Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

# 9. Übungsblatt

1. Sei
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz abelscher Garben auf dem topologischen Raum $X$, und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk. Zeige, dass $\mathcal{H}$ welk ist in den folgenden Schritten.

(a) Sind $U_1, U_2 \subset X$ offen, $h \in \Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{H})$ und $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$ mit $\beta(g_i) = h|_{U_i}$, so existiert $g \in \Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{G})$ mit $\beta(g) = h$.

(b) Unter der Annahme, dass $X$ abzählbare Topologie hat, beweise durch Induktion unter Verwendung von (a) die Surjektivität der Abbildung
$$\Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$
(Die Annahme abzählbarer Topologie lässt sich mit dem Zornschen Lemma vermeiden.)

(c) Seien nun $U, V \subset X$ offen, $U \subset V$. Zeige, dass
$$\Gamma(V, \mathcal{H}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$$
surjektiv ist durch Anwendung von (b) auf $U$.

2. Zeige, dass jede offene Überdeckung von $I = [0, 1]$ eine Verfeinerung besitzt, in der je drei verschiedene Mengen leeren Schnitt haben. Beweise hiermit $\check{H}^p(I, \mathcal{F}) = 0$ für $p > 0$ und jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ durch explizite Berechnung des Čech-Komplexes.

3. Sei $\mathcal{I}$ die Idealgarbe von $P = \{[1, 0]\} \subset \mathbb{P}^1$. Zeige, dass der Kokern der Inklusion $\mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ die Wolkenkratzergarbe $\mathbb{C}_P$ ist und berechne explizit die lange exakte Kohomologiesequenz der zugehörigen kurzen exakten Sequenz
$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathbb{C}_P \longrightarrow 0.$$

4.* Sei $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ die Standardüberdeckung von $\mathbb{P}^2$. Berechne $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$ (vgl. 5.23 der Vorlesung).