Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

3. Übungsblatt

1. Seien $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ und $(f_1, \ldots, f_r) = (g_1, \ldots, g_s)$. Zeige:

$$Z(f_1) \cap \ldots \cap Z(f_r) = Z(g_1) \cap \ldots \cap Z(g_s).$$

(Hieraus folgt, dass $Z(I)$ für ein Ideal $I \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ein wohldefinierter analytischer Mengenkeim ist.)

2. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen.

(i) $\forall a, b \in R: \; ab \in I \implies a \in I \vee b \in I.$

(ii) R/I ist ein Integritätsbereich.

3. Sei R ein Ring. Das *Radikal* eines Ideals $I \subset R$ ist die Teilmenge

$$\sqrt{I} := \left\{ a \in R \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{N} : a^k \in I \right\}$$

von R. Zeige: $\sqrt{I}$ ist ein Ideal.

4. Sei S ein Ring und $R \subset S$ ein Unterring. Ein Element $x \in S$ heißt *ganz* über R, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_k \in R$ gibt mit

$$x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0,$$

d.h. es gibt ein *normiertes* $F \in R[T]$ mit $F(x) = 0$.

Zeige: $x \in \mathbb{Q}$ ist ganz über $\mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$.

(Zusatz: Verallgemeinere Aussage und Beweis für einen faktoriellen Ring R statt $\mathbb{Z}$.)

5. Definiere die Begriffe „injektiv“ und „surjektiv“ für Abbildungen zwischen analytischen Mengenkeimen.

6.* Ist das Bild der holomorphen Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad z \longmapsto (z^2 - 1, z^3 - z)$$

eine analytische Menge?

(Hinweis: Das Bild ist enthalten in $Z(y^2 - x^3 - x^2)$.)