III. Die Determinante

§ 13 Definition der Determinante

13.1 Motivation I: Algebra

Wir suchen eine algebraische Abbildung

$$\det : M(n,K) \longrightarrow K$$

mit den Eigenschaften

(i) $\det(A) \neq 0 \iff A$ ist invertierbar

(ii) $\det(E) = 1$

"Algebraisch" heißt, dass det ein Polynom in den Einträgen a_{ij} von A und mit Koeffizienten in K sein soll, d.h. von der Form $\lambda_1 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_r j_r} + \lambda_2 a_{k_1 l_1} a_{k_2 l_2} \cdots a_{k_s l_s} + \ldots$ (endl. Ausdruck) mit $\lambda_i \in K$.

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$ leistet das Gewünschte:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nicht invertierbar $\Longrightarrow \exists \lambda, \mu \in K \; \exists \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in K^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\Rightarrow ad - bc = (\lambda u)(\mu v) - (\lambda v)(\mu u) = 0.$

Umkehrung gilt ebenso.

$\underline{n=3}$: $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} := a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$ leistet das Gewünschte.

Schema: $\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$ $\begin{array}{c} + \\ - \end{array}$

Bew: ?, $n>3$: ??

13.2 | Motivation II: Geometrie

Seien $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$.

Def: Sind $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$S(v_1,\dots,v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}$$

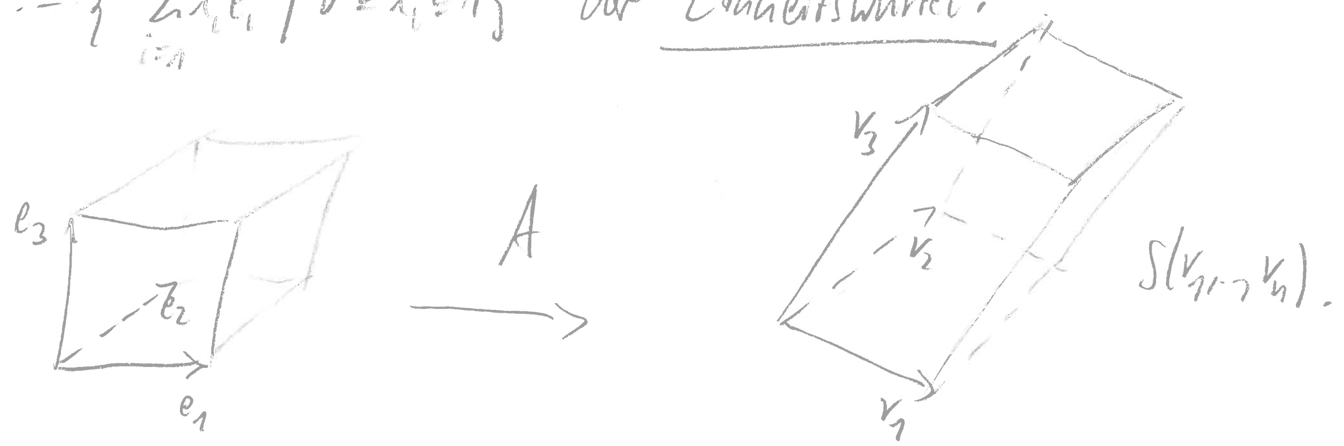
der von $v_1,\dots,v_n$ aufgespannte Spat. (ausgeartet, falls $v_1,\dots,v_n$ linear abhängig)

Bem: Ist A die Matrix mit Spalten $v_1,\dots,v_n$, so gilt

$$S(v_1,\dots,v_n) = A(W),$$

$W := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}$ der Einheitswürfel.

$n=3$:



$|\det(A)|$ berechne das <u>Volumen</u> von $S(v_1,\ldots,v_n)$!

Als mathematische Definition taugt dies solange nicht, wie der Volumenbegriff nicht streng definiert ist. Dieser ist in der Tat nicht ganz unproblematisch (↗ Maßtheorie, Banach-Tarski-Paradoxon).

Zur eindeutigen Definition der Determinante reichen aber die folgenden, für ("orientierte") <u>Volumina</u> intuitiv richtigen Eigenschaften:

$$\det : M(n,\mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1,\ldots,v_n) \longmapsto \text{"}\underset{\text{"Orientierung"}}{\pm}\mathrm{vol}(S(v_1,\ldots,v_n))\text{"}$$

(iii) <u>Normierung:</u> $\det(E) = \det(e_1,\ldots,e_n) = 1$.

(i) <u>Homogenität:</u> $\forall v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^n \ \forall i \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

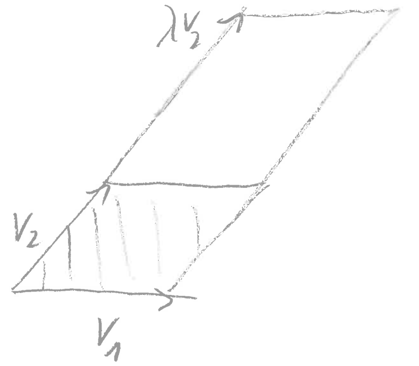
$$\det(v_1,\ldots,v_{i-1},\lambda v_i,v_{i+1},\ldots,v_n) = \lambda \cdot \det(v_1,\ldots,v_n).$$

(ii) <u>Scherungsinvarianz:</u> $\forall v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}^n \ \forall i \neq j$

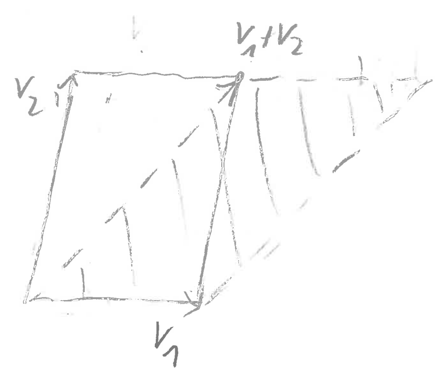
$$\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i+v_j,v_{i+1},\ldots,v_n) = \det(v_1,\ldots,v_n).$$

<u>Bilder (n=2):</u>

(i)



(ii)



Orientierung:

(↗ "Cavalierisches Prinzip")

13.3 | Zum weiteren Vorgehen

Homogenität und Scherungsinvarianz implizieren, dass det linear in jeder Komponente ("multilinear") ist und dass det verschwindet, sobald zwei Einträge gleich sind ("alternierend"). Wir beweisen dies allgemeiner für Abbildungen $V^n \to K$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Hauptresultat wird sein, dass solche "alternierenden n-Multilinearformen" einen eindimensionalen Vektorraum bilden (Satz 13.7). Für $V = K^n$ definiert die Normierungsbedingung $\det(E) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1$ die Determinante dann eindeutig.

13.4 | Multilinearität und Alterniertheit

Lemma: Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und

$$\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Homogenität: $\forall \lambda \in K\ \forall v_1, \dots, v_n \in V\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda\, \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

(ii) Scherungsinvarianz: $\forall v_1, \dots, v_n \in V\ \forall i \neq j$

$$\alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Dann gilt:

1) $\forall v_1, \ldots, v_n \in V \ \forall i \neq j \ \forall \lambda \in K$

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

(Verallgemeinerte Scherungsinvarianz [vgl. Spaltenumf. vom Typ II])

2) $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear abhängig $\Rightarrow \alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

3) α ist <u>multilinear</u>, d.h. für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in V$ fest gewählt ist

$$V \longrightarrow K, \quad v \longmapsto \alpha(\underbrace{v_1, \ldots, v_{i-1}}_{\text{fest}}, \overset{\text{variabel}}{v}, \underbrace{v_{i+1}, \ldots, v_n}_{\text{fest}})$$

K-linear.

<u>Bew:</u> 1) o.E. $\lambda \neq 0$.

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) \overset{(i)}{=} \lambda^{-1} \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, \lambda v_j, \ldots, v_n)$$

$$\overset{(ii)}{=} \lambda^{-1} \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, \lambda v_j, \ldots, v_n)$$

$$\overset{(i)}{=} \alpha(v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n).$$

2) $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig $\Rightarrow \exists i$ und $\lambda_j \in K, j \neq i$: $v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j = 0$

(n-1)-maliges Anwenden von (1) liefert

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \overset{(1)}{=} \alpha(v_1, \ldots, v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j, \ldots, v_n)$$

$$= \alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, \underset{\substack{\parallel \\ 0 \cdot v_i}}{0}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \overset{(i)}{=} 0$$

3) Wegen (i) müssen wir nur zeigen:

$\forall v, v' \in V \quad \alpha(v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v+v'}, \ldots, v_n) = \alpha(v_1, \ldots, v, \ldots, v_n) + \alpha(v_1, \ldots, v', \ldots, v_n)$. (*)

Fall 1: $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ sind linear abhängig.

(*) gilt dann nach (2): $0 = 0+0$.

Fall 2: $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

$\dim V = n \Rightarrow \exists v_i \in V: v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis.

$\Rightarrow \exists u, u' \in L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \; \exists \lambda, \lambda' \in K: \quad v = u + \lambda \cdot v_i$
$\qquad v' = u' + \lambda' \cdot v_i$.

Wie im Bew. von (2) lassen sich Summanden aus $L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ an der i-ten Stelle durch sukzessives Anwenden von (1) beseitigen:

$$\alpha(v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{v+v'}, \ldots, v_n) = \alpha(v_1, \ldots, (u+u') + (\lambda+\lambda') \cdot v_i, \ldots, v_n)$$
$$\overset{(1)}{=} \alpha(v_1, \ldots, (\lambda+\lambda') v_i, \ldots, v_n)$$
$$= (\lambda+\lambda') \, \alpha(v_1, \ldots, v_n). \qquad [1]$$

Analog sieht man:

$$\alpha(v_1, \ldots, v, \ldots, v_n) = \lambda \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_n) \qquad [2]$$

$$\alpha(v_1, \ldots, v', \ldots, v_n) = \lambda' \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_n). \qquad [3]$$

[1]-[3] zeigen (*). $\square$

Bem: a) (2) impliziert, dass $\alpha(v_1,\dots,v_n)=0$, falls zwei der $v_1,\dots,v_n$ übereinstimmen. Eine multilineare Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt <u>alternierend</u>. Solche Abbildungen wechseln das Vorzeichen beim Vertauschen von v_i mit v_j, $i\neq j$:

$$0=\alpha(v_1,\dots,v_i+v_j,\dots,v_i+v_j,\dots,v_n)$$
$$=\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)+\alpha(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n).$$

b) (2) impliziert auch, dass $L(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$ im Kern der Linearform in (3) liegt. c) $V=\mathbb{R}^n$, $A=(v_1,\dots,v_n)$, so bedeutet (1) Invarianz von α unter Spaltenumf. von Typ II.

3.7

13.5 Alternierende k-Multilinearformen

Nach Lemma 13.4 gehört die Determinante zum Spezialfall $V=K^n$, und $n=k$ der folgenden Klasse von Abbildungen:

Def: Sei V ein K-Vektorraum. Eine <u>k-Multilinearform</u> auf V ist eine Abbildung

$$\alpha:\underbrace{V\times\dots\times V}_{k}\longrightarrow K,$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Vektorraum } \mathrm{Mult}^k(V)}$

die linear in jedem Eintrag ist:

$\forall i\in\{1,\dots,k\}\ \forall v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k\in V$:
$$V\longrightarrow K,\quad v\longmapsto \alpha(v_1,\dots,v_{i-1},v,v_{i+1},\dots,v_n)$$
ist linear.

Sie heißt <u>alternierend</u>, falls

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Vektorraum } \mathrm{Alt}^k(V)}$

$$\forall v_1,\dots,v_k\in V\ \forall i\neq j\quad v_i=v_j\Rightarrow \alpha(v_1,\dots,v_k)=0.$$

13.6 Bsp: a) 1-Multilinearformen = Linearformen.

b) 2-Multilinearformen =: <u>Bilinearformen</u> (Kap. 4, §18–23)

$V = K^n$, so lassen sich diese wie folgt schreiben:

$$K^n \times K^n \to K, \quad (v,w) \mapsto v^t \cdot A \cdot w$$

mit $A \in M(n,K)$.

<u>Etwa</u>: $\det: M(2,K) = K^2 \times K^2 \to K, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc = (a\ c) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

Aus der letzten Gleichheit sieht man leicht die Multilinearität von det für $n=2$:

$$\det(\lambda v + \lambda' v', w) = (\lambda v + \lambda' v')^t \cdot A \cdot w$$
$$= (\lambda \cdot v^t + \lambda' (v')^t) \cdot A \cdot w$$
$$= \lambda \cdot (v^t \cdot A \cdot w) + \lambda' \cdot ((v')^t \cdot A \cdot w).$$

Analog im zweiten Eintrag.

<u>Vorsicht</u>: Wir haben <u>keine</u> Linearität als Abbildung des K-Vektorraums $M(2,K)$ nach K:

z.B. $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 + 0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13.7 <u>Multilinearformen auf K^n</u>

Analog zur Darstellung von Linearformen $\alpha \in (K^n)^*$ durch $(\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n)) \in K$ lassen sich k-Multilinearformen durch eine Anzahl von Skalaren beschreiben, nämlich die Auswertungen auf den Tupeln $(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$. (liefert "$k$-dimensionale Matrizen")

<u>Satz</u>: Die Abbildung

$$\Phi: \mathrm{Mult}^k(K^n) \longrightarrow \mathrm{Map}(\{1,\dots,n\}^k, K)$$
$$\alpha \longmapsto \left((\mu_1, \dots, \mu_k) \longmapsto \alpha(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) \right)$$

ist ein <u>Isomorphismus von K-Vektorräumen.</u>

Übung

<u>Bew</u>: <u>Φ ist linear</u>: klar.

<u>Φ ist injektiv</u>: Sei $\alpha \in \mathrm{Mult}^k(K^n)$ und $\forall (\mu_1, \dots, \mu_k): \alpha(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k}) = 0$.

Dann gilt: $\alpha = 0$, d.h. $\forall v_1, \dots, v_k \in V \quad \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Sei nämlich $v_i = \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu i} e_\mu$, so gilt

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \alpha\left(\sum_{\mu_1=1}^n \lambda_{\mu 1} e_{\mu 1}, \dots, \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu k} e_\mu\right)$$

$$\overset{\text{Linearität im ersten Eintrag}}{=} \sum_{\mu_1=1}^n \lambda_{\mu_1 1}\, \alpha\left(e_{\mu_1}, \sum_{\mu_2=1}^n \lambda_{\mu_2 2} e_{\mu_2}, \dots, \sum_{\mu_k=1}^n \lambda_{\mu_k k} e_{\mu_k}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{\mu_1=1}^n \sum_{\mu_2=1}^n \cdots \sum_{\mu_k=1}^n \lambda_{\mu_1 1} \lambda_{\mu_2 2} \cdots \lambda_{\mu_k k}\, \alpha(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_k}) = 0.$$

<u>Φ ist surjektiv</u>: Sei $a: \{1, \dots, n\}^k \to K$, $(\mu_1, \dots, \mu_k) \longmapsto a_{\mu_1 \dots \mu_k}$

Definiere

$$\boxed{\alpha\Big(\sum_{\mu_1}\lambda_{\mu_1 1}e_{\mu_1},\dots,\sum_{\mu_k}\lambda_{\mu_k k}e_{\mu_k}\Big) := \sum_{\mu_1}\dots\sum_{\mu_k}\lambda_{\mu_1 1}\cdots\lambda_{\mu_k k}\cdot a_{\mu_1\dots\mu_k}}$$

<u>α ist linear</u> im i-ten Eintrag, $i=1,\dots,k$:

$$\alpha\Big(\sum_{\mu_1}\lambda_{\mu_1 1}e_{\mu_1},\dots,\sum_{\mu_k}\lambda_{\mu_k k}e_{\mu_k}\Big) = \sum_{\mu_i}\underbrace{\Big(\sum_{\mu_1,\dots,\hat{\mu}_i,\dots,\mu_k}\lambda_{\mu_1 1}\cdots\hat{\lambda}_{\mu_i i}\cdots\lambda_{\mu_k k}\,a_{\mu_1\dots\mu_k}\Big)}_{\in K\ (\lambda_{\mu_j j}\text{ fest für } j\neq i)}\lambda_{\mu_i i}$$

Hierbei bedeutet "$\wedge$", dass die betreffende Größe fortzulassen ist.

<u>Es gilt $\Phi(\alpha)=a$:</u>

$$\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_k}) = a_{\mu_1\dots\mu_k}, \quad \text{denn } \overset{\text{für } v_i=e_i:}{\lambda_{\mu i}} = \delta_{\mu\mu_i} = \begin{cases}1, & \mu=\mu_i\\ 0, & \mu\neq\mu_i\end{cases}.$$

$\square$

<u>Kor:</u> $\dim V = n \Rightarrow \dim \mathrm{Mult}^k(V) = \dim \mathrm{Mult}^k(K^n) = n^k$.

<u>Bsp:</u> $M(2,K) = \mathrm{Mult}^2(K^2)$: (vgl. Bsp. 13.6, b)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix} \longmapsto \left(\left(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{array}{l}\lambda_{11}\cdot ab\\ +\lambda_{12}\cdot ad\\ +\lambda_{21}\cdot cb\\ +\lambda_{22}\cdot cd\end{array}\right).$$

<u>Bem:</u> Eine k-Multilinearform auf K^n ist also ein Polynom in den n Einträgen von k (unbestimmten) Vektoren $\overset{(\lambda_{11},\dots,\lambda_{n1})}{v_1},\dots,\overset{(\lambda_{1k},\dots,\lambda_{nk})}{v_k}$, in dem jeder Summand ein Produkt $\lambda_{\mu_1 1}\cdots\lambda_{\mu_k k}$ mit genau einem Eintrag von jedem v_i ist.

13.8 | Alternierende k-Multilinearformen auf K^n

Wegen Bem 13.4,a ist $\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_k})$ bestimmt durch $\alpha(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$, $i_1<\dots<i_k$, $\{i_1,\dots,i_k\}=\{\mu_1,\dots,\mu_k\}$. Betrachte daher

$$P_k^n := \{ A \subseteq \{1,\dots,n\} \mid |A|=k \} \xrightarrow{\text{inj.}} \{1,\dots,n\}^k$$

$$A=\{\mu_1,\dots,\mu_k\} \longmapsto (\mu_1,\dots,\mu_k)$$

$$\mu_1<\dots<\mu_k$$

Analog zu Satz 13.7 kann man zeigen:

Satz: Die Abbildung

$$\Psi: \mathrm{Alt}^k(K^n) \longrightarrow \mathrm{Map}(P_k^n, K), \quad \alpha \longmapsto \left(\{\mu_1,\dots,\mu_k\} \longmapsto \alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_k}) \right)$$

$$\mu_1<\dots<\mu_k$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere gilt:

$$\dim \mathrm{Alt}^k(K^n) = \binom{n}{k}.$$

(o.Bew.) Wir brauchen nur den Fall $k=n$:

13.9 | Alternierende n-Multilinearformen auf K^n

Satz: Die lineare Abbildung

$$\Psi: \mathrm{Alt}^n(K^n) \longrightarrow K, \quad \alpha \longmapsto \alpha(e_1,\dots,e_n)$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Bew: Wir werden sehen (→ Satz 14.6):

Es gibt einen Homomorphismus (von Gruppen) (3.12)

$$\mathrm{sgn} : S_n = \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \longrightarrow (\{-1,1\},\cdot) \quad (\underline{\text{Signum}})$$

mit der Eigenschaft

$$\alpha \in \mathrm{Alt}^n(K^n),\ v_1,\dots,v_n \in V,\ \sigma \in S_n \overset{\left[\substack{\text{Satz 14.5}\\ \text{\& Bem. 13.4, a}}\right]}{\Longrightarrow} \boxed{\alpha(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\alpha(v_1,\dots,v_n)}.$$

Dies zeigt:

$$\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_n}) = \begin{cases} 0 & , (i\mapsto\mu_i)\notin S_n \\ \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\alpha(e_1,\dots,e_n) & , \text{sonst: } \sigma := (i\mapsto\mu_i)\in S_n. \end{cases}$$

Demnach ist $\underline{\Psi \text{ injektiv}}$ nach Satz 13.7. //

$\underline{\Psi \text{ ist surjektiv}}$: Sei $a \in K$.

Definiere

$$a_{\mu_1\dots\mu_n} := \begin{cases} 0 & , (i\mapsto\mu_i)\notin S_n \quad (\text{d.h. falls } \{\mu_1,\dots,\mu_n\}\neq\{1,\dots,n\}) \\ \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a & , \sigma := (i\mapsto\mu_i)\in S_n. \end{cases}$$

Sei α die nach Satz 13.7 zugehörige Multilinearform $(\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_n}) = a_{\mu_1\dots\mu_n})$.

Es bleibt zu zeigen: α ist alternierend.

Seien $v_1 = \sum_\mu \lambda_{\mu 1} e_\mu, \dots, v_n = \sum_\mu \lambda_{\mu n} e_\mu \in V$ und $v_i = v_j$ für $i<j$.

Betrachte $\tau \in S_n$ mit $\tau(i)=j$, $\tau(j)=i$ und $\tau(\mu)=\mu$ für $\mu\neq i,j$.

Es gilt: $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ (Satz 14.5)

Wir erhalten:

$$\alpha(v_1,\dots,v_n) = \alpha\Big(\sum_{\mu_1} \lambda_{\mu_1 1} e_{\mu_1}, \dots, \sum_{\mu_n} \lambda_{\mu_n n} e_{\mu_n}\Big)$$

$$= \sum_{\mu_1,\dots,\mu_n} \lambda_{\mu_1 1} \cdots \lambda_{\mu_n n} \underbrace{\alpha(e_{\mu_1},\dots,e_{\mu_n})}_{\neq 0 \iff \{\mu_1,\dots,\mu_n\} = \{1,\dots,n\} \iff \exists \sigma \in S_n :\ \mu_i = \sigma(i),\ i=1,\dots,n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n}\, \alpha(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n}\, \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a$$

$$\overset{[S_n = A_n \cup A_n \tau]}{=} a \cdot \sum_{\sigma \in A_n} \Big(\lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n}\, \mathrm{sgn}(\sigma) + \dots + \lambda_{(\sigma\circ\tau)(1),1} \cdots \lambda_{(\sigma\circ\tau)(n),n}\, \underbrace{\mathrm{sgn}(\sigma\circ\tau)}_{-\mathrm{sgn}(\sigma)}\Big)$$

$$\overset{\left[\begin{smallmatrix} j=\tau(i) \\ i=\tau(j)\end{smallmatrix}\right]}{=} a \cdot \sum_{\sigma \in A_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \Big(\lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n} - \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \underbrace{\lambda_{\sigma(j)i}}_{\lambda_{\sigma(i)i}} \cdots \underbrace{\lambda_{\sigma(i)j}}_{\lambda_{\sigma(j)j}} \cdots \lambda_{\sigma(n)n}\Big)$$

$(v_i = v_j)$

$$= 0.$$

Mit $A_n := \ker(\operatorname{sgn})$ gilt $S_n = A_n \sqcup (A_n \circ \tau)$, denn 13.13

$\sigma \in S_n$, $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1 \iff \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$

$\iff \sigma \circ \tau \in A_n \iff \sigma = \sigma \circ \tau^2 \in A_n \circ \tau$.

Wir erhalten

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in A_n} \lambda_{1,\sigma(1)} \cdots \lambda_{n,\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a + \sum_{\sigma \in A_n} \lambda_{1,\sigma\circ\tau(1)} \cdots \lambda_{n,\sigma\circ\tau(n)} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot a$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} \lambda_{1,\sigma(1)} \cdots \lambda_{n,\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a - \sum_{\sigma \in A_n} \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\lambda_{i\sigma(j)}} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{\lambda_{j\sigma(i)}} \cdots \lambda_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a = 0,$$

denn $\lambda_{i\sigma(j)} = \lambda_{j\sigma(j)}$ und $\lambda_{j\sigma(i)} = \lambda_{i\sigma(i)}$ (wegen $v_i = v_j$). □

13.10 Definition der Determinante

Def.: Die (n-dimensionale) Determinante ist die nach dem Satz eindeutige alternierende n-Multilinearform

$$\det : K^n \times \dots \times K^n \to K$$

mit $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Notation: $A = (v_1 \dots v_n) \in M(n, K)$, dann

$$\det(A) := \det(v_1, \dots, v_n) \quad (\text{auch: } |A|).$$

Merke: (n-dim.) Determinante = die normierte, alternierende n-Multilinearform auf K^n

Bem.: det erfüllt (i)-(iii) in 13.2.

13.11 | 3.14

Formel (Leibniz-Formel)

(↗ Bew. v. Satz 13.9 "surjektiv")

Ist $A = (a_{ij}) \in M(n,K)$, so gilt

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}} \quad \left[= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right]$$

(n=3: vgl. 3.2 !)

<u>Bem:</u> Diese Formel hat $n!$ Terme und ist daher für $n>3$ zur Berechnung schlecht geeignet. Es ist aber oft wichtig, dass $\det(A)$ differenzierbar oder sogar polynomial von den a_{ij} abhängt.

↗ Blatt 14, Aufg. 4

Lineare Algebra II

Wiederholung: Determinanten.

1. Alternierende k-Multilinearformen: V K-VR

$$\mathrm{Alt}^k(V) := \{\alpha : V^k \to K \mid \alpha \text{ ist multilinear und alternierend}\}$$

multilinear: $\forall v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k : (v \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)) \in V^*$.

(fortlassen)

alternierend: $\forall v_1 \dots v_k$ $\exists i \neq j$ $v_i = v_j \Rightarrow \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

2. Satz 13.8: $\dim V = n \Rightarrow \dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$. (o. Bew.)

3. Insbesondere, (Satz 13.9): $\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$.

Explizit: $v_1, \dots, v_n$ Basis von V, so ist

$$\Psi : \mathrm{Alt}^n(V) \to K, \quad \alpha \mapsto \alpha(v_1, \dots, v_n)$$

ein Isom. von K-VR'en.

Bem: Elemente von $\mathrm{Alt}^n(V)$ heißen auch Determinantenformen.

4. Die n-dimensionale Determinante: $\det \in \mathrm{Alt}^n(K^n)$ mit $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Merke: $\boxed{\text{Determinante = normierte, alternierende } n\text{-Multilinearform auf } K^n.}$

§14. Exkurs über Permutationen

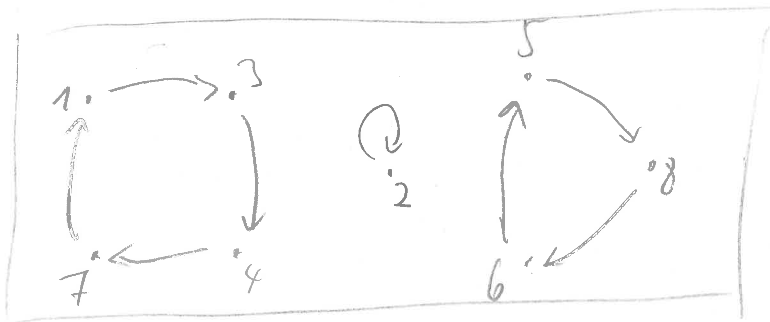
<u>Erinnerung</u>: $S_n := \mathrm{Bij}(\{1,..,n\})$.

Notation für $\sigma \in S_n$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

14.1 Zyklen

Verfolge $a \in \{1,..,n\}$ unter mehrfachem Anwenden von σ:

$$a \longmapsto \sigma(a) \longmapsto \sigma^2(a) \longmapsto \dots$$

<u>Bsp</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 8 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$ 

$(n=8)$

<u>Def</u>: Für $a \in \{1,..,n\}$ heißt $\langle\sigma\rangle \cdot a := \{\sigma^k(a) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \{1,..,n\}$

ein <u>Zyklus von σ</u>, $|\langle\sigma\rangle \cdot a|$ seine <u>Länge</u>.

<u>Bem</u>: Wegen $\sigma^i(\sigma^k(a)) = (\sigma^i \circ \sigma^k)(a) = \sigma^{k+i}(a)$ für $k, i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle\sigma\rangle \cdot a = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), .., \sigma^{l-1}(a)\}$$

mit $l = \min\{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid \sigma^k(a) = a\} = |\langle\sigma\rangle \cdot a|$.

<u>Im Bsp</u>: $\langle\sigma\rangle \cdot 1 = \langle\sigma\rangle \cdot 7 = \{1,3,4,7\}$

$\langle\sigma\rangle \cdot 2 = \{2\}$.

<u>Def</u>: $\sigma \in S_n$ heißt <u>zyklisch</u>, falls sie nur einen Zyklus hat.

14.2 | Zyklenschreibweise

Auf einem Zyklus $\langle\sigma\rangle\cdot a$ ist σ durch eine Abfolge $\sigma^k(a), \sigma^{k+1}(a), \ldots$ der Elemente bis auf zyklische Vertauschung festgelegt. Dies legt die folgende Notation für $\sigma \in S_n$ nahe:

$$(a\ \sigma(a) \ldots \sigma^{l-1}(a))(b\ \sigma(b) \ldots)(c\ \sigma(c) \ldots)\ldots$$

mit $b \notin \langle\sigma\rangle\cdot a$, $c \notin \langle\sigma\rangle\cdot a \cup \langle\sigma\rangle\cdot b$ etc. Zyklen der Länge 1 können fortgelassen werden.

In Bsp 14.1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 8 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1\,3\,4\,7)(2)(5\,8\,6) = (8\,6\,5)(4\,7\,1\,3)$

Kompositionen: $(n=5)$ $\quad \sigma_1 = (1\,2\,3)(4\,5)$, $\sigma_2 = (1\,2)(3\,4)$

$$(1\,2\,3)(4\,5)\circ(1\,2)(3\,4) = \sigma_1 \circ \sigma_2 :$$

$1 \xmapsto{\sigma_2} 2 \xmapsto{\sigma_1} 3$

$2 \longmapsto 1 \longmapsto 2$

$3 \longmapsto 4 \longmapsto 5$

$4 \longmapsto 3 \longmapsto 1$

$5 \longmapsto 5 \longmapsto 4$

$$= (1\,3\,5\,4)$$

[verschieden von Konvention in DAS]

14.3 | Transpositionen

Def: $\sigma \in S_n$ heißt Transposition, falls es $i \neq j$ gibt mit $\sigma = (i\,j)$.

Satz: Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben.

Bew: Wegen

$$(a_1\,a_2 \ldots a_l) = (a_1\,a_l)\circ(a_1\,a_{l-1})\circ \ldots \circ(a_1\,a_i)\circ(a_1\,a_{i-1})\circ \ldots \circ(a_1\,a_2)$$

folgt die Behauptung mit der Zyklenschreibweise. $\square$

14.4 Das Signum

Def: Für $\sigma \in S_n$ heißt

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^{n - |\{\text{Zyklen von } \sigma\}|}} \in \{\pm 1\}$$

das Signum von σ. [Lat.: Signum = (Vor-) Zeichen]

Bsp: $\operatorname{sgn}\big((13)(2567)(4)\big) = (-1)^{7-3} = 1.$

Bem: Haben die Zyklen von σ die Längen $l_1, \dots, l_r$ ($\Rightarrow \sum_i l_i = n$), so gilt

$$n - |\text{Zyklen von } \sigma| = n - r = \sum_{i=1}^{r} (l_i - 1).$$

Dies ist die Anzahl von Transpositionen in der Zerlegung von σ im Bew. von Satz 14.3.
Erklärung ↗ Satz 14.5!

14.5 Transpositionen und Signum

Lemma: Ist $\tau \in S_n$ eine Transposition, so gilt für $\sigma \in S_n$

$$\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma).$$

Bew: Sei $\tau = (ij)$.

Fall 1: $\exists k : j = \sigma^k(i)$, d.h. i und j liegen in einem σ-Zyklus.

$$\sigma = (i\ \sigma(i) \dots \underbrace{\sigma^k(i)}_{=j} \dots \sigma^{l-1}(i))(\dots)\dots$$

$$\sigma\circ\tau : \quad i \xmapsto{\tau} j = \sigma^k(i) \xmapsto{\sigma} \sigma^{k+1}(i)$$

$$\sigma^k(i) = j \xmapsto{\tau} i \xmapsto{\sigma} \sigma(i)$$

Demnach: $\sigma\circ\tau = \underbrace{(i\ \sigma^{k+1}(i) \dots \sigma^{l-1}(i))}_{[\,= (i), \text{ falls } k = l-1\,]}(j\ \sigma(i)\ \sigma^2(i) \dots \sigma^{k-1}(i))(\dots)\dots$

Zeigt: $|\text{Zyklen von } \sigma\tau| = |\text{Zyklen von } \sigma| + 1$

Fall 2: Sonst, d.h. i und j liegen in verschieden σ-Zyklen.

$$\sigma = (i\ \sigma(i) \ldots \sigma^{l-1}(i))\ (j\ \sigma(j) \ldots \sigma^{m-1}(j))\ (\ldots) \ldots$$

$$\sigma\tau: \quad i \xmapsto{\tau} j \xmapsto{\sigma} \sigma(j)$$

$$j \xmapsto{\tau} i \longmapsto \sigma(i)$$

Demnach: $\sigma\tau = (i\ \sigma(j)\ \sigma^2(j) \ldots \sigma^{m-1}(j)\ j\ \sigma(i)\ \sigma^2(i) \ldots \sigma^{l-1}(i))\ (\ldots) \ldots$

Zeigt: $|\text{Zyklen von } \sigma\tau| = |\text{Zyklen von } \sigma| - 1$.

In jedem Fall gilt: $\underline{\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{n - |\text{Zyklen von } \sigma\tau|}} = -\operatorname{sgn}(\sigma)$. $\square$

Satz: Sind $\tau_1, \ldots, \tau_s \in S_n$ Transpositionen, so gilt

$$\operatorname{sgn}(\tau_1 \cdots \tau_s) = (-1)^s.$$

Bew: Induktion nach s mit dem Lemma. $\square$

18.6 | Das Signum als Homomorphismus von Gruppen

Satz: $\operatorname{sgn}: S_n \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ ist ein Homomorphismus, d.h.

$$\forall \sigma, \sigma' \in S_n: \operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma').$$

3.19

Bew: Nach Satz 14.3 existieren Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_r, \tau_1', \dots, \tau_s' \in S_n$ mit $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_r$, $\sigma' = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_s'$. Mit Satz 14.5 folgt

$$\mathrm{sgn}(\sigma\sigma') = \mathrm{sgn}(\tau_1 \cdots \tau_r \tau_1' \cdots \tau_s') = (-1)^{r+s} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma').$$ □

14.7 Permutationsmatrizen (fortlassen!)

Def: Für $\sigma \in S_n$ heißt

$$P_\sigma := (e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}) = (\delta_{i\sigma(j)})_{ij} \in M(n,K)$$

die Permutationsmatrix zu σ.

Bem: P_σ hat in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1.

Bsp: a) $P_{(12)(34)} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

b) $P_{(1234)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

Satz: 1) $\det(P_\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

2) $\Phi: S_n \to GL(n,K)$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ ist ein Homomorphismus von Gruppen, d.h. $\forall \sigma, \tau \in S_n: P_\sigma \cdot P_\tau = P_{\sigma\tau}$.

Bew: 2) $e_i \xmapsto{P_\tau} e_{\tau(i)} \xmapsto{P_\sigma} e_{\sigma(\tau(i))} = e_{(\sigma\tau)(i)} = P_{\sigma\tau}(e_i)$.

1) Schreibe $P_\sigma = (p_{ij})$, d.h. $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$.

Nach 13.10 gilt:

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) \cdot p_{1\tau(1)} \cdots p_{n\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, \delta_{1\sigma(\tau(1))} \cdots \delta_{n\sigma(\tau(n))} \overset{(*)}{=} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)^{-1} = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

(*) folgt, da $\delta_{i\sigma(\tau(i))} \neq 0 \Leftrightarrow \tau(i) = \sigma^{-1}(i)$, d.h. $\tau = \sigma^{-1}$ liefert den einzigen nichttrivialen Beitrag. □

§15. Weiteres Studium der Determinante

15.1 | Berechnung mit dem Gaußverfahren (vgl. Übung 14.3, LA I).

Sei $A \in M(n, K)$. [oder auf A: $\det(A) = \det(A^t)$ ↗15.3]

Berechne $\det(A)$ durch Anwendung des Gaußverfahrens auf A^t

Benutze dabei: Geht $(A'')^t$ aus $(A')^t$ durch elementare Zeilentf. vom Typ

I) $(i) \to \lambda \cdot (i)$

II) $(i) \longmapsto (i) + \lambda \cdot (j)$

III) $(i) \leftrightarrow (j)$

hervor, so gilt

I) $\det(A'') = \lambda \cdot \det(A')$ (Homogenität von det im i-ten Eintrag)

II) $\det(A'') = \det(A')$ (verallgemeinerte Scherungsinvarianz; ↗ Bem. 13.10)

III) $\det(A'') = -\det(A')$ (det ist alternierend).

Bem.: a) In solchen Rechnungen schreiben wir kurz $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ für $\det((a_{ij}))$.

b) Aus (II) folgt $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Bsp.:
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1) \to \frac{1}{2}\cdot(1)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2) \to (2) - 2(1) \\ (3) \to (3) - (1)}}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$\overset{(3)\to(3)+3\cdot(2)}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} \overset{\text{Beisp. b}}{=} 2\cdot 1\cdot 1\cdot(-17) = \underline{\underline{-34}}$

15.2 | Multiplikativität von det.

Satz: Für $A, B \in M(n,K)$ gilt: $\boxed{\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)}$

Insbesondere ist

$$\det: Gl(n,K) \to K^\times = (K\setminus\{0\}, \cdot)$$

ein Homomorphismus von Gruppen.

Bew: Für $\overset{\text{festes}}{A} \in M(n,K)$ betrachte die Abbildung

$$\alpha: (K^n)^n = M(n,K) \to K, \quad B \longmapsto \det(A\cdot B).$$

Diese Abb. ist

homogen: Multiplikation der i-ten Spalte von B mit $\lambda \in K$ führt zur
" " " von $A\cdot B$ mit λ.

scherungsinvariant: Addition der j-ten Spalte von B zur i-ten Spalte führt zur
" " " " von $A\cdot B$. "

$\overset{\text{Lemma 13.4.}}{\Longrightarrow} \alpha \in Alt^n(K^n)$

$\overset{\text{Satz 13.9}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in K: \alpha = \lambda\cdot\det, \ \lambda = \alpha(e_1,\dots,e_n) = \det(A\cdot E) = \det(A).$

$\Longrightarrow \det(A\cdot B) = \alpha(B) = \lambda\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B).$ ☐

15.3 $\det(A) = \det(A^t)$.

Satz: Für $A \in M(n,K)$ gilt: $\det(A) = \det(A^t)$.

Bew: $rk(A) < n \Rightarrow rk(A^t) < n$ und $\det(A) = 0 = \det(A^t)$ ist korrekt.

Sei jetzt $rk(A) = n$. Dann führt das Gaußverfahren für A^{-1} auf die Einheitsmatrix.

Nach 10.7 existieren also Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_r \in GL(n,K)$ mit

$$T_1 \cdot \ldots \cdot T_r \cdot A^{-1} = E \quad, \text{ d.h. } A = T_1 \cdot \ldots \cdot T_r \text{ und } A^t = T_r^t \cdot \ldots \cdot T_1^t.$$

Für eine Elementarmatrix T gilt nun stets $\det(T) = \det(T^t)$ (überprüfe dies!).

Demnach:

$$\det(A) = \det(T_1 \cdot \ldots \cdot T_r) \overset{\text{Satz 15.2}}{=} \det(T_1) \cdot \ldots \cdot \det(T_r)$$
$$= \det(T_r^t) \cdot \ldots \cdot \det(T_1^t) \overset{\text{Satz 15.2}}{=} \det(A^t).$$

□

Bem: Alternativ mit Leibnizformel $\to$ Übungen.

15.4 Der Laplacesche Entwicklungssatz

Hat $A \in M(n,K)$ eine Spalte mit vielen Nullen, so lohnt es sich manchmal, nach dieser Spalte „zu entwickeln". Definiere dazu

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M(n,K),$$

und $A'_{ij} \in M(n-1,K)$ die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A oder A_{ij} entstehende Matrix.

Lemma: Sind $a_1, \dots, a_n \in K^n$ durch die Spalten von A definiert, so gilt

1) $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij})$.

2) $\det(A_{ij}) = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$

Bew: 1) Durch $i-1$ Zeilenvertauschungen und $j-1$ Spaltenvertauschungen lässt sich A_{ij} auf die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A'_{ij} \\ 0 & \end{pmatrix}$ bringen. Daher gilt

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A'_{ij} \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij}).$$

2) A_{ij} entsteht aus $(a_1 \dots a_{j-1}\, e_i\, a_{j+1} \dots a_n) \in M(n,K)$ durch Ausräumen der i-ten Zeile durch Spaltenumf. vom Typ II. □

Satz (Laplacescher Entwicklungssatz, Entwicklung nach j-ter Spalte)

Für $A = (a_{ij}) \in M(n,K)$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})}$$

Bew: $\det(A) = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_i a_{ij} e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$

$$= \sum_i a_{ij} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$$\overset{\text{Lemma, 2}}{=} \sum_i a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \overset{\text{Lemma, 1}}{=} \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}).$$

□

Bem: Analog entwickelt man nach einer Zeile. (i fest, $\sum_j$ ...)

15.5 | Die Adjunkte

Ziel: Eine explizite Formel für A^{-1}, falls $\det(A) \neq 0$.

Def.: Für $A \in M(n,K)$ heißt

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}), \quad \tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A'_{ji}) \; ! = \det(A_{ji})$$

die Adjunkte zu A. (auch: komplementäre/assoziierte/adjungierte Matrix)

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Experiment: $A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A) \cdot E$!

Satz: Sei $\tilde{A}$ die Adjunkte zu $A \in M(n,K)$. Dann gilt

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E.$$

Bew: Sei $B := \tilde{A} \cdot A = (b_{ij})$.

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik} a_{kj} = \sum_k a_{kj} \det(A_{ki})$$

$$= \sum_k a_{kj} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_k, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = \delta_{ij} \cdot \det(A)$$

Dies zeigt: $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E$.

Angewendet auf A^t erhalten wir auch:

$$(\tilde{A})^t \cdot A^t \overset{(!)}{=} \widetilde{A^t} \cdot A^t = \det(A^t)\cdot E = \det(A)\cdot E$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot \tilde{A} = \det(A)\cdot E$$

□

Bem: Die Diagonaleinträge von $A\cdot\tilde{A} = \det(A)\cdot E$ ergeben den Laplaceschen Entwicklungssatz. (Satz 15.4)

Korollar 1: Für $A \in GL(n,K)$ gilt: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot \tilde{A}}$

□

Bsp: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Anwendung: Für $A \in M(n,\mathbb{Z})$ ex. $B \in M(n,\mathbb{Z})$ (ganzzahlig!) mit $AB=E$

$$\iff \det A = \pm 1.$$

Bew: "$\Leftarrow$": $B := \pm\tilde{A}$.

"$\Rightarrow$": $AB = E \Rightarrow \left.\begin{matrix} \det(A)\cdot\det(B) = 1 \\ \det A, \det B \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$

□

15.6 Die Cramersche Regel

Liefert eine explizite Formel zur Lösung regulärer LGS.

Korollar 2: Für $A \in GL(n,K)$ und $b \in K^n$ hat $Ax = b$ die Lsg. (3.26)

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\tilde{A} \cdot b),$$

d.h.

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A'_{ji}) \cdot b_j \overset{\text{Satz 15.4}}{=} \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Bew: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$. □

Bem: Dies ist keine gute Formel zur praktischen Berechnung. Wichtig ist aber wiederum, dass die x_i algebraisch von den a_{jk} und b_ℓ abhängen.

§16. Exkurs: Polynome [Lit: ↗ Bosch, §5]

16.1 Motivation

<u>Bisher:</u> Polynom = Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

Dies ist OK, denn ist $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ und $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = g(x)$, so gilt $m = n$ und $a_i = b_i$, $i = 0, \dots, n$. (Grund: ↗ Kor. 16.5)

<u>Aber:</u> Ist $|K| < \infty$, so bestimmt die Abb. $: K \to K,\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ nicht $a_0, \dots, a_n$. Außerdem ist es einfacher, mit endlich vielen $a_i \in K$ zu arbeiten als mit einer Abb. $K \to K$.

<u>Bsp:</u> $f(x) = x^p - x$ für $K = \mathbb{F}_p$ liefert die Nullfkt!

<u>Schluss:</u> Unterscheide Polynome, gegeben durch ihre Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in K$, und die zugehörige Polynomfkt. $K \to K$.

16.2 Polynome in einer Variablen

<u>Def:</u> Sei R ein kommutativer Ring. Der <u>Polynomring</u> $R[T]$ <u>in einer Variablen T</u> und mit <u>Koeffizienten in R</u> ist die Menge

$$\{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, R) \mid a_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \in \mathbb{N} \}$$

mit den Verknüpfungen

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \cdot (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := \Big(\sum_{j,k:\, j+k=i} a_j \cdot b_k \Big)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Schreibweise: Für $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i = 0$ für $i > n$ schreiben wir

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i T^i \overset{a_i=0 \text{ für } i>n}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i T^i = a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n.$$

[Analog für andere Symbole als T.]

Lemma 1) $R[T]$ ist ein kommutativer Ring mit Eins $1 = (1,0,0,0,\ldots)$.

2) $\iota: R \to R[T]$, $\alpha \mapsto \alpha := \alpha\cdot 1 = (\alpha,0,0,\ldots)$

ist ein Ringhomomorphismus. Dies macht $R[T]$ zu einer R-Algebra

(= Ring S mit Ringhom $R \to S$).

3) Ist S eine weitere R-Algebra, und $s \in S$, so ist

$$R[T] \to S,\ f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \mapsto f(s) := \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

der eindeutige Homomorphismus φ von R-Algebren mit $\varphi(T) = s$.

$$\left(\begin{tikzcd} R[T] \arrow[r] & S \\ R \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$$

Bew: 1), 2): überprüfen!

3) $\varphi(\sum a_i T^i) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ ist Hom von R-Algebren}}}{=} \sum a_i \varphi(T)^i = \sum a_i s^i$. □

Bsp: (zu 3) $R = S = K$, $x \in K$ $\quad f(x) = \sum a_i x^i$ „Wert von f an der Stelle $x \in K$".

16.3) Weitere Begriffe zu Polynomen

Def: Ist $f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in R[T]$, so heißt

$$\deg(f) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} & , f \neq 0 \\ -\infty & , f = 0 \end{cases}$$

Grad von f und, für $f \neq 0$,

$$l(f) := a_{\deg(f)} \in R \setminus \{0\}.$$

der Leitkoeffizient von f.

Lemma: Sei R ein komm. Ring mit der Eigenschaft
$\forall a,b \in R \; (a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$.
[R heißt dann Integritätsbereich, z.B. ein Körper].
Dann gilt für $f,g \in R[T]$:

1) $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$
2) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$
3) $l(f \cdot g) = l(f) \cdot l(g)$. Insbesondere ist $R[T]$ auch ein Int.-bereich.

Bsp: $f = 2x^3 + 1$, $g = -2x^3 + x$
$f+g = x+1$ hat Grad 1
$fg = -4x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x$ hat Grad $6 = 3+3$.

Bew von (2), (3): $\left(\sum_{i=0}^{m} a_i T^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j T^j\right) = a_m b_n T^{m+n} + h$, $\deg(h) < m+n$.

und $a_m, b_n \neq 0 \underset{R \text{ Int.ber.}}{\Rightarrow} a_m b_n \neq 0$ $\square$

16.4 | Polynomdivision (Teilen mit Rest, vgl. $\mathbb{Z}$).

Satz: Sind $f, g \in K[T]$, so existieren eindeutige $q, r \in K[T]$ mit

$$\deg(r) < \deg(g) \quad \text{und} \quad f = qg + r.$$

"f durch g = q mit Rest r".

Bew: Eindeutigkeit: Für q_1, q_2, r_1, r_2 gelte

$$\deg(r_i) < \deg(g) \quad \text{und} \quad f = q_i g + r_i, \quad i = 1, 2.$$

$$\Rightarrow \quad q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$$

$$\Rightarrow \quad (q_1 - q_2) \cdot g = r_2 - r_1 \qquad (*)$$

Ist $q_1 \neq q_2$, dann gilt

$$\deg(g) \leq \deg((q_1 - q_2) \cdot g) \overset{(*)}{=} \deg(r_2 - r_1) \leq \max\{\deg(r_1), \deg(r_2)\} < \deg(g) \ \lightning.$$

Also ist $q_1 = q_2$ und dann auch $r_1 = r_2$.

Existenz: Induktion nach $\deg(f)$:

$\deg(f) < \deg(g)$, dann fertig mit $q = 0$, $r = f$.

sonst: $f = aT^{n+k} + \ldots$, $g = bT^n + \ldots$, $a, b \neq 0$, $k \geq 0$.

$f - ab^{-1}T^k g$ hat Grad $< \deg(f) = n+k$. [brauchen b^{-1} ⇝ $R = K$]

$\overset{\text{Ind. Vor.}}{\Longrightarrow} \exists q', r : f - ab^{-1}T^k g = q'g + r$.

Setze $q := q' + ab^{-1}T^k$.

$\square$

3.31

Bsp: $(2T^4 + 3T^3 + \quad + T - 1) : (T^2+T+1) = 2T^2 + T + 1$

$$\begin{array}{l} 2T^4 + 2T^3 + 2T^2 \\ \hline \quad T^3 + 2T^2 + T - 1 \\ \quad T^3 + T^2 + T \\ \hline \quad\quad T^2 \quad - 1 \\ \quad\quad T^2 + T + 1 \\ \hline \quad\quad -T - 2 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $q = 2T^2 + T + 1$, $r = -T-2$.

(bekannt)

Bem: Das Verfahren funktioniert auch in $R[T]$, sofern $b = \ell(g) \in R^\times = \{\alpha \in R \mid \exists \beta \in R \;\; \alpha\beta = 1\}$.

Insbesondere stets für $g = T - \alpha$, $\alpha \in R$.

16.5 Wurzeln

Def: Eine Wurzel oder Nullstelle von $f \in R[T] \setminus \{0\}$ ist ein $\alpha \in R$ mit $f(\alpha) = 0$.

Satz: Sei $f \in R[T]$ und $f(\alpha) = 0$ für $\alpha \in R$. Dann existiert $q \in R[T]$ mit

$$\boxed{f = (T-\alpha) \cdot q}.$$

["$T-\alpha$ teilt f"].

Bew: Satz 16.4 $\Rightarrow$ $\exists q, r \in R[T] : f = (T-\alpha)\cdot q + r$ mit $\deg(r) < \deg(g) = 1$, also $r \in R \subset R[T]$.

Es gilt $0 = f(\alpha) = 0 \cdot q + r$, also $r = 0$. $\square$

Korollar: Sei R ein Integritätsbereich $(\forall a,b \in R\ (ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0))$. 3.32

Dann hat jedes $f \in R[T]\setminus\{0\}$ höchstens $\deg(f)$ Wurzeln.

Bew: Induktion nach $\deg(f)$.

$\deg(f)=0$: Hat keine Wurzeln.

$\deg(f)>0$: Sei α eine Wurzel von f.

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \exists g \in R[T],\ f=(T-\alpha)\cdot g$

$\deg(g)=\deg(f)-1$. Nach Induktion hat g höchstens $\deg(f)-1$ Wurzeln.

Ferner ist jede Wurzel $\beta \neq \alpha$ von f auch Wurzel von g:

$0=f(\beta)=(\beta-\alpha)\cdot g(\beta) \overset{R \text{ Int.ber.}}{\Longrightarrow} g(\beta)=0.$ □

Bsp: $f=T^3$ in $(\mathbb{Z}/8)[T]$ hat 4 Wurzeln: $0,2,4,6$.

Aber: $(\mathbb{Z}/8,+,\cdot)$ ist kein Int.-bereich: $2\cdot 4=8\equiv 0 \mod 8$.

16.6 Algebraisch abgeschlossene Körper

Def: Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes $f \in K[T]\setminus\{0\}$ eine Wurzel hat.

Bem: Nach 16.5 gilt dann:

Jedes $f \in K[T]\setminus\{0\}$ zerfällt in Linearfaktoren:

$$f = c\cdot(T-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(T-\alpha_s)^{k_s},$$

$c=l(f)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \in K$: p.w. Wurzeln von f, k_i: Vielfachheit von α_i.

Bsp: a) $\mathbb{Q}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen: T^2-2 hat keine Wurzel.

b) $\mathbb{R}$ ist nicht " " : T^2+1 " "

c) $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen: Fundamentalsatz der Algebra (↗ Fkt.theorie)

d) $\mathbb{F}_p$ ist nicht " " .

z.B. $p=2$: T^2+T+1 hat keine Wurzel.

Bem: Jeder Körper K ist Teilkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers. Ein kleinster solcher heißt algebraischer Abschluss $\overline{K}$ von K; er ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beachte: $\overline{\mathbb{Q}}$ ist abzählbar $\Rightarrow$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$.

16.7 Euklidischer Algorithmus

Dieser wichtige Algorithmus beruht auf sukzessivem Teilen mit Rest. Anwendungen umfassen die Primzerlegung, die Berechnung des ggT und "Darstellungen der Eins".

Ausgangspunkt: $f_1, f_2 \in K[T] \setminus \{0\}$, $\deg(f_2) \leq \deg(f_1)$.

Teile induktiv mit Rest:

[1] $f_1 = q_1 f_2 + f_3$, $\deg f_3 < \deg f_2$

[2] $f_2 = q_2 f_3 + f_4$, $\deg f_4 < \deg f_3$

$\vdots$

[k] $f_k = q_k f_{k+1} + f_{k+2}$

$\vdots$

[n-1] $f_{n-1} = q_{n-1} f_n + 0$. bricht ab, da $\deg f_i \searrow$.

Schreibweise: $f | g \;:\Longleftrightarrow\; \exists q \in K[T] : g = f \cdot q$ "f teilt g" 3.34

Satz: Sei $d := f_n$ aus dem Enkl. Alg.

1) $d | f_1$, $d | f_2$

2) $g \in K[T]$, $g | f_1$, $g | f_2 \Rightarrow g | d$

3) $\exists p, q \in K[X]$: $d = p \cdot f_1 + q \cdot f_2$.

Bem: (1) und (2) besagen, dass d ein größter gemeinsamer Teiler (ggT) von f_1 und f_2 ist. Dieser ist eindeutig bis auf eine Konstante. (!)

Bsp: $f_1 = T^3 - 2T^2 + 2T - 1$, $f_2 = T^2 - 2T + 1$.

$f_1 = T \cdot f_2 + (T-1)$, d.h. $q_1 = T$, $f_3 = T - 1$

$f_2 = (T-1) \cdot f_3 + 0$, d.h. $q_2 = T-1$, $f_4 = 0$. (also $n = 3$).

$\Rightarrow ggT(f_1, f_2) = T - 1 = f_1 - T \cdot f_2$ $(p = 1, q = -T)$.

In der Tat, $f_1 = (T-1) \cdot (T^2 - T + 1)$, $f_2 = (T-1)^2$.

Bew (d. Satzes): 1) Induktiv zeigt man: $d | f_{n-1}, \ldots, d | f_k$ für $k = n-1, n-2, \ldots, 1$.

$k = n-1$: $[n-1] \Rightarrow d = f_n \,|\, f_{n-1}$.

$k+1 \to k$: Ind.vor.: $d | f_{k+1}$, $d | f_{k+2} \overset{[k]}{\Rightarrow} d | f_k$.

2) Induktiv zeigt man: $g | f_k$

$k = 1, 2$: Vor.

$\underline{k \to k+1}$: $[k-1] \Rightarrow f_{k+1} = f_{k-1} - q_{k-1} f_k$
Ind.vor.: $g | f_{k-1}$, $g | f_k$ $\Big\} \Rightarrow g | f_{k+1}$.

3) Induktiv zeigt man: $\exists p_k', q_k' : f_k = p_k' f_1 + q_k' f_2$.

$\underline{k = 1,2}$: $p_0' = 1$, $q_0' = 0$
$p_1' = 0$, $q_1' = 1$.

$\underline{k \to k+1}$: $[k-1] \Rightarrow f_{k+1} = f_{k-1} - q_{k-1} f_k$

$$\overset{\text{Ind.vor.}}{=} (p_{k-1}' f_1 + q_{k-1}' f_2) - q_{k-1}(p_k' f_1 + q_k' f_2).$$

Setze $p_k' := p_{k-1}' - q_{k-1} p_k'$, $q_k' := q_{k-1}' - q_{k-1} q_k'$. □

16.8 | Teilung der Eins (vgl. Analysis III: $\sum_i \delta_i = 1$)

$\underline{\text{Korollar 1}}$: Seien $f, g \in K[T] \setminus \{0\}$ teilerfremd, d.h. $\operatorname{ggT}(f,g) \in K \setminus \{0\}$.
Dann existieren $p, q \in K[T]$ mit

$$\boxed{pf + qg = 1}.$$

(aus Satz 16.7.(3)) □

16.9 | Irreduzible Polynome

Def: Ein Element f eines Rings R heißt irreduzibel, falls
$\forall g, h \in R \; (f = g \cdot h \Rightarrow g \in R^\times \text{ oder } h \in R^\times)$.

[Erinnerung: $R^\times = \{a \in R \mid \exists b \in R, ab = 1\}$ ist die Gruppe der Einheiten von R.]

Bem: $a \in \mathbb{Z}$ irreduzibel, $a > 0 \iff a$ ist eine Primzahl.

Bsp.: a) $f \in \mathbb{R}[T]$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $f \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
oder $f = ax - b$, $a \neq 0$
oder $f = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$

[Bew.: Übung 22]

b) In $\mathbb{Q}[T]$ existieren irred. Polynome beliebigen Grades. ($\to$ Algebra)

Korollar 2: (Euklidisches Lemma) Ist $f \in K[T]$ irreduzibel, so gilt:

$$\forall g, h \in K[T] \; (f \mid gh \Rightarrow f \mid g \vee f \mid h).$$

Bew.: $f \nmid g \overset{\text{Kor. 1}}{\Rightarrow} \exists p, q : 1 = pf + qg \quad | \cdot h$

$\Rightarrow h = fph + q(gh)$

$\Rightarrow f \mid h.$ $\square$

16.10 Die Primzerlegung in $K[T]$

Korollar 3: Für jedes $f \in K[T]\setminus\{0\}$ existieren $k \in \mathbb{N}$ und irreduzible $p_1, \dots, p_k \in K[T]$ mit $l(p_i) = 1$ ("normiert"), $\deg(p_i) > 0$, so dass

$$f = c \cdot p_1 \cdots p_k, \quad c = l(f).$$

Die p_i sind eindeutig bis auf Reihenfolge.

Bew.: Existenz: Induktion nach $\deg(f)$.

Ist f irreduzibel, so defin. $p_1 := l(f)^{-1} \cdot f$.

Sonst existieren $g, h \in K[T]$, $\deg(g) > 0$, $\deg(h) > 0$ mit $f = g \cdot h$.
Wende die Ind.vor. auf g, h an!

Eindeutigkeit: Seien $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in K[T]$ mit

$$c p_1 \cdots p_k = f = c q_1 \cdots q_l .$$

$$p_1 | f \overset{\text{Kor. 2}}{\Longrightarrow} \exists j : p_1 | q_j \overset{\ell(p_1)=\ell(p_2)=1}{\Longrightarrow} p_1 = q_j$$

fortlassen

$$\Rightarrow c p_1 (p_2 \cdots p_k - q_1 \cdots \hat{q}_j \cdots q_l) = 0$$

$K[T]$ Int.bereich, $cp_1 \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad p_2 \cdots p_k - q_1 \cdots \hat{q}_j \cdots q_l = 0 .$$

Fertig mit Induktion nach $\min\{k, l\}$. □

Bem: a) Analoge Argumente liefern die Primzerlegung in $\mathbb{Z}$. Ersetze dazu im Eukl. Alg. $\deg(f)$ durch $|a|, a \in \mathbb{Z}$.

b) Die "meisten" Ringe haben keine Primzerlegungen:

Bsp: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, i] \subset \mathbb{C}$: $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (1+i) \cdot (1-i)$. //

1.11) Polynome in mehreren Veränderlichen, Multiindizes

Induktiv definieren wir

$$R[T_1, \dots, T_n] := R[T_1, \dots, T_{n-1}][T_n] ,$$

den Polynomring in n Veränderlichen mit Koeffizienten im komm. Ring R.

Bsp: $\frac{5}{2} T_1^2 + 2 T_1 T_3 - T_2^5 \in \mathbb{Q}[T_1, T_2, T_3]$.

Schreibweise: $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, dann $T^I := T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} \in R[T_1, \ldots, T_n]$

Elemente von $R[T_1, \ldots, T_n]$ der Form T^I heißen Monome. Hiermit gilt

$$R[T_1, \ldots, T_n] = \{ \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I \mid a_I \in R,\ a_I \neq 0 \text{ nur für endlich viele } I \}$$

und
$$T^I \cdot T^J = T^{I+J} \quad \text{(komponentenweise Addition in } \mathbb{N}^n\text{)}.$$

Grad:
$$\deg(T^I) := |I| := i_1 + \ldots + i_n$$
$$\deg\Big(\sum_{I \in \mathbb{N}} a_I T^I\Big) := \begin{cases} \max\{\deg(T^I) \mid a_I \neq 0\}, & \exists I : a_I \neq 0 \\ -\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$f = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I$ heißt homogen vom Grad d, falls

$$\forall I \in \mathbb{N}^n \left(a_I \neq 0 \Rightarrow \deg(T^I) = d \right).$$

Bsp: a) $\deg\left(\frac{5}{2} T_1^2 + 2 T_1 T_3 - T_2^5\right) = \max\{2, 1+1, 5\} = 5$, nicht homogen

b) $\frac{5}{2} T_1^2 + 2 T_1 T_3 - T_2^2$ ist homogen vom Grad 2.

c) $\alpha \in \mathrm{Mult}^k(K^n)$, d.h. $\alpha : K^n \times \ldots \times K^n \longrightarrow K$ multilinear.

$$\overset{13.7}{\Longrightarrow} \exists\ \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_k} \in K,\ (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \{1, \ldots, n\}^k :$$

$$\alpha\Big(\sum_\mu \lambda_{\mu 1} e_\mu, \ldots, \sum_\mu \lambda_{\mu k} e_\mu\Big) = \sum_{(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \{1, \ldots, n\}^k} \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_k} \lambda_{\mu_1 1} \cdots \lambda_{\mu_k k}.$$

Demnach können wir α als ein homogenes Polynom vom Grad k in den Variablen $\lambda_{\mu\nu}$, $\mu = 1,..,n;\ \nu = 1,..,k$ auffassen!

d) <u>Insbesondere:</u> Die Leibnizformel

$$\det\left((a_{ij})_{i,j=1,..,n}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

stellt $\det : M(n,K) \to K$ als homogenes Polynom vom Grad n in $a_{11},..,a_{nn}$ dar!

§17 Endomorphismen: Grundlagen

17.1| Für V ein K-VR heißt
$$\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V,V) = \{\varphi : V \to V \text{ linear}\}$$
der Raum der <u>Endomorphismen</u> von V. Endomorphismen haben eine reichere Struktur als lineare Abbildungen $\psi : V \to W$ zwischen <u>verschiedenen</u> Vektorräumen, deren abstraktes Verhalten schon durch $\dim V$, $\dim W$ und $\mathrm{rk}(\varphi)$ <u>bestimmt ist</u> ($\nearrow$ Rangsatz 10.13)

Bsp: $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ haben beide vollen Rang ($\mathrm{rk}(\varphi_1) = \mathrm{rk}(\varphi_2) = 2$), aber φ_1 hat einen invarianten Vektor ($\neq 0$), φ_2 nicht:
$$\varphi_1(e_1) = e_1$$
$$\varphi_2(v) = v \overset{(!)}{\Longrightarrow} v = 0.$$

17.2| <u>Invarianten</u>

Zur Klassifikation / Analyse wollen wir Endomorphismen wohldefinierte Größen ("Invarianten") zuordnen, die Endomorphismen bis auf Isomorphie bestimmen, d.h. für $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\psi \in \mathrm{End}(W)$:

$$\mathrm{Invten}(\varphi) = \mathrm{Invten}(\psi) \iff \exists\, \Phi : V \to W \text{ Isom.}, \ \psi = \Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & V \\ W \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\psi"'] & W \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Für Matrizen: Klassifikation bis auf Konjugation $A \sim S^{-1}AS$, $S \in GL(n,K)$, ($\nearrow$ 10.14)

Bsp: Der Rang ist eine Invariante.

17.3 | Die Determinante als Invariante

Def: Für $\varphi \in End(V)$, V ein K-VR, $\dim V < \infty$, definiere

$$\det(\varphi) := \det(A) \quad \text{für } A = \Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi, \; \Psi: K^n \to V \text{ ein Isom.}$$

Bem: $\det(\varphi)$ ist wohldefiniert: Ist $\Psi': K^n \to V$ ein weiterer Isom. und

$B = (\Psi')^{-1} \circ \varphi \circ \Psi'$, so gilt

$$B = ((\Psi')^{-1} \circ \Psi) \circ (\Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi) \circ (\Psi^{-1} \circ \Psi') = T^{-1} A T \text{ mit } T = \Psi^{-1} \circ \Psi' \in GL(n, K).$$

$$\Rightarrow \det(B) = \det(T^{-1} A T) = \det(T^{-1}) \det(A) \det(T) = \det(A),$$

denn $\det(T^{-1}) \cdot \det(T) = \det(T^{-1} T) = \det(E) = 1$. $\square$

Bsp: a) $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in End(\mathbb{R}^2)$ sind nicht konjugiert zueinander

$$\det(\varphi_1) = 1 \neq 4 = \det(\varphi_2)$$

b) det kann aber nicht φ_1, φ_2 aus Bsp. 17.1 unterscheiden.

Bem: $\varphi, \psi \in End(V) \Rightarrow \det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi) \cdot \det(\varphi)$ (Übung)

17.4 | Weitere Invariante: Das Minimalpolynom

V K-VR, $\dim V = n \Rightarrow \dim \mathrm{End}(V) = \dim M(n,K) = n^2$

Für $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ sind daher $\varphi^0 := \mathrm{Id}, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}$ linear abhängig.

$\Rightarrow \exists\, a_0, \dots, a_k \in K,\ k \le n^2$ mit $a_0 \mathrm{Id} + a_1 \varphi + \dots + a_k \varphi^k = 0 \in \mathrm{End}(V)$,

M.o.W: $\exists\, f \in K[T],\ \deg(f) \le n^2$ mit $f(\varphi) = 0 \in \mathrm{End}(V)$. (vgl. Lemma 16.2(3))

Bem: Sind $f, g \in K[T]$ mit $f(\varphi) = g(\varphi) = 0$, und ist $d = pf + qg$ ein größter gemeinsamer Teiler von f, g. (Bem. 16.7), so gilt

$$d(\varphi) = p(\varphi) \cdot f(\varphi) + q(\varphi) \cdot g(\varphi) = 0.$$

Es gibt daher ein eindeutiges Polynom $p_\varphi \in K[T]$ mit $ll(p_\varphi) = 1$ (normiert) und kleinsten Grades mit der Eigenschaft $p_\varphi(\varphi) = 0 \in \mathrm{End}(V)$

Def: Dieses Polynom $p_\varphi \in K[T]$ heißt Minimalpolynom von φ. [Ist eine Invariante des Endom. φ: $f(\varphi) = 0 \Leftrightarrow f(\Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi) = 0$]

Ferner gilt dann: $\forall\, h \in K[T]\ (h(\varphi) = 0 \Rightarrow p_\varphi \mid h)$

Bsp: a) Ü 2.5: $p_A = (T-1)^2$ für $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $p_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = (T-1)^2 = T^2 - 2T + 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - E$

$p_{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = T^2 - \frac{5}{2} T + 1$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} A - E$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sind nicht konjugiert zueinander.

Wdh: 1) Klassifiziere Endomorphismen bis auf Isomorphismen

a) Zwischen verschiedenen VR'en

$$\psi = \Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & V \\ W \arrow[u, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[r, "\psi"'] & W \arrow[u, "\Phi"', "\simeq"] \end{tikzcd}$$

b) Auf dem gleichen VR $(V=W)$

$\psi = \Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi$ und φ heißen <u>zueinander konjugiert</u> oder <u>ähnlich</u>

c) $W = K^n$: Ähnliche Matrizen beschreiben auch den gleichen Endomorphismus bzgl. verschiedener Basen:

$$A = \Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi$$
$$B = \Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi$$
$$= (\Phi \circ S)^{-1} \circ \varphi \circ (\Phi \circ S)$$
$$= S^{-1} \circ (\Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi) \circ S$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & V \\ K^n \arrow[u, "\Phi", "\simeq"'] \arrow[r, "A"] & K^n \arrow[u, "\Phi"', "\simeq"] \\ K^n \arrow[u, "S", "\simeq"'] \arrow[r, "B"'] \arrow[uu, bend left=60, "\Psi"] & K^n \arrow[u, "S"', "\simeq"] \arrow[uu, bend right=60] \end{tikzcd}$$

d.h. $\boxed{B = S^{-1} A S}$

---

2) Finde Konjugationsinvarianten auf $M(n,K)$!

a) $\forall S \in GL(n,K)\ \forall A \in M(n,K)$ $\quad \det(S^{-1}AS) = \det(A)$

b) <u>Min.pol.</u> $\quad p_A = p_{S^{-1}AS}$.

17.5 Zerlegung von V durch das Minimalpolynom

Satz: Sei V ein K-VR und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Sind dann $f_1, \dots, f_r \in K[T]$ paarweise teilerfremd und $V_i = \ker(f_i(\varphi))$, $f = f_1 \cdots f_r$, so gilt

$$\ker(f(\varphi)) = V_1 \oplus \dots \oplus V_r, \quad \text{mit } \varphi(V_i) = V_i \text{ für alle } i.$$

$\boxed{\text{wichtig!}}$

Bem: $f = p_\varphi \Rightarrow f_i = p_{\varphi_i}$, $\varphi_i \in \mathrm{End}(V_i)$ die von φ induz. Endomorphismus von V_i.
f_i normiert

Bsp:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ & & 2 & & \\ & 0 & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^5) \Rightarrow p_\varphi = (T-2)^2(T-3)^2.$$

$f_1 = (T-2)^3$, $f_2 = (T-3)^2$ (einzige Möglichkeit bis auf Vertauschung).

$\ker(f_1(\varphi)) = \mathbb{Q}^3 \times \{(0,0)\}$, $\ker(f_2(\varphi)) = \{(0,0,0)\} \times \mathbb{Q}^2$.

Bew: Induktion nach r.

$r=1$: trivial.

$r \to r+1$: $f := g \cdot h \in K[T]$ mit $g := f_1 \cdots f_r$, $h := f_{r+1}$.

Der Satz folgt nun aus dem folgenden, stärkeren Lemma und der Ind.vor. $\square$

Lemma: Seien $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $f \in K[T]$, $f = g \cdot h$ und g, h teilerfremd, d.h.

$$1 = pg + qh \quad \text{mit } p, q \in K[T].$$

Dann gilt:

1) $\ker(f(\varphi)) = \ker(g(\varphi)) \oplus \ker(h(\varphi))$

2) $(q\cdot h)(\varphi)$ liefert die Projektion $pr_1 : \ker(f(\varphi)) \to \ker(g(\varphi))$

$(p\cdot g)(\varphi)$ " " $pr_2 : \ker(f(\varphi)) \to \ker(h(\varphi))$.

Bew: Schreibe $F := f(\varphi)$; $G := g(\varphi)$, $H := h(\varphi)$, $P := p(\varphi)$, $Q := q(\varphi)$.

Z: 1. $v \in \ker(F) \Rightarrow v = (Q\circ H)(v) + (P\circ G)(v)$. [$Q\circ H = (q\cdot h)(\varphi)$ etc.]

2. $(Q\circ H)(\ker(F)) \subset \ker(G)$, $(P\circ G)(\ker F) \subset \ker(H)$

3. $\ker(G) \cap \ker(H) = \{0\}$.

1. $1 = qh + pg \Rightarrow Id_V = Q\circ H + P\circ G$. Also gilt die beh. Glg. sogar für $v \in V$.

2. Für $v \in \ker(F)$ gilt:

$$G(Q\circ H(v)) = [(gqh)(\varphi)](v) \overset{f=gh}{=} [(qf)(\varphi)](v) = Q(F(v)) = 0,$$

$$H(P\circ G(v)) = \qquad \ldots \qquad = P(F(v)) = 0.$$

3. $v \in \ker(G) \cap \ker(H) \Rightarrow v \overset{(1)}{=} (Q\circ H)(v) + (P\circ G)(v) = 0$. $\square$

17.6 Beispiel 1: Involutionen

Def: $\varphi \in End(V)$ heißt Involution, falls $\varphi\circ\varphi = Id$.

φ Involution $\Rightarrow$ $p_\varphi = T^2 - 1 = (T-1)(T+1)$.
$\varphi \neq \pm Id$

Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$, gilt $1 = \frac{1}{2}(T-1) + \frac{1}{2}(T+1)$,

d.h. $g = T-1$, $h = T+1$, $p = q = \frac{1}{2}$ und $f = p_\varphi$ in Lemma 17.5.

Zerlegung: $V = V_+ \oplus V_-$, $V_+ := \ker(\varphi - \mathrm{Id})$, $V_- := \ker(\varphi + \mathrm{Id})$.

d.h. $\varphi|_{V_+} = \mathrm{Id}_{V_+}$, $\varphi|_{V_-} = -\mathrm{Id}_{V_-}$.

Ferner: $(q \cdot h)(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + \mathrm{Id})$ projiziert auf V_+ : $\varphi\left(\frac{1}{2}(\varphi(v)+v)\right) = \frac{1}{2}(v + \varphi(v))$

$(p \cdot g)(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi - \mathrm{Id})$ " " V_- : $\varphi\left(\frac{1}{2}(\varphi(v)-v)\right) = \frac{1}{2}(v - \varphi(v))$

Bsp: $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V_+ = L((1,1))$, $V_- = L((-1,1))$

17.7 | Beispiel 2: Projektionen

Def: $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt Projektion, falls $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

φ Projektion $\Rightarrow$ $p_\varphi = T^2 - T = T(T-1)$.
$\varphi \neq \mathrm{Id}, 0$

Jetzt: $1 = T + (-1)\cdot(T-1)$

d.h. $g = T$, $h = T-1$, $p = 1$, $q = -1$ und $f = p_\varphi$ in Lemma 17.5.

Zerlegung: $V = V_0 \oplus V_1$, $V_0 := \ker(\varphi)$, $V_1 := \ker(\varphi - \mathrm{Id})$

und $(q \cdot h)(\varphi) = -(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id} - \varphi$ projiziert auf V_0 : $\varphi(v - \varphi(v)) = 0$

$(p \cdot g)(\varphi) = \varphi$ " " V_1 : $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(v)$.

Bsp: $\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $\varphi^2 = \begin{pmatrix} 49-42 & -98+84 \\ 21-18 & -42+36 \end{pmatrix} = \varphi$

$V_0 = \ker(\varphi) = L((2,1))$

$V_1 = \mathrm{im}(\varphi) = L((7,3))$

17.8) Eigenwerte

Ein Linearfaktor $T-\lambda$ im Minimalpolynom von $\varphi \in End(V)$ liefert den
$\overbrace{}^{\text{der Multipl. } m_\lambda}$
UR $\mathcal{U}_\lambda := \ker((\varphi - \lambda \cdot Id)^{m_\lambda})$. Ist K alg. abgeschlossen, so gilt

$$p_\varphi = \prod_{i=1}^{r} (T-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}} \quad \text{mit paarweise verschiedenen } \lambda_i,$$

und man erhält die Zerlegung von V in die Haupträume von φ:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{U}_{\lambda_i} .$$

Wichtiger Unterraum von $\mathcal{U}_\lambda$: $V_\lambda := \ker(\varphi - \lambda \cdot Id) = \{v \in V \mid \alpha(v) = \lambda \cdot v\}$ $\left[\begin{matrix} = \mathcal{U}_\lambda \\ \text{gdw } m_\lambda = 1 \end{matrix}\right]$

Def: $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von $\varphi \in End(V)$, V ein K-VR, falls die Eigenwertgleichung

$$\boxed{\varphi(v) = \lambda \cdot v}$$

eine nicht-triviale Lösung $v \in V \setminus \{0\}$ hat. v heißt dann Eigenvektor, $V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \cdot Id)$ Eigenraum von φ zum Eigenwert λ.

Bsp: a) $\varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in End(K^3)$ für $\lambda \neq \mu$ hat die EW'e λ, μ.

$\mathcal{U}_\lambda = V_\lambda = L(e_1, e_2)$, $V_\mu = L(e_3) = \mathcal{U}_\mu$ $\quad p_\varphi = (T-\lambda)(T-\mu)$

b) $\varphi = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix} \in End(K^3)$, $\quad \underset{\underset{\mathcal{U}_\lambda = L(e_1,e_2)}{\cap\!\!\!\!\neq}}{V_\lambda} = L(e_1)$, $\underset{\underset{\mathcal{U}_\mu}{\shortparallel}}{V_\mu} = L(e_3)$, $p_\varphi = (T-\lambda)^2(T-\mu)$

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cdot \pi$

c) $\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ (Drehung um α) hat keine EW'e, (3.47)

denn $p_\varphi = T^2 - 2(\cos\alpha) \cdot T + 1$ hat keine reellen Nullstellen!

d) φ wie in (b) als Endom. von $\mathbb{C}^2$ hat die EW'e $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}$.

e) Involutionen haben EW'e aus $\{-1, +1\}$

f) Projektionen " " " $\{0, 1\}$.

17.9 | Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten

Aus 17.5:

Korollar: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise versch. EW'e von $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, so ist die Summe $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k} \subset V$ direkt. Insbesondere sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig. (GÜ 4.4) $\square$

17.10 | Diagonalisierbare Endomorphismen

Dies sind die vom Verhalten her einfachsten Endomorphismen.

Def: $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, V ein K-VR, heißt diagonalisierbar, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von φ besitzt.

Bem: a) Bzgl. solch einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ zu EW'en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wird φ durch die Diagonalmatrix

$$A = \Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix},$$

beschreiben, wobei $\Psi : K^n \to V,\ e_i \longmapsto v_i$.

b) Sind $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ die paarweise verschiedenen EW'e des diagonalisierbaren Endomorphismus φ, so gilt $p_\varphi = (T-\lambda_{i_1}) \dots (T-\lambda_{i_k})$.

Eine notwendige Bedingung für Diagonalisierbarkeit ist daher, dass p_φ nur einfache Nullstellen hat. Ist auch hinreichend: $\forall i\ U_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$.

<u>Anwendung:</u> Berechnung von (hohen) Potenzen von φ:

$$\varphi^k = (\Psi^{-1} \circ A \circ \Psi^{-1})^k = \Psi^{-1} \circ A^k \circ \Psi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n^k \end{pmatrix} \circ \Psi.$$

(vgl. Ü 4.3)

17.11 | Das charakteristische Polynom

<u>Beobachtung:</u> λ EW von $\varphi \in End(V)$ $\iff$ $rk(\varphi - \lambda \cdot id) < n$
$\dim V = n$ $\iff$ $\det(\varphi - \lambda \cdot id) = 0$.

<u>Def:</u> Für V ein K-VR, $\dim(V) < \infty$, und $\varphi \in End(V)$ heißt

$$\chi_\varphi := \det(T \cdot Id - \varphi) \in K[T]$$

<u>charakteristisches Polynom von φ.</u>

Bem: Ist Endom. invariante!

Bem: a) Wir benutzen hier die Leibnizformel, um χ_φ als Polynom zu definieren (vgl. auch Bsp. 16.11,d). Hieraus folgt auch für $A=(a_{ij}) \in M(n,K)$:

$$\chi_A = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n$$

mit $c_1 = -\,\mathrm{Spur}(A) := -\sum_{i=1}^n a_{ii}$ (Übung!)

und $c_n = (-1)^n \cdot \chi_A(0) = (-1)^n \cdot \det(-A) = \det(A)$.

b) χ_φ und damit auch alle Koeffizienten $c_1(\varphi), \dots, c_n(\varphi)$ sind Invarianten!

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $TE - A = \begin{pmatrix} T & -1 & 0 \\ -2 & T-1 & 0 \\ 1 & 0 & T-1 \end{pmatrix}$

$\chi_A = \dots = T^3 - 2T^2 + T - 2$

$\chi_A(1) = 0 \Rightarrow 1 \cdot E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Rang < 3.

$\ker(E-A) = L(e_3) = V_1$ Eigenraum zum EW $\lambda = 1$.

Weitere Nullstellen: $-1, 2$ $\overset{\text{Bem 17.10,b}}{\Longrightarrow}$ A ist diagonalisierbar.

Weitere EV'en $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu den EW'en $-1, 2$.

$S := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

Bem: Test auf Diagonalisierbarkeit

" $(p_\varphi \mid \chi_\varphi)$ "

Nichtdiagonalisierbare Endomorphismen und Anwendungen studieren wir in Kap. JNF.