \cdot v = 2\gamma(v,w)$

§20 Euklidische Vektorräume

20.1) Euklids Geometrie

Euklid (~300 v. Chr., Alexandria / Schüler von Platon): "Die Elemente" — erfolgreichstes Mathematikbuch aller Zeiten

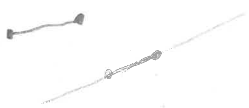
klass. axiomatischer Zugang zur (Elementar-) Geometrie:

Objekte: Punkte, Geraden, Strecken, Kreise, Winkel, ... (in der Ebene);

z.B. „Was keine Teile hat, ist ein Punkt",

„Eine Länge ohne Breite ist eine Linie", etc.

Axiome:



I. Je zwei Punkte können durch eine Strecke verbunden werden.

II. Jede Strecke kann zu einer Gerade erweitert werden

III. Zu jeder Strecke kann ein Kreis konstruiert werden mit je einem Endpunkt als Mittelpunkt und auf dem Kreis.

IV. Alle rechten Winkel sind zueinander kongruent.

V. Zu einer Geraden und einem disjunkten Punkt gibt es genau eine Gerade durch diesen Punkt, welche die erste Gerade nicht schneidet.

Strengere Axiomatisierungen: Hilbert 1899, Birkhoff 1932, Tarski 1959

(Tarskis System ist widerspruchsfrei, vollständig und entscheidbar!)

20.2 Analytische Geometrie

Im Gegensatz zum synthetischen Zugang über Axiome basiert der analytische Zugang zur Geom. auf Mengenlehre und Algebra, also auf der Beschreibung der geometrischen Objekte durch Gleichungen (René Descartes 1596–1650). In moderner Sprache erfordert dies einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt.

20.3 Skalarprodukte

Def: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR und $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ symmetrisch. Wir nennen γ positiv definit, oder ein Skalarprodukt, falls gilt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \quad \gamma(v,v) > 0 .$$

Das Paar (V,γ) heißt dann euklidischer Vektorraum.

Merke: Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-VR V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.

Notation: $\langle v,w\rangle := \gamma(v,w)$
$\|v\| := \langle v,v\rangle^{1/2}$ zugehörige Norm

Bem: $\dim V = n$, dann γ positiv definit $\Leftrightarrow$ γ hat Signatur $(n,0,0)$.

20.4 Beispiele

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle v,w\rangle = \langle v,w\rangle_E := v^t w$,

d.h. $\langle(\lambda_1,\dots,\lambda_n),(\mu_1,\dots,\mu_n)\rangle = \sum_i \lambda_i\mu_i$.

symmetrisch, bilinear. ✓

positiv definit: $\langle v,v\rangle = \sum_i \lambda_i^2 > 0$, falls $v \neq 0$.

b) Modifikation von (a): Sei $T \in GL(n,\mathbb{R})$.

$\langle v,w\rangle' := \langle T\cdot v, T\cdot w\rangle_E = (T\cdot v)^t \cdot (T\cdot w) = v^t (T^t T) w$

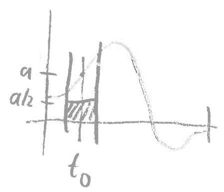
D.h. $\langle \cdot,\cdot\rangle' = \gamma_{T^tT}$.

Dieses Beispiel ist nicht wesentlich neu, denn $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identifiziert $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle')$ mit $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$; denn nach Def. gilt:

$\forall v,w \in \mathbb{R}^n : \langle v,w\rangle' = \langle Tv, Tw\rangle_E$.

c) $V = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$.

symmetrisch, bilinear: ✓



positiv definit: $f \neq 0 \Rightarrow \exists t_0 \in (0,1)$ $f(t_0) = a \neq 0$

f stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $\forall t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : t \in [0,1] \wedge |f(t)| \geq \left|\frac{a}{2}\right|$.

$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt \geq \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f^2(t)\,dt \geq 2\varepsilon\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 > 0$.

20.5 Das Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren (19.4 $\Rightarrow \exists$ ONB.)

Ist $w_1,\dots,w_n$ eine Basis des euklidischen VRs $(V,\langle,\rangle)$, so konstruiert das Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis (ONB) $v_1,\dots,v_n$ von V ($\langle v_i,v_j\rangle = \delta_{ij}$) mit

$\forall i = 1,\dots,n \quad L(w_1,\dots,w_i) = L(v_1,\dots,v_i)$.

Dieses Verfahren iteriert den folgenden Satz:

Satz: Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ ein euklidischer VR mit Basis $(w_1, \dots, w_n)$.
Sei ferner $v_1, \dots, v_k$ ONB von $L(w_1, \dots, w_k)$. Dann ist
$v_1, \dots, v_{k+1}$ ONB von $L(w_1, \dots, w_{k+1})$, falls

$$\boxed{\tilde{v}_{k+1} := w_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle w_{k+1}, v_i \rangle v_i\,, \quad v_{k+1} := \frac{1}{\|\tilde{v}_{k+1}\|} \cdot \tilde{v}_{k+1}}.$$

Bem: $\sum_i \langle w_{k+1}, v_i \rangle \cdot v_i$ ist die "Orthogonalprojektion" von w_{k+1} auf $L(v_1, \dots, v_k) = L(w_1, \dots, w_k)$, siehe 20.8.

Bew: $L(v_1, \dots, v_{k+1}) = L(w_1, \dots, w_{k+1})$: ✓

Orthonormalität: $\langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle = \left\langle \frac{1}{\|\tilde{v}_{k+1}\|} \tilde{v}_{k+1}, \frac{1}{\|\tilde{v}_{k+1}\|} \tilde{v}_{k+1} \right\rangle = \frac{\langle \tilde{v}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1} \rangle}{\|\tilde{v}_{k+1}\|^2} = 1.$

$$\forall j \le k: \quad \langle v_j, v_{k+1} \rangle = \frac{1}{\|\tilde{v}_{k+1}\|} \Big(\langle v_j, w_{k+1} \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle w_{k+1}, v_i \rangle \overbrace{\langle v_j, v_i \rangle}^{= \delta_{ij}} \Big)$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{v}_{k+1}\|} \Big(\langle v_j, w_{k+1} \rangle - \langle w_{k+1}, v_j \rangle \Big) = 0. \qquad \square$$

Bem: a) Für $V = \mathbb{R}^n$, $w_i = e_i$ hat der Basiswechsel $T: e_i \longmapsto v_i$ die Form
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i = \frac{1}{\|\tilde{v}_i\|} > 0.$$

b) Im Gegensatz zu Satz 19.4 funktioniert dieses Verfahren nur für positiv definite Bilinearformen (brauchen: $\langle \tilde{v}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1} \rangle \ne 0$).

20.6 | Positiv definite Matrizen

Def: Eine symmetrische Matrix $G \in M(n,\mathbb{R})$ heißt <u>positiv definit</u>, falls γ_G positiv definit ist. Solche Matr. sind also genau die Fundamentalmatrizen von Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^n$.

Satz: Sei $G \in M(n,\mathbb{R})$, $G = G^t$. Dann gilt

G ist positiv definit $\iff \exists\, T \in Gl(n,\mathbb{R}) : G = T^t \cdot T$.

Bew: "$\Rightarrow$": Sei $S: e_i \longmapsto v_i$ die Transformationsmatrix zu einer γ_G-Orthonormalbasis. Dann gilt

$\forall i,j: \delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle_G = \langle Se_i, Se_j\rangle_G = e_i^t S^t G S e_j$

$\Rightarrow S^t G S = E$

$\Rightarrow G = (S^{-1})^t \cdot S^{-1}$. Setze $T := S^{-1}$.

"$\Leftarrow$": Sei $v \neq 0$. Dann gilt $Tv \neq 0$ und also auch

$$\langle v,v\rangle_G = v^t \cdot G \cdot v = v^t T^t T v = (Tv)^t \cdot Tv = \langle Tv, Tv\rangle_E > 0.$$

□

Bem: Nach Bem. 20.5 kann T sogar als obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen gewählt werden.

20.7 | Das Hurwitz-Kriterium

Ein gutes Verfahren zum Beweis der Definitheit einer Matrix ist die Bestimmung der Signatur nach Satz 19.4. Manchmal ist aber auch folgende <u>notwendige</u> Bedingung nützlich:

$$G = T^t \cdot T,\ T \in Gl(n,K) \Rightarrow \det(G) = \det(T)^2 > 0.$$

Allgemeiner: Ist $U < \mathbb{R}^n$ und G' eine $\gamma_G|_{U\times U}$ beschreibende Matrix, so gilt $\det(G') > 0$.

<u>Bsp:</u> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist <u>nicht</u> positiv definit, denn $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$.
$(U = L(e_1, e_2))$

Wendet man diese Beobachtung auf die Unterräume

$$L(e_1) < L(e_1, e_2) < \ldots < L(e_1, \ldots, e_n)$$

an, so erhält man ein <u>hinreichendes</u> Kriterium:

<u>Satz</u> (Hurwitz-Kriterium)

Sei $G = (g_{ij}) \in M(n,K)$ und $G = G^t$. Dann gilt

$$G \text{ ist positiv definit} \Longleftrightarrow \forall\, k = 1, \ldots, n \quad \det\left((g_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}} \right) > 0.$$

<u>Bem:</u> $\det\left((g_{ij})_{1 \le i,j \le k}\right)$ heißt <u>k-ter Hauptminor von G</u>. Allgemeiner ist ein <u>Minor</u> einer Matrix die Determinante einer Untermatrix.

<u>Bew:</u> <u>„$\Rightarrow$"</u>: Siehe obige Diskussion.

"$\Leftarrow$": Setze $U_k := L(e_1, \dots, e_k)$, $G_k = (g_{ij})_{1 \le i,j \le k}$.

Induktiv beweisen wir: G_k ist positiv definit.

$k=0$: ✓

$k \to k+1$: $\det(G_{k+1}) > 0 \Rightarrow \gamma_G|_{U_{k+1} \times U_{k+1}}$ ist nicht-entartet.

$\overset{\text{Satz 19.3, (4)}}{\Rightarrow} \dim(U_k^\perp \cap U_{k+1}) = (k+1) - k = 1$.

$\Rightarrow \exists\, v \in U_k^\perp \cap U_{k+1}$: $e_1, \dots, e_k, v$ ist eine Basis von U_{k+1}.

Fundamentalmatrix von $\gamma_G|_{U_{k+1} \times U_{k+1}}$ bzgl. dieser Basis: $G' = \begin{pmatrix} G_k & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\det(G') = \det(G_k) \cdot \lambda$ und $\det(G_{k+1})$ haben das gleiche Vorzeichen, da G' und G_{k+1} beide $\gamma_G|_{U_{k+1} \times U_{k+1}}$ beschreiben.

$$\left.\begin{array}{l} \det(G_k) > 0,\ \det(G_{k+1}) > 0 \quad \Rightarrow \lambda > 0. \\ \text{Induktiv wissen wir: } G_k \text{ positiv definit} \end{array}\right\} \Rightarrow G' \text{ positiv definit}$$

$\Rightarrow G_{k+1}$ ist positiv definit. $\square$

Bsp: $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 14 \end{pmatrix}$ ist positiv definit!

$\det(1) = 1 > 0$

$\det(G) = 70 + 4 + 4 - 20 - 1 - 56 = 1 > 0$.

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0$

20.8| Orthogonalprojektionen

Ist $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR $\underbrace{}_{\dim V < \infty}$ und $U < V$, so gilt $V = U \perp U^\perp$ (Satz 19.3, (3)).

Def: Die Projektion $p_U \in \mathrm{End}(V)$ mit $\ker(p_U) = U^\perp$, $\mathrm{im}(p_U) = U$ heißt <u>Orthogonalprojektion</u> auf U.

Bem: Manchmal fasst man <u>p_U auch als</u> Abbildung $V \to U$ auf.

<u>Explizit:</u> Wähle eine ONB $u_1, \dots, u_k$ von U. Dann gilt:

$$\boxed{p_U(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle \cdot u_j}$$

<u>Bew:</u> $v \in U \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \quad v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle \cdot u_j = \sum_{i,j} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle \cdot u_i = \sum \lambda_i u_i = v = p_U(v).$$

$$v \in U^\perp \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \langle v, u_j \rangle \cdot u_j = 0 = p_U(v).$$

□

20.9 ↗ 8.4.28

20.10| Euklidische Vektorräume als metrische Räume

Ist $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR, so definiert

$$d(v,w) := \|v - w\| \quad , \quad v, w \in V$$

eine <u>Metrik</u> (einen Abstandsbegriff) auf V, denn $\|\cdot\|$ ist eine <u>Norm</u>:

Def: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Eine <u>Norm</u> auf V ist eine Abbildung

$$\|.\|: V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den Eigenschaften

(i) $\forall v \in V: (\|v\| = 0 \implies v = 0)$.   <u>Definitheit</u>

(ii) $\forall v \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\quad \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (<u>Homogenität</u>)

(iii) $\forall v,w \in V: \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ <u>Dreiecksungleichung</u>.

Satz: Ist $(V, \langle,\rangle)$ ein euklidischer VR, so ist $v \longmapsto \|v\| = \langle v,v\rangle^{1/2}$ eine Norm.

Bew: (i), (ii): ✓

(iii) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$

$$\overset{20.9.}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \qquad \square$$

20.9 Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung   [vgl. Analysis II]

Satz: Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein euklidischer VR. Dann gilt

$\forall v,w \in V: \ |\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ und Gleichheit gilt gdw. v,w linear abhängig.

Bew: Sei o.E. $v \neq 0$. Nach 20.8 für $U = L(v)^{\subset L(v,w)}$ existiert $w^\perp \in L(v)^\perp$ mit

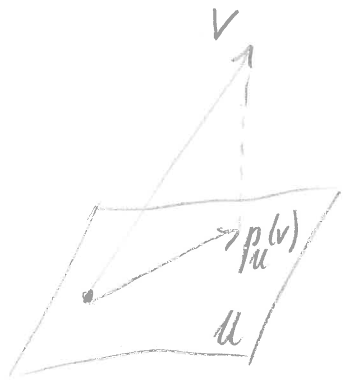
$$w = \lambda \cdot v + w^\perp, \quad \lambda := \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}.$$

Es folgt: $\|w\|^2 = \langle \lambda v + w^\perp, \lambda v + w^\perp\rangle = \lambda^2\|v\|^2 + \|w^\perp\|^2$

$$\geq \lambda^2 \|v\|^2 = \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2}$$ und "=" gdw. $w^\perp = 0$. $\square$.

Bsp: $\forall f,g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$: $\int_0^1 fg\,dt \leq \left(\int_0^1 f^2 dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 g^2 dt\right)^{1/2}$

20.11 | Minimalitätseigenschaft der Orthogonalprojektion



Satz: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR, $U < V$ ein Unterraum, p_U die Orthogonalprojektion auf V und $v \in V$. Dann realisiert $p_U(v)$ den minimalen Abstand von v zu allen $u \in U$:

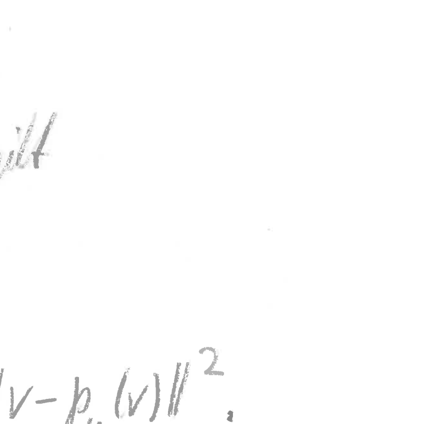
$$\forall u \in U \setminus \{p_U(v)\}: \|v-u\| > \|v - p_U(v)\|.$$

Bew: Setze $w := v - p_U(v) \in U^\perp$. Für $u \in U$ gilt

$$\|v-u\|^2 = \langle p_U(v) + w - u, p_U(v) + w - u \rangle$$
$$= \|p_U(v) - u\|^2 + \|w\|^2 \geq \|w\|^2 = \|v - p_U(v)\|^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\|p_U(v) - u\|^2 = 0$, d.h. falls $u = p_U(v)$. $\square$

20.12 | Winkel



Motivation: Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$, $\|w\| = 1$.

Es gilt $v^{\|} \overset{(20.8)}{=} \langle v, w \rangle \cdot w \underset{\text{(Analysis)}}{=} \cos(\alpha) \cdot \|v\| \cdot w$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\|} = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$ ← Allgemein: Betrachte v, w in $(L(v,w), \langle , \rangle|_{L(v,w)})$

Def: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR, $v, w \in V \setminus \{0\}$. Der Winkel zwischen v und w ist das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit

4.30

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}}$$

Bem.: a) $-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1$ gilt nach Cauchy-Schwarz.

b) $\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \langle v,w\rangle = 0 \iff v \perp w$

$\alpha \in \{0,\pi\} \iff |\langle v,w\rangle| = \|v\|\cdot\|w\|$

$\overset{20.9.}{\iff} \exists \lambda \in \mathbb{R} : w = \lambda v$. $(\lambda > 0 : \alpha = 0,\ \lambda < 0 : \alpha = \pi)$.

Evtl. noch: Beschreibung affiner Unterräume.

§21. Orthogonale Gruppen

21.1 | Automorphismen von Räumen mit Bilinearform

Def: a) Sei V ein K-VR, und $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$. Ein Automorphismus von (V,γ) ist ein $\Phi \in GL(V)$ mit der Eigenschaft

$$\forall v,w \in V: \gamma(\Phi(v),\Phi(w)) = \gamma(v,w).$$

Diese Bedingung definiert die Untergruppe $\mathrm{Aut}(V,\gamma) \subset GL(V)$.

b) Speziell:

orthogonale Gruppe $O(n) := \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle_E)$ [allgemein auch $O(V,\langle,\rangle)$, $SO(V,\langle,\rangle)$]

spezielle orth. Gr. $SO(n) := O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$ [$O(1,3)$: Lorentzgruppe]

pseudo-orthogonale Gruppen $O(p,q) := \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{p+q}, \gamma_{E_{p,q}})$, $E_{p,q} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$.

symplektische Gruppe $Sp(n) := \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{2n}, \gamma_I)$, $I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$. (antisymmetrisch!)

21.2 | Charakterisierung orthogonaler Matrizen

Satz: Sei $A \in M(n,\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in O(n)$

(ii) $A^t \cdot A = E$

(iii) $A \cdot A^t = E$

(iv) A bildet $(e_1,\dots,e_n)$ auf eine ONB von $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle_E)$ ab.

(v) $\forall v \in \mathbb{R}^n: \|A\cdot v\| = \|v\|$.

(vi) $A(S^{n-1}) = S^{n-1}$, wobei $S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$.

$(n-1)$-Sphäre

Bew: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ $A^t = A^{-1}$, (v) $\Leftrightarrow$ (vi): ✓

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) : $A \in O(n)$

$\Leftrightarrow \forall i,j = 1,..,n \quad \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = e_i \cdot A^t A \cdot e_j$

(v) $\Rightarrow$ (i): $\quad 2\langle Av, Aw \rangle = \| A(v+w)\|^2 - \|A \cdot v\|^2 - \|Aw\|^2$

$\quad = \| v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$

(i) $\Rightarrow$ (v): ✓ $\quad = 2\langle v,w\rangle .$

$\square$

Korollar: $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) \in \{\pm 1\}$.

Bew: $\det(A)^2 = \det(A^t A) = 1.$

$\square$

Bem: Ist $T \in O(n)$ mit $\det(T) = -1$, etwa $T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$, so gilt

$$O(n) = SO(n) \sqcup SO(n) \cdot T.$$

Insbesondere ist $\det : O(n) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$ surjektiv mit Kern $SO(n)$, induziert daher einen Isomorphismus von Gruppen $O(n)/SO(n) \simeq \mathbb{Z}/2$.

21.3 SO(2) und O(2)

Dies ist der erste interessante Fall ($SO(1) = \{1\}$, $O(1) = \{\pm 1\}$).

Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Dann gilt:

$$1 = \|Ae_1\|^2 = a^2 + b^2 \overset{\text{Analysis}}{\Longrightarrow} \exists!\, \varphi \in [0, 2\pi) : a = \cos\varphi,\ b = \sin\varphi$$

$$0 = \langle Ae_1, Ae_2 \rangle = ac + bd \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$1 = \det(A) = ad - bc = a\cdot(\lambda a) - b(-\lambda b) = \lambda(a^2+b^2) = \lambda$$

Dies zeigt: $\quad A(\varphi) \longmapsto e^{i\varphi}$

Satz: $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cong \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = U(1).$ $\square$

Bem: a) Gilt auch als Gruppe: $A(\varphi)\cdot A(\psi) = A(\varphi+\psi)$. (Add.theoreme!)

b) $\chi_{A(\varphi)} = p_{A(\varphi)} = T^2 - 2(\cos\varphi)T + 1 \in \mathbb{R}[T]$ ($\nearrow$ Bsp 17.8, c)

$\varphi \neq 0, \pi \Rightarrow \chi_{A(\varphi)}$ hat keine Wurzeln, also hat A keine Eigenvektoren, wie erwartet.

Sei jetzt $B \in O(2) \setminus SO(2)$.

$\overset{\text{Bem 21.2}}{\Longrightarrow} \quad B\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(2)$

$\Longrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi) \quad B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\chi_B = T^2 - \mathrm{Tr}(B)\cdot T + \det(B) = T^2 - 1 = (T-1)(T+1)$$

$\overset{17.6}{\Longrightarrow}$ B ist eine Involution und wir haben eine Zerlegung

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\cdot v \oplus \mathbb{R}\cdot w \quad \text{mit} \quad \left. \begin{matrix} B\cdot v = v \\ B\cdot w = -w \end{matrix} \right\} \text{ Eigenvektoren zu EW} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

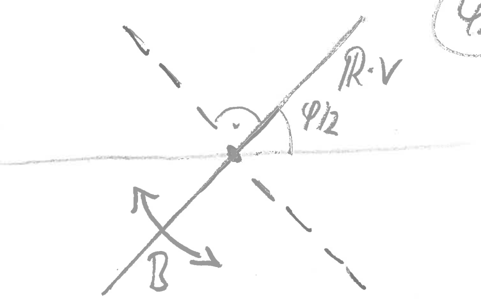
Explizit: $\mathbb{R}\cdot v = \mathrm{im}\left(\frac{1}{2}(B+E)\right) = \mathrm{im}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & 1-\cos\varphi \end{pmatrix}\right) \overset{(!)}{=} \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$

(Add.theoreme!)

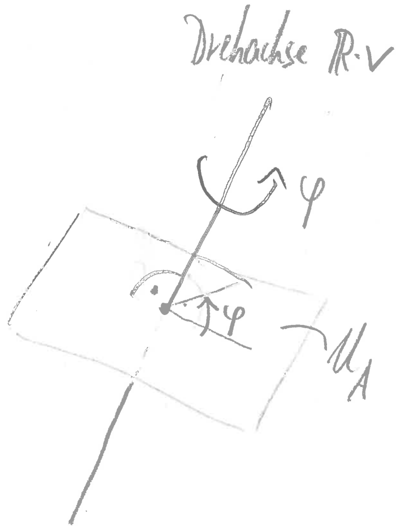
$\mathbb{R}\cdot w = \mathrm{im}\left(\frac{1}{2}(B-E)\right) = \ldots = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}.$

Ferner: $\quad \langle v, w\rangle = \langle Bv, Bw\rangle = -\langle v, w\rangle \Longrightarrow v \perp w$

<u>Interpretation</u>: B ist die orthogonale Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}\cdot v$.



21.4 | SO(3) und O(3)



$SO(3)$ ist die Gruppe der <u>Raumdrehungen</u>:

<u>Satz</u>: Sei $A \in SO(3)$. Dann existiert $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$A \cdot v = v,$$

und für $U_A = (\mathbb{R}\cdot v)^\perp$ gilt

$$A \cdot U_A = U_A \quad \text{und} \quad A|_{U_A} \in SO(U_A, \langle\,,\rangle|_{U_A \times U_A}) \cong SO(2).$$

<u>Bew</u>: $\deg \chi_A = 3 \Rightarrow \exists$ reeller EW λ.

Sei $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$: $A\cdot v = \lambda \cdot v$.

Es gilt $\lambda^2 = \|\lambda v\|^2 = \|Av\|^2 = \|v\|^2 = 1$

$\Rightarrow \lambda \in \{\pm 1\}$.

Die übrigen NST von χ_A sind entweder beide reell ($\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$: Fall 1)

oder konjugiert komplex ($\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: Fall 2).

<u>Fall 1</u>: $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \{\pm 1\}$, $\lambda\lambda'\lambda'' = \det A = 1 \Rightarrow$ nicht alle $= -1$, also o.E. $\lambda = 1$.

<u>Fall 2</u>: $1 = \det A = \lambda \cdot |\mu|^2 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

Schließlich gilt noch: $w \in (\mathbb{R}\cdot v)^\perp \Rightarrow \langle Aw, Av\rangle = \langle w, v\rangle = 0 \Rightarrow Aw \in (\mathbb{R}\cdot v)^\perp$.

Orthogonalitätseigenschaft und $\det(A)=1$ übertragen sich auf U_A. $\square$

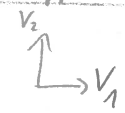
<u>Bem:</u> Für $A \in SO(n)$ kann man analog eine A-invariante Zerlegung
$$\mathbb{R}^n = V_1 \perp V_{-1} \perp V_{\varphi_1} \perp \dots \perp V_{\varphi_k} \qquad (\text{d.h. } A \cdot V_\bullet = V_\bullet)$$
finden mit $A|_{V_1} = \mathrm{Id}$, $A|_{V_{-1}} = -\mathrm{Id}$ und $A|_{V_{\varphi_i}}$ eine Drehung in einem zweidimensionalen Unterraum. (<u>Lit:</u> z.B. Bosch §7.5, Satz 8 oder Bröcker V.5)

<u>$O(3)$:</u> Man hat einen Isomorphismus
$$\mathbb{Z}/2 \times SO(3) \to O(3), \quad \begin{aligned} (1,A) &\longmapsto A \\ (-1,A) &\longmapsto -A. \end{aligned}$$

$B \in O(3) \setminus SO(3)$ ist also Komposition einer Raumdrehung mit der <u>Inversion</u>
$$I: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \longmapsto -v.$$

<u>Bem:</u> Dagegen gilt <u>nicht</u> $O(2) \cong \mathbb{Z}/2 \times SO(2)$ als Gruppe!

21.5 <u>Die Orientierung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen</u>

<u>Motivation:</u> In $\mathbb{R}^2$: 

In $\mathbb{R}^3$: Rechte-Hand-Regel

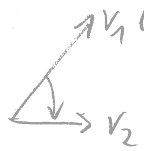
Sei V ein $\mathbb{R}$-VR und
$$GL^+(V) := \{\Phi \in GL(V) \mid \det(\Phi) > 0\}.$$

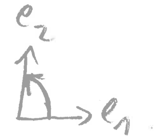
<u>Def:</u> Zwei Basen von V heißen <u>gleich orientiert</u>, wenn sie durch ein Element von $GL^+(V)$ auseinander hervorgehen. Die Wahl einer der zwei Äquivalenzklassen gleich orientierter Basen heißt <u>Orientierung von V</u>. $GL^+(V)$ sind dann die <u>orientierungserhaltenden</u> Transformationen von V in sich.

Bsp: a) $(e_1, \dots, e_n)$ definiert die Standardorientierung für $\mathbb{R}^n$.

b) $(1,2), (1,0) \in \mathbb{R}^2$ und e_1, e_2 sind nicht gleich orientiert

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$.





21.6 Die kanonische Volumenform orientierter euklidischer Vektorräume

Auf einem orientierten euklidischen Vektorraum können wir wie im $\mathbb{R}^n$ eine alternierende n-Form durch eine Normierungsbedingung auszeichnen:

Lemma: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR, und $v_1, \dots, v_n$ bzw. $w_1, \dots, w_n$ gleich orientierte Orthonormalbasen. Dann gilt

$$\forall \omega \in Alt^n(V) : \omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(w_1, \dots, w_n).$$

Bew: Sei $\Phi \in GL(V)$ mit $\Phi(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$.

Dann gilt $\Phi \in O(V, \langle , \rangle)$ (vgl. Satz 21.2, (iv)) und $\det(\Phi) > 0$,

also $\det(\Phi) = 1$.

$$\Rightarrow \omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) \underset{\text{(Mult. von det)}}{\overset{(!)}{=}} \det(\Phi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_n)$$ □

Def: Das nach dem Lemma eindeutig definierte $\omega \in Alt^n(V)$ mit $\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$ (für eine (jede) ONB $v_1, \dots, v_n$) heißt kanonische Volumenform des orientierten euklidischen Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$.

Bezüglich einer beliebigen orientierten Basis erhält man:

<u>Satz:</u> Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit der durch eine Basis $v_1, \dots, v_n$ gegebenen Orientierung, $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$ die Fundamentalmatrix. Dann gilt für die kanonische Volumenform ω:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det(G)}.$$

<u>Bew:</u> Durch Wahl eines Isomorphismus $(V, \langle , \rangle) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_E)$ dürfen wir $(V, \langle , \rangle) = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_E)$ voraussetzen und $\omega = \det$.

$\Rightarrow \omega(v_1, \dots, v_n) = \det(B)$ für $(B : e_i \mapsto v_i) \in M(n, \mathbb{R})$.

Ferner gilt $G = B^t \cdot B$, also $\det(G) = \det(B)^2$. $\square$

<u>Bem:</u> Ausdrücke der Form $\sqrt{\det(G)}$ gehen in die Transformationsformel für Oberflächenintegrale (Untermannigfaltigkeiten) ein, ↗ Anal. III.

§22. Hauptachsentransformation

22.1 Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR. Man hat den kanonischen Isom.

$$\Phi_0 := \Phi_{\langle , \rangle} : V \longrightarrow V^*, \quad v \longmapsto \langle v, \cdot \rangle \qquad (\nearrow 18.5)$$

Lemma: $\forall \gamma \in \mathrm{Bil}(V)\ \exists\, \Gamma \in \mathrm{End}(V) : \forall v,w \in V \ \boxed{\gamma(v,w) = \langle \Gamma(v), w \rangle}$.

Bew: Setze $\Gamma := \Phi_0^{-1} \circ \Phi_\gamma$, d.h. für $v \in V$

$$\langle \Gamma(v), \cdot \rangle = \Phi_0(\Gamma(v)) = \gamma(v, \cdot).$$ □

Def: $\Gamma \in \mathrm{End}(V)$ heißt selbstadjungiert, falls

$$\forall v,w \in V : \quad \langle \Gamma(v), w \rangle = \langle v, \Gamma(w) \rangle,$$

d.h. falls die zugehörige Bilinearform $\gamma = \langle \Gamma(\cdot), \cdot \rangle$ symmetrisch ist.

Satz: Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $G, A \in M(n, \mathbb{R})$ die Fundamentalmatrix von $\langle , \rangle$ bzw. die $\Gamma \in \mathrm{End}(V)$ beschreibende Matrix. Dann gilt

$$\Gamma \text{ ist selbstadjungiert} \iff A^t \cdot G = G \cdot A.$$

Bem: Insbesondere für $v_1, \dots, v_n$ ONB: Γ selbstadj. $\iff A^t = A$.

Bew: $\langle \Gamma(v_i), v_j \rangle = e_i A^t G e_j$

$\langle v_i, \Gamma v_j \rangle = e_i G A e_j$. $\square$

22.2| Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

Dies ist das Hauptresultat dieses Par.

Satz: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR, $\dim V < \infty$, und $\Gamma \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann existiert eine ONB von V aus Eigenvektoren von Γ.

Bew: ↗ 22.7, 22.8

Bem: a) Selbstadjungierte Endomorphismen sind also nicht nur diagonalisierbar, sondern sogar orthonormal diagonalisierbar.

b) "Spektrum" = Menge der Eigenwerte (↗ QM).

22.3| Anwendung 1: Simultane Orthogonalbasen

In Matrixform heißt Satz 22.2:

Korollar: Sei $P = P^t \in M(n, \mathbb{R})$ positiv definit und $G = G^t \in M(n, \mathbb{R})$ eine beliebige symmetrische Matrix. Dann existiert $T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit

$$T^t \cdot P \cdot T = E \quad \wedge \quad T^t \cdot G \cdot T \text{ eine Diagonalmatrix.}$$

//

Bew: Betrachte $(V, \langle\,,\rangle) := (\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle_P)$.

Sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ONB und $T_1 \in Gl(n, \mathbb{R})$ mit $T_1 e_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Dann gilt $T_1^t \cdot P \cdot T_1 = E$; denn

$$\forall i,j: \quad \delta_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle T_1 e_i, T_1 e_j \rangle = e_i^t \cdot T_1^t P T_1 e_j .$$

Wende Satz 22.2 an auf $G' := T_1^t \cdot G \cdot T_1 = (G')^t$ und $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle_E)$.

Dies liefert $T_2 \in O(n)$ mit $T_2^t \cdot G' \cdot T_2 = (T_1 T_2)^t G (T_1 T_2)$ diagonal. (↗22.4)

Setze $T := T_1 \cdot T_2$. Es gilt auch: $T^t \cdot P \cdot T = T_2^t \cdot (T_1^t P \cdot T_1) T_2 = T_2^t \cdot T_2 = E$. □

22.4| Anwendung 2: Hauptachsentransformation

Dies ist der wichtigste und bekannteste Fall von Satz 22.2.

Korollar: Sei $G \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert $T \in SO(n)$ mit

$$T^t \cdot G T = T^{-1} G T \quad \text{diagonal.}$$

Bew: Setze $P = E$ in Kor. 22.3. Falls $\det T = -1$, ersetze noch v_1 durch $-v_1$. □

Merke: Jede symmetrische Matrix ist (orthogonal) diagonalisierbar. Da $T \in SO(n)$, fallen geht der Basiswechsel als Bilinearform $(G \mapsto T^t G T)$ und als Endomorphismus $(G \mapsto T^{-1} G T)$ zusammen.

Praktisches Verfahren: Finde eine Basis aus Eigenvektoren wie in §17, d.h. bestimme die Nullstellen λ_i von $\underbrace{\chi_G}_{\text{(sind alle } \in \mathbb{R}!)}$ und berechne $\ker(G - \lambda E)$.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind automatisch orthogonal, siehe Lemma 22.5. Innerhalb der Eigenräume: Orthonormiere, z.B. nach Gram-Schmidt.

22.5 | Orthogonalität der Eigenräume

Lemma: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer VR und $\Gamma \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Sind dann $v, w \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so gilt $v \perp w$.

Bew: $\lambda \cdot \langle v, w \rangle = \langle \Gamma v, w \rangle = \langle v, \Gamma w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$

$\Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot \langle v, w \rangle = 0$

$\overset{\lambda \neq \mu}{\Longrightarrow} \langle v, w \rangle = 0.$ $\square$

22.6 | Hauptachsen von Quadriken und von starren Körpern.

Korollar 22.4 zeigt auch, dass man jede reelle quadratische Form sogar orthonormal auf Normalform (siehe 19.10) bringen kann. Für eine reelle Quadrik (= Nullstellenmenge von $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg f = 2$)

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + b^t x + c = 0 \} \quad , \quad A \in M(n, \mathbb{R}) \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R},$$

bedeutet dies, dass man eine Bewegung $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

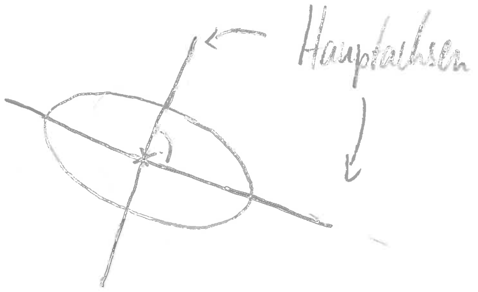
$$\Theta : x \longmapsto Tx + v \quad , \quad T \in SO(n),\ v \in \mathbb{R}^n$$

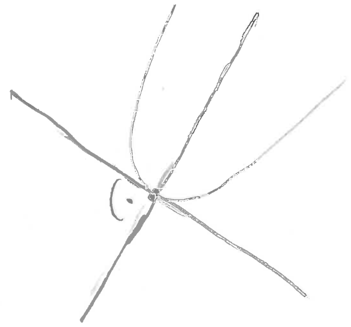
finden kann, so dass $\Theta(Q)$ die Normalform $\{ y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) = 0 \}$ hat mit

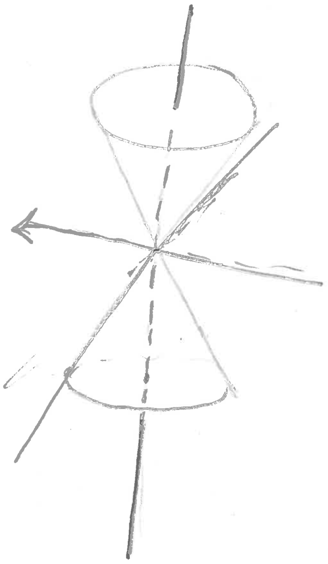
$$f(y_1,\dots,y_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \kappa, & b \in \operatorname{im}(A) \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2 + y_n + \kappa, & b \notin \operatorname{im}(A) \end{cases}$$

wobei $\lambda_i, \kappa \in \mathbb{R}$. Die affinen Geraden $\Theta^{-1}(\mathbb{R}\cdot e_i) \subset \mathbb{R}^n$ heißen <u>Hauptachsen</u> von Q, $\Theta^{-1}(0)$ das <u>Zentrum</u> oder der <u>Schwerpunkt</u> von Q. Die Hauptachsen von Q sind eindeutig gdw. A n verschiedene Eigenwerte hat.

<u>Bsp</u>:







In der Physik erkennt man durch Hauptachsentransformation des <u>Trägheitstensors</u> (d.i. ein $M \in M(3,\mathbb{R})$, $M = M^t$), dass <u>jeder</u> Körper $\underbrace{\ 3\ }_{\text{(mindestens)}}$ Hauptachsen hat.

<u>Lit</u>: Bröcker <u>VI</u>, §1&2 und S. 125-126

22.7 Beweis des Spektralsatzes 22.2

<u>Situation:</u> $(V, \langle , \rangle)$: eukl. VR, $\Gamma \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert

z.z.: $\exists$ ONB aus Eigenvektoren von Γ.

<u>Lemma:</u> Ist $U \subset V$ und $\Gamma(U) \subset U$, dann gilt $\Gamma(U^\perp) \subset U^\perp$.

<u>Bew:</u> Sei $v \in U^\perp$. Es gilt:

$\forall u \in U$: $\langle \Gamma v, u \rangle = \langle v, \Gamma u \rangle = 0$, denn $\Gamma u \in U$ nach Vor.

$\Rightarrow \Gamma v \in U^\perp$. □

<u>Bew von 22.2:</u> Induktion nach $n := \dim V$.

<u>$n=0$:</u> nichts zu zeigen.

<u>$(n-1) \to n$:</u> In 22.8 werden wir zeigen, dass Γ zumindest <u>einen</u> Eigenvektor v_n besitzt. Setze $U := \mathbb{R} v_n$. Nach dem Lemma gilt $\Gamma(U^\perp) \subset U^\perp$. Ferner ist dann $\Gamma|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$ selbstadjungiert bzgl. $\langle , \rangle|_{U^\perp}$. Nach Ind.vor. existiert nun eine ONB $v_1, \dots, v_{n-1}$ von Eigenvektoren von $\Gamma|_{U^\perp}$. Die gesuchte Basis ist $v_1, \dots, v_n$. □

22.8 | Existenz von Eigenvektoren selbstadjungierter Endomorphismen (4.44)

Wir geben einen analytischen Beweis. Ein algebraischer Beweis ist durch Übergang zu $\mathbb{C}$ möglich (z.B. in Bosch).

Idee: Ist $v_1, \dots, v_n$ eine ONB aus Eigenvektoren zu EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, so gilt für $v = \sum_i \alpha_i v_i$, $\|v\| = 1$:

$$\langle \Gamma v, v\rangle = \langle \sum_i \lambda_i \alpha_i v_i, \sum_j \alpha_j v_j\rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_n \cdot \sum_i \alpha_i^2 = \lambda_n$$

und "=" gilt gdw $\Gamma v = \lambda_n v$.

Bew: o.E. dürfen wir $(V, \langle\, ,\rangle) = (\mathbb{R}^n, \langle\, ,\rangle_E)$ annehmen.

Betrachte die stetige Funktion

$$f: S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto \langle \Gamma v, v\rangle.$$

S^{n-1} ist abgeschlossen und beschränkt $\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\Longrightarrow}$ S^{n-1} ist (folgen-)kompakt.

Eine stetige Funktion auf einer (folgen-)kompakten Menge nimmt ihr Supremum an*. (↗ Analysis II, Folgerung 6.33)

$$\Rightarrow \exists\, v \in S^{n-1}: \langle \Gamma v, v\rangle = \lambda, \quad \lambda := \sup_{w \in S^{n-1}} f(w) = \sup_{w \in S^{n-1}} \langle \Gamma w, w\rangle.$$

[* $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. Wähle $x_n \in K$ mit $f(x_n) \to \sup f(x) =: \lambda$

K kompakt $\Rightarrow$ (x_n) hat eine konvergente Teilfolge (x_n').

Es gilt dann $\lambda = \lim_{n\to\infty} f(x_n') \underset{f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{n\to\infty} x_n')$.]

Zerlege nun $\Gamma v = \alpha v + \beta w$ mit $w \in (\mathbb{R}v)^\perp$, $\|w\|=1$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \alpha = \langle \Gamma v, v\rangle = \lambda$, $\beta = \langle \Gamma v, w\rangle$.

Wir zeigen: $\beta = 0$.

Betrachte dazu die Variation

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(v+tw), \quad |t|<\frac{1}{2}.$$

Es gilt $\|v(t)\|^2 = \frac{1}{1+t^2}\left(\|v\|^2 + t^2\|w\|^2\right) = 1$, d.h. $t\mapsto v(t)$ parametrisiert eine Kurve auf S^{n-1}. Also definiert

$$g(t) := f(v(t)) = \langle \Gamma v(t), v(t)\rangle$$

eine differenzierbare Funktion $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{R}$, die in $t=0$ einen Extremwert hat.

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{1+t^2}\left(\langle \Gamma v, v\rangle + \underline{t\langle \Gamma v, w\rangle} + \underline{t\overset{\langle w, \Gamma v\rangle}{\overset{\parallel}{\langle \Gamma w, v\rangle}}} + t^2\langle \Gamma w, w\rangle\right)$$

$$= \langle \Gamma v, w\rangle + \langle w, \Gamma v\rangle = 2\beta.$$

Dies zeigt $\beta = 0$, also $\Gamma v = \lambda v$. (und dann $\lambda = \lambda_n$). □

Bem: „Auch in der Numerik und für die Spektraltheorie in Hilberträumen ist dieses Verfahren nützlich." Man betrachtet den Rayleigh-Quotienten

$$V\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \frac{\langle \Gamma v, v\rangle}{\|v\|^2}.$$

22.9 Anwendung 3: Polarzerlegung

Satz a) Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein eukl. VR, $\dim V < \infty$, und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Dann existieren $\psi \in O(V, \langle , \rangle)$ und $\eta \in \mathrm{End}(V)$ positiv semidefinit

(d.h. η selbstadjungiert $\forall v \in V: \langle v, \eta(v) \rangle \geq 0$) mit $\boxed{\varphi = \eta \circ \psi}$.

b) $\forall A \in M(n, \mathbb{R})\ \exists\ T \in O(n),\ P = P^t \in M(n, \mathbb{R})$ positiv semidefinit: $\boxed{A = P \cdot T}$.

Bem: Diese Zerlegung ist eindeutig für invertierbare φ bzw. A. Dies liefert ein Analogon für $GL(n, \mathbb{R})$ der Polarkoordinaten, mit

$\psi, T \longleftrightarrow$ Winkel, $\quad \eta, P \longleftrightarrow$ Radius.

Bew: Wir zeigen nur die Matrixversion (b).

$(A^t A)^t = A^t A$

$\overset{\text{Satz 22.2}}{\Longrightarrow} \exists$ ONB $v_1, \ldots, v_n$ von Eigenvektoren von $A^t A$ mit EWen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Es gilt:

$\forall i, j: \langle A v_i, A v_j \rangle = \langle v_i, A^t A v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$.

Also bildet A $v_1, \ldots, v_n$ in ein Orthogonalsystem ab

(bemerkenswert: Dies geht für jedes A!) und $\lambda_i = \langle A v_i, A v_i \rangle \geq 0$.

$\Rightarrow \exists$ ONB $w_1, \ldots, w_n$ von V mit $A v_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot w_i$.

Setze $T := (v_i \longmapsto w_i) \in O(n)$, $P := (w_i \longmapsto \sqrt{\lambda_i} w_i)$.

Es gilt $\forall i: PT v_i = \sqrt{\lambda_i} w_i = A v_i \quad \Longrightarrow \quad A = PT$. $\square$

§23 Unitäre Räume

Häufig ist es notwendig oder nützlich, über $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ zu arbeiten, z.B. in der QM oder der (nicht-elementaren) Geometrie.

Unitärer Raum = $\mathbb{C}$-VR mit Skalarprodukt.

Skalarprodukte für $\mathbb{C}$-VR'e sind nicht bilinear und symmetrisch, sondern hermitesch. (Charles Hermite 1822–1901; bewies u.a. die Transzendenz von e)

23.1 Hermitesche Formen

Def: a) Eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{C}$-VR. V ist eine Abb.

$$\gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\ \forall u, v, w \in V : \quad \gamma(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \gamma(u,w) + \mu \gamma(v,w)$.

(ii) $\forall u, v \in V \quad : \quad \gamma(u,v) = \overline{\gamma(v,u)}$.

b) $A \in M(n,\mathbb{C})$ hermitesch $:\Longleftrightarrow A^t = \bar{A}$.

Bem: (i), (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\gamma(u, \lambda v + \mu w) = \bar{\lambda}\gamma(u,v) + \bar{\mu}\gamma(u,w)$.

Merke: Hermitesche Formen sind linear im ersten Eintrag, antilinear im zweiten ("sesquilinear"; lat. sesqui = eineinhalb).

23.2 Beispiele

a) Hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^n$: $(u,v) \longmapsto \langle u, v \rangle_E := u^t \cdot \bar{v}$.

D.h. $\langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \rangle_E = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_j}$.

b) $G \in M(n, \mathbb{C})$ hermitesch

$\Longrightarrow \gamma_G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \ (u,v) \mapsto u^t \cdot G \cdot \overline{v}$ ist eine hermitesche Form:

$\forall u,v \in V: \ \overline{\gamma(v,u)} = \overline{v^t \cdot G \cdot \overline{u}} = \overline{v}^t \cdot \overline{G} \cdot u = (\overline{v}^t \cdot \overline{G} \cdot u)^t$ (Transposition in $M(1,\mathbb{C})$)

$= u^t \cdot \overline{G}^t \cdot \overline{v} = u^t \cdot G \cdot v = \gamma(u,v)$.

Umgekehrt: $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = \gamma(e_i, e_j)$.

Analog zu 18.2/18.3 sieht man:

$$\{G \in M(n,\mathbb{C}) \mid G^t = \overline{G}\} \longrightarrow \{\gamma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ hermitesch}\}, \ G \mapsto \gamma_G$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-VRen.

23.3 | Unitäre Vektorräume

Bem: γ hermitesch $\Rightarrow \forall v \ \gamma(v,v) = \overline{\gamma(v,v)} \in \mathbb{R}$

Def: a) Eine hermitesche Form γ auf einem $\mathbb{C}$-VR V heißt positiv definit, falls gilt

$\forall v \in V \setminus \{0\}: \ \gamma(v,v) > 0$. (analog für $G \in M(n,\mathbb{C})$, $\overline{G} = G^t$).

b) Ein unitärer Vektorraum ist ein $\mathbb{C}$-VR V zusammen mit einer positiv definiten, hermiteschen Form $\gamma = \langle \, , \rangle$. γ heißt auch (unitäres) Skalarprodukt.

Bsp: a) $(\mathbb{C}^n, \langle \, , \rangle_E)$: $\langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle = \sum \lambda_i \overline{\lambda_i} = \sum |\lambda_i|^2$

b) $V = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, $\langle f,g \rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

23.4 | Unitäre Basen

Wie im Euklidischen definiert man:

Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$

$v,w \in V$ orthogonal $(v \perp w) :\Longleftrightarrow \langle v,w \rangle = 0$

$v_1, \dots, v_n$ unitäre Basis (auch: ONB) $:\Longleftrightarrow \forall i,j: \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Das Gram-Schmidt-Verfahren funktioniert wie vorher. Also hat auch jeder unitäre VR eine unitäre Basis, und jedes positiv definite, hermitesche $G \in M(n,\mathbb{C})$ lässt sich schreiben als $T^t \cdot \overline{T}$ mit $T \in M(n,\mathbb{C})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen in $\mathbb{R}_{>0}$.

23.5 | Die Cauchy-Schwarz- und Dreiecksungleichungen.

Man sieht auch ganz analog zum Euklidischen:

a) $\forall u,v \in V \quad |\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz)

mit Gleichheit gdw. u,v linear abhängig.

b) $\forall u,v \in V \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

23.6 | Unitäre Transformationen

Def: Für einen unitären VR $(V, \langle\,,\rangle)$ heißen

$$\mathcal{U}(V,\langle,\rangle) := \{\Phi\in Gl(V) \mid \forall v,w\in V: \langle\Phi(v),\Phi(w)\rangle = \langle v,w\rangle\}$$

$$SU(V,\langle,\rangle) := \{\Phi\in \mathcal{U}(V,\langle,\rangle) \mid \det(\Phi)=1\}$$

unitäre bzw. spezielle unitäre Gruppe.

Speziell: $\mathcal{U}(n) := \mathcal{U}(\mathbb{C}^n, \langle,\rangle_E)$,
$SU(n) := \mathcal{U}(n) \cap Sl(n,\mathbb{C})$.

Bem: QCD basiert auf $\mathcal{U}(1)\times SU(2)\times SU(3)$!
[Ladung: elektrisch - Isospin - Farbe]

Notation: Für $A\in M(n,\mathbb{C})$ $\quad A^* := \overline{A}^t = (\overline{A})^t$.

Satz: $A\in M(n,\mathbb{C})$ unitär

$\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$

$\Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine unitäre Basis

$\Leftrightarrow$ " Zeilen " " " " .

Bem: Vgl. 21.2!

Bew: $\forall v,w\in\mathbb{C}^n$: $v^t\cdot\overline{w} = \langle v,w\rangle \overset{!}{=} \langle Av,Aw\rangle = v^tA^t\cdot\overline{A}\overline{w}$

$\Leftrightarrow A^t\overline{A} = E$

$\overset{E=\overline{E}}{\Leftrightarrow} A^*A = E$ $\quad$ ($\Leftrightarrow$ Spalten bilden unitäre Basis)

$\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$

$\Leftrightarrow AA^* = E$ $\quad$ ($\Leftrightarrow$ Zeilen " " ")

$\square$

23.7 $\mathcal{U}(n)$ und $SU(n)$ für kleine n

$$\mathcal{U}(1) = \{a\in\mathbb{C} \mid |a|=1\} \triangleq S^1$$

$SU(1) = \{1\}$.

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Diese Abb. identifiziert $SU(2)$ mit $S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. ↗Übung

$SU(2)$ heißt auch $\mathrm{Spin}(3)$, ($\exists$ Epim. $SU(2) \to SO(3)$ mit Kern $\mathbb{Z}/2$)

oder Gruppe der <u>Einheitsquaternionen</u> (↗23.8).

Ferner gilt: $SU(2) = Sp(1)$ (↗ Bröcker S.285f)

23.8] Exkurs: Quaternionen

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\}$$ Quaternionen. (Richard Hamilton 1843)

$\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-VR

$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ als $\mathbb{R}$-VR. Standardbasis:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{H}$ ist auch eine $\mathbb{R}$-Algebra vermöge Matrizenmultiplikation:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E$$
$$IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J$$
$$JI = -K, \quad KJ = -I, \quad IK = -J.$$

$\mathbb{H}$ erfüllt alle Körperaxiome bis auf Kommutativität der Multiplikation:

$\mathbb{H}$ ist ein <u>Schiefkörper</u>. Nutzen: z.B. Beschreibung von Drehungen.

23.9 | Selbstadjungierte Endomorphismen in unitären VRen (vgl. 22.1)

Def: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein unitärer VR. $\Gamma \in End(V)$ heißt hermitesch oder selbstadjungiert, falls

$$\gamma: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (v,w) \longmapsto \langle v, \Gamma w \rangle$$

hermitesch ist, d.h. falls

$$\forall v,w \in V : \langle v, \Gamma w \rangle = \langle \Gamma v, w \rangle .$$

Bem: $\Gamma \in M(n, \mathbb{C})$ ist selbstadjungiert gdw. $\Gamma^* = \Gamma$.

23.10 | Der Spektralsatz im Komplexen (vgl. 22.2)

Satz: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein unitärer VR und $\Gamma \in End(V)$ selbstadjungiert. Dann existiert eine unitäre Basis von V aus Eigenvektoren von Γ, und alle EW'e sind reell.

Korollar: $\forall G \in M(n, \mathbb{C}) : G^* = G \ \exists T \in U(n) : T^* G T$ ist diagonal mit reellen Einträgen.

Bew: Analog zum Euklidischen:

Schritt 1: Die EW'e von Γ sind reell.

Bew: Sei $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\Gamma v = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \langle v,v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle - \langle v, \lambda v \rangle = \langle \Gamma v, v \rangle - \langle v, \Gamma v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} .$$

4.53

Schritt 2: Ist $\mathcal{U} \subset V$ mit $\Gamma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U} \implies \Gamma(\mathcal{U}^\perp) \subset \mathcal{U}^\perp$

Bew: Wie in Lemma 22.7.

Mit Induktion nach $\dim V$ bleibt:

Schritt 3: Γ hat einen EW.

Bew: Einfacher als im Euklidischen:

$X_\Gamma \in \mathbb{C}[T]$ hat stets eine Wurzel, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. $\square$