Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

5. Übungsblatt

1. Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ und $X = Z(f) \subset U$ die dazugehörige analytische Hyperfläche. Zeige, dass die Menge X_{sing} der *singulären Punkte* von X (=nicht-reguläre Punkte von f) analytisch ist.

Wie lässt sich für beliebige analytische Mengen $X \subset U$ eine Menge singulärer Punkte definieren?

2. Finde eine analytische Menge $X \subset \mathbb{C}^n$, so dass die Projektion

$$\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto z_n$$

die Eigenschaft hat, dass $\pi^{-1}(z)$ reduzibel ist genau für $z \neq 0$. (Hinweis: siehe Blatt 4.)

3. Sei $f = z_2^2 - z_1^3$ und $X \subset \mathbb{P}^2$ der Abschluss von $Z(f) \subset U_0$ in $\mathbb{P}^2$. Berechne die Gleichungen für $X \cap U_i$ für $i = 0, 1$.

4. (a) Zeige, dass $\mathbb{P}^n$ kompakt ist.

(b) Zeige umgekehrt, dass eine nicht-diskrete analytische Teilmenge $X \subset \mathbb{C}^n$ nicht kompakt ist.

5.* Baue ein Papiermodell der Boyschen Fläche, eine Realisierung der reell-projektiven Ebene. (Anleitungen finden sich unter “Boy’s surface” im Internet.)