Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

8. Übungsblatt

1. Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Betrachte die Vorschrift

$$\mathcal{F} : U \longmapsto \big\{ f : U \to A \text{ lokal konstant} \big\} \big/ \big\{ f : U \to A \text{ konstant} \big\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{F}$ zusammen mit den natürlichen Einschränkungsabbildungen eine Prägarbe von abelschen Gruppen definiert.

Beschreibe ferner die Garbifizierung $\mathcal{F}^+$ für $X = \big\{ 1/n \,\big|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \big\} \cup \{0\}$, topologisiert als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

2. a) Sei $\mathcal{F}$ eine Untergarbe einer Garbe $\mathcal{G}$. Zeige, dass die natürliche Abbildung zur Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ surjektiv ist und der Kern dieser Abbildung genau $\mathcal{F}$ ist. Folgere die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

b) Umgekehrt sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben. Zeige, dass $\mathcal{F}$ isomorph zu einer Untergarbe von $\mathcal{G}$ ist, und dass der Quotient von $\mathcal{G}$ nach dieser Garbe isomorph zu $\mathcal{H}$ ist.

3. Für

$$f : S^1 = \big\{ z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z|^2 = 1 \big\} \longrightarrow S^1, \quad z \longmapsto z^2$$

bezeichne $\mathcal{F} := f_* \mathbb{Z}_{S^1}$ die Garbe

$$U \longmapsto \Gamma\big(f^{-1}(U), \mathbb{Z}_{S^1}\big)$$

auf S^1.

a) Berechne $\Gamma(S^1, \mathcal{F})$ und $\Gamma(S^1 \setminus \{1\}, \mathcal{F})$.

b) Bestimme den Kokern der natürlichen Injektion

$$\mathbb{Z}_{S^1} \longrightarrow \mathcal{F}, \quad a \longmapsto a \circ f.$$