Komplexe Geometrie | Prof. Dr. Bernd Siebert
WS 08/09

7. Übungsblatt

1. Betrachte die durch die Multiplikation mit -1 definierte Wirkung von $G = \mathbb{Z}/2$ auf $\mathbb{C}^2$:

$$(-1) \,.\, (z_1, z_2) = (-z_1, -z_2).$$

Durch Rückzug induziert dies eine Wirkung auf dem lokalen Ring $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ des Fixpunkts $0 \in \mathbb{C}^2$.

(a) Zeige: Der *Invariantenring* $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^G$ ist der durch konvergente Potenzreihen in z_1^2, z_2^2, $z_1 z_2$ aufgespannte Unterring.

(b) Für einen analytischen Mengenkeim $X \subset (\mathbb{C}^n, p)$ sei $\mathcal{O}_{X,p} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}/I(X)$. Zeige: Für $X = Z(w_3^2 - w_1 w_2) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ gilt

$$\mathcal{O}_{X,p} \simeq \mathbb{C}\{z_1, z_2\}^G.$$

(Generell kann man zeigen, dass für eine beliebige holomorphe Wirkung einer endlichen Gruppe G auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ der Invariantenring $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}^G$ endlich erzeugt ist. Die Relationen zwischen Erzeugern $f_1, \ldots, f_N$ definieren dann $X \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ mit $\mathcal{O}_{X,0} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}^G$. Dieses X ist der Quotient $(\mathbb{C}^n, 0)/G$ in topologischem und analytischem Sinn.)

2. In einem Buch zur Funktionentheorie studiere die Wirkung von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen.

(a) Mache Dich mit dem Begriff des Fundamentalbereichs einer stetigen Wirkung einer diskreten Gruppe auf einem topologischen Raum vertraut und finde einen solchen für den vorliegenden Fall.

(b) Zeige, dass die Wirkung eigentlich ist.

(c) Bestimme die Stabilisatorgruppen für Punkte im Fundamentalbereich.

3. Sei $E = \mathbb{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve. Die Weierstraßsche $\mathfrak{p}$-Funktion

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

ist eine Λ-periodische meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polen der Ordnung 2 in den Punkten von Λ. Ansonsten ist $\mathfrak{p}$ holomorph. Daher induziert $\mathfrak{p}$ eine holomorphe Abbildung

$$\pi = [\mathfrak{p}, 1] : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

vom Grad 2 (eine *zweiblättrige (verzweigte) Überlagerung*). Wegen $\mathfrak{p}(z) = \mathfrak{p}(-z)$ ist π die Quotientenabbildung für den Quotienten von E nach der $\mathbb{Z}/2$-Wirkung $(-1).z := -z$. Dies alles braucht nicht gezeigt zu werden. Zeige aber, dass die $\mathbb{Z}/2$-Wirkung auf E genau 4 Fixpunkte hat und schließe, dass $|\pi^{-1}(z)| < 2$ in genau 4 Punkten gilt.

b.w.

Betrachte nun zwei elliptische Kurven $E_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$, $i = 1, 2$. Auf $E_1 \times E_2$ wirke $\mathbb{Z}/2$ durch Translation um ein $a \in \left(\frac{1}{2}\Lambda_1\right) \setminus \Lambda_1$ im ersten Faktor und durch $z \mapsto -z$ im zweiten Faktor. Zeige:

(a) Diese Wirkung ist eigentlich diskontinuierlich.

(b) Die Projektion auf den ersten Faktor induziert eine holomorphe Surjektion auf eine elliptische Kurve:

$$\pi : X \longrightarrow E_1/(\mathbb{Z}/2).$$

(c) Für $z \in \mathbb{P}^1$ ist die Faser $\pi^{-1}(z)$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit von X isomorph zu E_2.

Bemerkung: X ist ein Beispiel einer sogenannten *bielliptischen* (auch: *hyperelliptischen*) *Fläche*.