Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

6. Übungsblatt

1. Zeige: Eine eindimensionale Hopf-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{C}\setminus\{0\})/\mathbb{Z}$, mit der $\mathbb{Z}$-Wirkung $k.z = \lambda^k z$ für ein $\lambda \in (0,1)$, ist isomorph zu einer elliptischen Kurve $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. Bestimme ferner $\tau \in \mathbb{H}$ explizit in Abhängigkeit von λ.

2. Finde eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten, so dass jede elliptische Kurve zu einer Faser von f isomorph ist.

3. Auf der Fermat-Kubik $V(x^3 + y^3 + z^3 + w^3) \subset \mathbb{P}^3$ finde explizit 12 Geraden $L_1, \ldots, L_6$, $L'_1, \ldots, L'_6$ mit

(i) $\forall i \neq j : \quad L_i \cap L_j = \emptyset,\ L'_i \cap L'_j = \emptyset,\ L_i \cap L'_j \neq \emptyset.$

(ii) $\forall i : \quad L_i \cap L'_i = \emptyset.$

(Eine interaktive elementargeometrische Interpretation solcher Konfigurationen als Paare von Geraden auf den 6 Seiten eines Quaders findet sich auf `http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/csh/mathback/doublesix.html`.)

4.* Sei $X \subset \mathbb{P}^3$ die Fermat-Kubik aus Aufgabe 3. Seien $L_1, L_2 \subset X$ zwei disjunkte projektive Geraden.

(a) Zu $z \in X \setminus L_1$ sei $E_1(z) \subset \mathbb{P}^3$ die projektive Ebene, die z und L_1 enthält. Bestimme in homogenen Koordinaten die holomorphe Abbildung

$$\phi_1 : X \longrightarrow L_2 \simeq \mathbb{P}^1,$$

die $z \in X \setminus L_1$ auf den eindeutigen Schnittpunkt von $E_1(z)$ mit L_2 abbildet. Analog sei ϕ_2 definiert.

(b) Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi = (\phi_2, \phi_1) : X \setminus (L_1 \cup L_2) \longrightarrow L_1 \times L_2 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

genau 5 Geraden kontrahiert.